Capacités et espace de Dirichlet

Mémoire

François Laniel

Matrîse en mathémathiques
Maître ès sciences (M.Sc.)

Québec, Canada

© François Laniel, 2013

Résumé

Choquet influença profondément la théorie du potentiel en démontrant la capacitabilité des ensembles analytiques, en particulier des boréliens. L'abstraction de la capacité newtonienne à des capacités abstraites permit l'introduction de capacités intéressantes à étudier et c'est en partie ce que nous ferons dans ce mémoire.

Beurling fut le premier à discuter de l'espace de Dirichlet classique en démontrant dans sa thèse de doctorat un théorème profond liant la capacité logarithmique aux limites non tangentielles des fonctions de cet espace. En compagnie de Carleson, il établit les bases fondamentales de cette théorie. Plusieurs questions restent encore ouvertes concernant l'espace de Dirichlet et c'est ce qui motive l'intérêt de nombreux mathématiciens à son égard.

Passant par la démonstration du théorème de Choquet, du théorème de Frostman, du théorème de Beurling et de l'inégalité capacitaire forte, ce mémoire se veut avant tout une introduction aux résultats classiques mais profonds concernant différentes capacités et l'espace de Dirichlet classique.

Table des matières

Liste des figures

À mes grands-parents Clément
Gagnon, Marie-Louise Beaupré
et aux défunts Marie-Louise
Labonté et Josaphat Laniel

Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer.

Victor Hugo (1802-1885)

Remerciements

Ce mémoire est le fruit de deux années de travail en compagnie de mon directeur de recherche, le professeur Javad Mashreghi. Il a su répondre rapidement et efficacement à toutes mes interrogations et en cela je reconnais sa patience et sa disponibilité. Je veux surtout le remercier pour avoir cru en moi dès le début. Sa confiance et l'appui financier dont il m'a fait bénéficier représentent des éléments déterminants dans cette réussite. Je remercie donc par le fait même le CRM et le CRSNG qui ont appuyé financièrement mon directeur et sans qui ces bourses m'auraient été impossibles à obtenir.

Je veux remercier les professeurs du département de mathématiques et de statistiques de l'université Laval pour tout ce qu'ils m'ont apporté, mais plus particulièrement le professeur Thomas J. Ransford pour les nombreux mais toujours excellents cours qu'il m'a enseignés. L'appui financier de la chaire de recherche dont il est titulaire fut d'un grand soutien et je tiens à le souligner ici.

Je tiens aussi à remercier mes parents, Benoit Laniel et Lise Gagnon, simplement pour tout. Cette courte phrase en dit beaucoup plus long que sa longueur. En effet, si j'avais tenté d'énumérer tout ce qu'ils ont apporté dans ma vie, j'aurais couru le risque d'en oublier et de m'en vouloir. Mille mercis pour vos mille et une attentions.

Je veux remercier mes grands-parents pour ce qu'ils m'ont apporté sur le plan humain. La rigueur et l'imagination sont des qualités nécessaires à tous mathématiciens. Clément Gagnon m'a guidé vers la rigueur intellectuelle et Marie-Louise Beaupré m'a montré l'art sous toute sa créativité. Josaphat Laniel m'a quant à lui transmis son esprit géométrique et Marie-Louise Labonté sa grande sensibilité. Ce mémoire témoigne du rôle qu'ils ont si bien joué dans ma vie.

Finalement, je ne saurais oublier mes amis, qui m'ont permis de garder un certain équilibre mental grâce à leurs folies, et le reste de ma famille, avec qui j'ai souvent eu des discussions remettant bien des choses en perspective.

Je serais bien égoïste de ne pas remercier la vie. À qui de droit . . . merci !

Introduction

Dans ce mémoire, nous étudierons différentes familles de capacités de façon à obtenir des résultats puissants concernant l'espace de Dirichlet classique. L'étude de la capacité sera donc proéminente tout au long de ce mémoire. Choquet fut le premier à introduire la capacité dans un contexte abstrait. Les axiomes qu'il propose se basaient à l'époque sur les propriétés de la capacité newtonienne, celle-ci représentant la plus grande charge électrique qu'un compact peut supporter en ne gardant qu'un potentiel inférieur à 1 en tout point. Il démontra ensuite la capacitabilité de tous ensembles analytiques pour une capacité quelconque. Il va sans dire qu'avec un tel théorème, plusieurs mathématiciens voulurent définir des objets respectants les axiomes de Choquet pour en tirer toute sa puissance. En autre, Meyers introduisit dans [29] la L^2-capacité et la capacité duale que nous étudierons au chapitre 3.

L'intérêt porté dans ce mémoire à l'espace de Dirichlet provient de son lien étroit avec la théorie du potentiel. L'appelation « espace de Dirichlet » suit de sa définition via l'intégrale de Dirichlet, celle-ci étant un outil fondamental dans la résolution de l'équation de Laplace, qu'on nomme parfois principe de Dirichlet. Selon [16], la première apparition concrète de cette expression provient des articles de Beurling et Deny, respectivement publiés en 1958 et 1959. Cependant, l'étude de cet espace remonte au moins à la thèse de doctorat de Beurling [7] publiée en 1933, mais écrite quelques années auparavant. On peux même remonter à l'article de Douglas [13] publié en 1931 qui propose une formule liant l'intégrale de Dirichlet avec la limite radiale de fonctions de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$. Dans les années qui ont suivi, Beurling et Carleson ont posé les bases fondamentales de cette théorie. Carleson [9] a entre autre donné une solution au fameux problème de la couronne pour $H^\infty(\mathbb{D})$ d'abord conjecturé par Kakutani en 1941. Ensuite, Tolokonnikov, Xiao et Trent ont donné une solution à ce problème pour l'algèbre des multiplieurs de $\mathcal{D}$. Même si nous ne discuterons pas de cette algèbre (nous remarquerons cependant que $\mathcal{D}$ n'est pas une algèbre), les recherches pour une telle solution ont amené un dévelopement important à la théorie, en particulier par la construction des mesures dites de Carleson.

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous ferons un survol bref, mais exhaustif, des théorèmes importants concernant les fonctions harmoniques et sous-harmoniques. Ce mémoire se voulant avant tout une introduction à la théorie du potentiel et à l'espace de Dirichlet classique, il est incontournable de glisser quelques mots sur ces classes de fonctions puisqu'elles jouent un rôle important pour les deux sujets. Par la suite, nous définirons la capacité selon Choquet et développerons les outils nécessaires à la démonstration d'un théorème profond dû à Choquet sur la capacitabilité des ensembles analytiques.

Dans le second chapitre, nous présenterons une famille de capacités définie sur un espace métrique compact. Nous étudierons entre autre les mesures d'équilibre, le théorème fondamental de la théorie du potentiel et la capacité classique sur le cercle unité. Ces résultats seront utilisés dans le chapitre 4 pour l'étude de l'espace de Dirichlet.

Nous serons amené, dans le troisième chapitre, à étudier d'autres familles de capacités sur le cercle via un outil puissant : la convolution. Nous établirons des liens importants et non triviaux entre trois grandes familles de capacités et dévouerons même une section à la démonstration d'un principe dû à von Neumann, résultat étant au coeur de notre analyse. Nous étudierons aussi la L^2-capacité et la capacité classique d'ensembles de Cantor généralisés sur $\mathbb{T}$.

Finalement, dans le dernier chapitre, nous nous intéresserons à l'espace de Dirichlet et à ses connexions fortes avec la capacité logaritmique. Nous serons amené à étudier le comportement au bord des fonctions de cet espace et c'est cette même capacité logarithmique qui nous donnera une idée de la taille des ensembles exceptionnels de certaines régions d'approche. Le théorème de Beurling et l'inégalité capacitaire forte seront parmi les résultats majeurs de ce chapitre. À la toute fin, nous discuterons de l'optimalité des résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires et théorème de Choquet

L'étude des fonctions harmoniques et sous-harmoniques joue un rôle important dans l'analyse des concepts de capacités et d'espaces de Dirichlet. Bien que nous n'étudierons pas les espaces de Dirichlet à poids harmoniques, ce mémoire se veut une introduction à ces concepts et c'est pourquoi nous avons décidé de consacrer deux sections sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques. Comme il existe de nombreuses excellentes références à ce sujet et que les résultats sont assez élémentaires, la majorité des concepts présentés ne sera pas démontrée et le lecteur intéressé aux démonstrations sera redirigé principalement vers [33], mais une bonne partie des résultats sont aussi démontrés dans [5] et [28].

Nous aborderons aussi dans ce chapitre les premiers fondements de ce qu'on nommera une capacité, ainsi que la démonstration d'un théorème profond et important quant à l'approximation de la capacité d'un ensemble borélien par ses sous-ensembles compacts, le théorème de Choquet.

1.1 Fonctions harmoniques

Nous dirons d'un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ qu'il est un *d*omaine si Ω est ouvert et connexe. Dans ce chapitre, à moins d'avis contraire, la fermeture des ensembles sera toujours prise par rapport à la sphère de Riemann $\mathbb{C}_\infty$. L'avantage d'un tel choix est principalement que $\mathbb{C}_\infty$ est compact et cela permet d'obtenir des résultats plus intéressants, notamment pour le principe du maximum. On notera le *L*aplacien d'une fonctions complexe f par $\Delta f := f_{xx} + f_{yy}$.

Définition 1.1.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Nous dirons d'une fonction complexe $h : U \to \mathbb{C}$ qu'elle est *h*armonique si $h \in \mathcal{C}^2(U)$ et $\Delta h = 0$ sur U.

Notons que s'il existe, le Laplacien d'une fonction réelle est réel. Ainsi, il est clair qu'une fonction complexe est harmonique si et seulement si ses parties réelles et imaginaires le sont. Il est donc suffisant d'étudier uniquement les fonctions harmoniques réelles et c'est pourquoi, à moins de le spécifier, que l'emploi de l'expression *f*onction harmonique fera dorénavant référence à celles qui sont réelles. Aussi, les équations de Cauchy-Riemann entraînent que les parties réelles et imaginaires de toutes fonctions holomorphes sur U sont harmoniques, bref que les fonctions holomorphes sont en particulier harmoniques complexes.

Sachant que la partie réelle d'une fonction holomorphe est harmonique, on peut inversement se demander s'il existe toujours une fonction holomorphe f telle que $h = \Re f$ pour une fonction harmonique h. Le prochain théorème répond à cette question par l'affirmative si on se place dans un domaine simplement connexe et par la négative si le domaine considéré ne l'est pas. Ce résultat relie donc de façon surprenante un critère d'existence d'une fonction analytique sur un ensemble et un critère topologique sur ce même ensemble. Il nous montre ainsi toute la force des fonctions harmoniques.

Théorème 1.1.2 ([5, page 202])**.** *Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et u une fonction harmonique sur ce domaine. Alors Ω est simplement connexe si et seulement s'il existe une fonction $v : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $f = u + iv$ soit holomorphe sur Ω.*

Traditionnellement, les fonctions harmoniques ont été définies via 1.1.1. Il existe cependant une autre caractérisation des fonctions harmoniques, laquelle nous permettra d'introduire dans un contexte plus général les fonctions sous-harmoniques.

Théorème 1.1.3 (Propriété de la moyenne locale, [33, pages 5 et 10])**.** *Soit U un ouvert et h une fonction réelle telle que $h \in \mathcal{C}(U)$. Alors, h est harmonique sur U si et seulement si pour chaque $w \in U$, il existe $\rho_w > 0$ telle que*

$$h(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(w + re^{it})\, dt$$

pour chaque $0 \leq r < \rho_w$.

En fait, une fonction harmonique satisfait aussi la propriété de la moyenne globale, i.e. si h est harmonique sur un voisinage ouvert du disque $D(w, \rho)$, alors

$$h(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(w + \rho e^{it})\, dt.$$

Ainsi, comme la propriété de la moyenne globale est a priori plus forte que la propriété de la moyenne locale, une fonction harmonique respecte la propriété de la moyenne globale qui implique la propriété locale et par 1.1.3, on conclut que tous ces concepts sont équivalents.

À l'instar des fonctions holomorphes, les fonctions harmoniques jouissent de plusieurs propriétés intéressantes. Puisque ces résultats sont classiques, nous ne ferons que les citer. Pour les démonstrations, le lecteur peut se référer à [33, pages 6 et 13].

Théorème 1.1.4. *Soit h et k des fonctions harmoniques sur un domaine $\Omega \in \mathbb{C}$.*

(i) (Principe d'identité)
Si $h = k$ sur un ensemble ouvert non vide U de Ω, alors $h = k$ partout sur Ω.

(ii) (Principe du maximum version 1)
Si h atteint un minimum ou un maximum local sur Ω, alors h est constante.

(iii) (Principe du maximum version 2)
Si h s'étend de façon continue sur $\overline{\Omega}$ et si $h \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $h \leq 0$ sur Ω.

(iv) (Liouville)
Si h est harmonique sur $\mathbb{C}$ et bornée inférieurement ou supérieurement, alors h est constante.

Pour les fonctions holomorphes, un principe d'identité plus fort tient. En effet, si deux fonctions holomorphes sont égales sur un ensemble ayant un point limite de Ω, alors ces deux fonctions sont égales partout sur Ω. Ceci n'est plus le cas pour les fonctions harmoniques. Il suffit pour s'en convaincre de prendre les fonctions $h(z) = \Re z$ et $k(z) = 0$ qui sont harmoniques sur $\mathbb{C}$, égales sur l'axe imaginaire et différentes partout ailleurs sur $\mathbb{C}$.

Il a été mentionné au début de ce chapitre que les fermetures étaient prises par rapport à la sphère de Riemann $\mathbb{C}_\infty$. En ommetant cela, le deuxième principe du maximum deviendrait faux. En effet, en ommetant cette remarque et en prenant $h(z) = \Re(z)$ sur $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0\}$, on se convaint que le théorème ne tient plus. En observant la démonstration du résultat, on comprend qu'elle repose sur le fait que $\overline{\Omega}$ est compact dans $\mathbb{C}_\infty$, laquelle affirmation est fausse dans $\mathbb{C}$ si Ω n'est pas borné.

On tire facilement de ces propriétés deux corollaires.

Corollaire 1.1.5 (Principe du maximum version 3)**.** *Si h est harmonique sur un domaine $\Omega \in \mathbb{C}$ et si K est un compact inclus dans Ω, alors*

$$\max_{z\in K} h(z) = \max_{z\in\partial K} h(z).$$

Démonstration. Le résultat étant trivial si h est constante sur Ω, supposons qu'elle ne l'est pas. Si le résultat était faux, alors h atteindrait un maximum sur l'ouvert $\mathrm{int}K$, donc serait constante par le premier principe du maximum. □

Corollaire 1.1.6. *Les seules fonctions harmoniques partout sur la sphère de Riemann sont les constantes.*

Démonstration. Soit h une fonction harmonique sur $\mathbb{C}_\infty$. Comme h est continue sur le compact $\mathbb{C}_\infty$, la fonction h doit atteindre un maximum global fini en un $w \in \mathbb{C}_\infty$. Si $w \in \mathbb{C}$, alors par le premier principe du maximum, h doit être constante. Si ce maximum est atteint en $w = \infty$, alors $h \leq h(\infty)$ sur $\mathbb{C}$. La fonction h est donc bornée supérieurement et par le théorème de Liouville pour les fonctions harmoniques, on déduit que h est constante. □

Nous terminons cette section en présentant un résultat dû à Herglotz sur la représentation des fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{D}$. Ce résultat nous sera utile à la toute fin du mémoire. Rappelons que le *n*oyau de Poisson est défini par

$$P_r(e^{i\theta}) := \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

et que l'espace des mesures boréliennes complexes sur $\mathbb{T}$ est noté par $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Soit donc $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Nous définissons *l*'intégrale de Poisson de μ par

$$(P_r * \mu)(e^{i\theta}) := \int_{\mathbb{T}} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}\, d\mu(e^{it}).$$

Théorème 1.1.7 (Herglotz, [28, page 67])**.** *Soit h une fonction harmonique et positive sur $\mathbb{D}$. Alors, il existe une unique mesure borélienne finie μ sur $\mathbb{T}$ telle que*

$$h(re^{i\theta}) = (P_r * \mu)(e^{i\theta}) \qquad (re^{i\theta} \in \mathbb{D}).$$

Ainsi, ce théorème stipule que chaque fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$ est l'intégrale de Poisson d'une unique mesure borélienne finie. Inversement, l'intégrale de Poisson de toute mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ est harmonique. Notons qu'on peut tirer très facilement de ce théorème l'inégalité de Harnack [28, Corollaire 3.9 page 67].

1.2 Fonctions sous-harmoniques

Bien que les fonctions harmoniques jouissent d'un rôle de choix dans l'étude de nombreux espaces de fonctions, leur manque de flexibilité les rend parfois difficiles à manipuler. Il devient alors naturel d'introduire une classe de fonctions un peu plus générale pour pallier à nos besoins. C'est ce que nous nous apprêtons à faire dans cette section.

Définition 1.2.1. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $u : U \to [-\infty, \infty)$ est dite *s*ous-harmonique si elle est semi-continue supérieurement et satisfait l'inégalité de la moyenne locale, i.e. pour chaque $w \in U$, il existe $\rho_w > 0$ tel que

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it})\, dt \qquad\qquad (0 \leq r < \rho_w).$$

De plus, on dira qu'une fonction $v : U \to (-\infty, \infty]$ est *s*uper-harmonique si $-v$ est sous-harmonique.

Tout comme les fonctions harmoniques, une fonction est sous-harmonique sur U si et seulement si elle satisfait l'inégalité de la moyenne globale, i.e. si $D(w, \rho) \subset U$, alors

$$u(w) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(w + \rho e^{i\theta})\, d\theta.$$

Exemple 1.2.2. Un exemple important [33, page 28] de fonctions sous-harmoniques est le suivant : Si f est holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors $\log |f|$ est sous-harmonique sur U.

Le prochain résultat nous convaincra de l'utilisation des termes « sous-harmoniques »pour nommer de telles fonctions.

Théorème 1.2.3 ([34, pages 336-337])**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et K un sous-ensemble compact de U. Soit aussi u une fonction sous-harmonique sur U et h une fonction réelle continue sur K et harmonique sur Int(K). Si $u(z) \leq h(z)$ pour chaque $z \in \partial K$, alors $u(z) \leq h(z)$ pour tout $z \in K$.*

L'avantage de la définition 1.2.1 est que nous ne supposons pas qu'une fonction sous-harmonique soit continument dérivable. Ceci nous donne donc plus de marge de manoeuvre pour travailler. Cependant, pour faire une analogie avec le Laplacien, on a le résultat suivant.

Théorème 1.2.4 ([33, page 36])**.** *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{C}^2(U)$. Alors u est sous-harmonique si et seulement si $\Delta u \geq 0$.*

Il existe un principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques et, bien que cela ne soit pas explicité ici, c'est ce même principe qui nous permet de démontrer qu'une fonction sous-harmonique satisfait aussi la propriété de la moyenne globale.

Théorème 1.2.5 (Principe du maximum, [33, page 29])**.** *Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$.*

(i) Si u atteint un maximum sur D, alors u est constante.

(ii) Si $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0$ pour chaque $\zeta \in \partial D$, alors $u \leq 0$ sur D.

Dans le théorème 1.2.5 (b), il est possible de remplacer ∂D par $\partial D \setminus \{\infty\}$ si la croissance de u n'est pas « trop rapide ». Le prochain théorème clarifie la situation.

Théorème 1.2.6 (Principe de Phragmén-Lindelöf, [33, page 30])**.** *Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine D non borné de $\mathbb{C}$ telle que*

$$\limsup_{z\to\zeta} u(z) \leq 0 \qquad (\zeta \in \partial D \setminus \{\infty\}).$$

Supposons aussi qu'il existe une fonction super-harmonique v ne prenant que des valeurs finies sur D et telle que

(i) $\liminf_{z\to\infty} v(z) > 0$ *;*

(ii) $\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0$.

Alors $u \leq 0$ sur D.

Corollaire 1.2.7. *Soit u une fonction sous-harmonique sur un domaine propre D non borné de $\mathbb{C}$ telle que*

(i) $\limsup\limits_{z\to\zeta} u(z) \leq 0 \qquad (\zeta \in \partial D \setminus \{\infty\})$ *;*

(ii) $\limsup\limits_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0$.

Alors $u \leq 0$ sur D.

Démonstration. Il suffit de prendre $w \in \partial D$ et d'appliquer le principe de Phragmén-Lindelöf avec $v(z) = \log|z - w|$. □

On peut en extraire un « théorème de Liouville »pour les fonctions sous-harmoniques.

Théorème 1.2.8 (Liouville)**.** *Soit u une fonction sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ telle que*

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{u(z)}{\log|z|} \leq 0.$$

Alors u est constante. En particulier, chaque fonction sous-harmonique bornée supérieurement est constante.

Démonstration. Si $u \equiv -\infty$, alors le résultat est triviale. Supposons donc que ce n'est pas le cas et choisissons $w \in \mathbb{C}$ tel que $u(w) > -\infty$. En appliquant le corollaire précédent à la fonction $u - u(w)$ sur le domaine $\mathbb{C} \setminus \{w\}$, il suit que $u \leq u(w)$ partout sur $\mathbb{C}$. Comme u atteint un maximum global sur $\mathbb{C}$, il suit par le principe du maximum que u doit être constante. □

Bien que les fonctions sous-harmoniques ne soient pas continument dérivables, il est possible de les approcher par de telles fonctions grâce à la convolution. Nous n'expliciterons rien par rapport à ces concepts, mais remarquerons qu'ils nous permettent d'en tirer un principe d'identité faible pour les fonctions sous-harmoniques.

Théorème 1.2.9 (Principe faible d'identité, [33, page 50])**.** *Supposons que u et v soient des fonctions sous-harmoniques sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ telles que $u = v$ presque partout sur U. Alors $u \equiv v$ sur U.*

Pour les fonctions sous-harmoniques, il n'existe pas de principe d'identité aussi fort que pour les fonctions harmoniques. Par exemple, les fonctions $u(z) := \max(\Re z, 0)$ et $v(z) := 0$ sont identiques sur l'ouvert $U := \{z : \Re z < 0\}$ sans être égales sur $\mathbb{C}$.

Nous présentons maintenant un critère de sous-harmonicité qui fera le pont entre certains potentiels et les fonctions sous-harmoniques.

Théorème 1.2.10 ([33, page 38])**.** *Soit (Ω, μ) un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < \infty$ et U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ qu'on munit de la mesure de Lebesgue. Soit aussi $v : U \times \Omega \to [-\infty, \infty)$ une fonction telle que*

(i) v est mesurable sur $U \times \Omega$;

(ii) Pour chaque $w \in \Omega$, $z \mapsto v(z, w)$ est sous-harmonique sur U ;

(iii) $z \mapsto \sup_{w\in\Omega} v(z, w)$ est localement bornée supérieurement sur U.

Alors $u(z) := \int_\Omega v(z, w)\, d\mu(w)$ est sous-harmonique sur U.

1.3 La capacité selon Choquet

Dans ce mémoire, nous nous attarderons sur plusieurs objets que nous nommerons « capacité ». Cette section a pour but de préciser la notion abstraite de ces objets et d'introduire le concept d'ensembles analytiques. Nous montrerons que ceux-ci font partie d'une σ-algèbre, cette observation représentant un élément clé pour la démonstration du théorème de Choquet.

Soit X un espace métrique compact. Une application réelle c définie sur $\mathcal{P}(X)$ se nomme une *capacité* sur X si elle satisfait les propriétés suivantes :

(i) $0 \leq c(A) < \infty$ pour chaque $A \subset X$;

(ii) $A \subset B \Longrightarrow c(A) \leq c(B)$;

(iii) Pour chaque suite croissante d'ensembles $A_n \subset X$, on a

$$c\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n c(A_n);$$

(iv) Pour chaque suite décroissante d'ensembles compacts $K_n \subset X$, on a

$$c\left(\bigcap_n K_n\right) = \inf_n c(K_n).$$

La capacité c est dites *s*ous-additive si $c(\emptyset) = 0$ et si c satisfait l'axiome suivant :
(v) Si $E_1, E_2, \dots \subset X$, alors $c\left(\cup_{n\geq 1} E_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} c(E_n)$.

On dit aussi d'une capacité qu'elle respecte la propriété de sous-additivité forte si pour chaque $A, B \subset X$, on a

$$c(A \cup B) + c(A \cap B) \leq c(A) + c(B).$$

On montre dans [12, pages 753 à 755] que cette propriété conjuguée avec les axiomes (i),(ii) et (iv) implique l'axiome (iii). On dira qu'une propriété tient c-*q*uasi-partout sur E si celle-ci tient partout sur $E \setminus F$, où F est un ensemble tel que $c(F) = 0$. On dira seulement « quasi-partout »lorsque le contexte sera clair. On dira qu'un ensemble $A \subset X$ est *c*apacitable si

$$c(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{compact}}} c(K).$$

Dans les applications, nous aurons à considérer des fonctions ensemblistes qui ne sont définies que sur les Boréliens (par exemple pour la capacité duale présentée au troisième chapitre). Ceci nous amène donc à introduire la précapacité.

Une *p*récapacité est une fonction ensembliste définie sur tous les ensembles boréliens et respectant les axiomes (i),(ii) et (iii). En particulier, il est clair qu'une capacité est aussi une précapacité.

On dira qu'une capacité est *i*ntérieurement règulière si pour chaque ensemble $A \subset X$ on a

$$c(A) = \sup\{c(K) : K \text{ est compact dans } X \text{ et } K \subset A\},$$

bref que chaque ensemble $A \subset X$ est capacitable. Finalement, on dira d'une capacité qu'elle est *e*xtérieurement règulière si pour chaque $A \subset X$, on a

$$c(A) = \inf\{c(U) : U \text{ est ouvert dans } X \text{ et } U \supset A\}.$$

Les mêmes définitions tiennent pour la précapacité, mais en se limitant seulement aux sous-ensembles A boréliens. Aussi, on définit la capacité intérieure c_* et la capacité extérieure c^* respectivement par

$$c_*(A) = \sup\{c(K) : K \text{ est compact dans } X \text{ et } K \subset A\},$$

et

$$c^*(A) = \inf\{c(U) : U \text{ est ouvert dans } X \text{ et } U \supset A\}.$$

On peut tirer de ces définitions le résultat suivant.

Théorème 1.3.1 ([11, page 2])**.** *Soit c une précapacité extérieurement régulière. Alors, c^* est une capacité.*

Remarquons que si c^* est une capacité selon Choquet, alors un ensemble A est capacitable si et seulement si $c_*(A) = c^*(A)$.

Voici maintenant un exemple concret de capacité sur $\mathbb{T}$. On peut se référer à [10] pour une démonstration.

Exemple 1.3.2. Étant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, on peut définir sur $\mathcal{P}(X)$ une mesure extérieure μ^* par la formule

$$\mu^*(B) = \inf\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathcal{A},\, B \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right\} \qquad (B \in \mathcal{P}(X)).$$

Ainsi, si μ est une mesure de Borel positive sur $\mathbb{T}$, alors

i) μ^* est une capacité sur $\mathbb{T}$;

ii) Chaque ouvert $U \subset \mathbb{T}$ est μ^*-capacitable ;

iii) Chaque sous-ensemble μ^*-capacitable $A \subset \mathbb{T}$ tel que $\mu^*(A) = 0$ est mesurable.

Notre objectif est en fait de montrer que tous les ensembles boréliens sont capacitables. La grande difficulté de ce problème réside dans le fait que les ensembles capacitables ne forment pas une σ-algèbre puisque cette collection n'est pas fermée par rapport au complément. Il faut donc passer par la notion d'ensembles analytiques, ce que nous nous apprêtons à définir.

Définition 1.3.3. Soit A un sous-ensemble quelconque de X. Si A peut s'écrire comme

$$A = \bigcup (A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap A_{n_1,n_2,n_3,\dots})$$

pour $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}, (A_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}, (A_{i,j,k})_{i,j,k\in\mathbb{N}}, \dots$ des collections quelconques de sous-ensembles fermés de X où l'union parcourt toutes les suites $\{n_1, n_2, \dots\}$ avec $n_i \in \mathbb{N}$, alors on dira que l'ensemble A est *a*nalytique. Dans un tel cas, la famille $(A_{n_1,n_2,\dots,n_k})_{n_i,k\in\mathbb{N}}$ se nomme *l*a famille génératrice de A.

Il est clair par définition que tous les sous-ensembles fermés de X sont analytiques. Voici maintenant un lemme qui nous sera bien utile.

Lemme 1.3.4. *La famille de tous les ensembles analytiques est stable par rapport à l'union et l'intersection dénombrable.*

Démonstration. Soit $(A^{(k)})_{k\geq 1}$ une séquence d'ensembles analytiques générés respectivement par les familles $(A^k_{n_1,n_2,\dots,n_p})_{n_i,p\in\mathbb{N}}$ $(k \geq 1)$. Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, posons $B_i = X$ et pour $p \geq 2$ et $n_i \in \mathbb{N}$,

$$B_{n_1,n_2,\dots,n_p} = A^{n_1}_{n_2,n_3,\dots,n_p}.$$

$B := \cup_k A^{(k)}$ est alors généré par la famille $(B_{n_1,n_2,\dots,n_p})_{n_i,p\in\mathbb{N}}$, ce qui montre que B est analytique.
Pour montrer le résultat pour l'intersection, posons d'abord $C := \cap_k A^{(k)}$. On a

$$C = \bigcap_k \bigcup \left(A^{(k)}_{n_1} \cap A^{(k)}_{n_1,n_2} \cap A^{(k)}_{n_1,n_2,n_3}, \cdots \right) = \bigcup \bigcap_i \left(A^{(i)}_{n_1^{(i)}} \cap A^{(i)}_{n_1^{(i)},n_2^{(i)}} \cdots \right),$$

où l'union est prise sur toutes les possibilités de $n_j^{(i)} \in \mathbb{N}$. Pour montrer le résultat, il suffit d'écrire

$$\bigcap_i \left(A^{(i)}_{n_1^{(i)}} \cap A^{(i)}_{n_1^{(i)},n_2^{(i)}} \cdots \right)$$

comme une intersection de fermés

$$C_{m_1} \cap C_{m_1,m_2} \cap C_{m_1,m_2,m_3} \cdots .$$

Il suffit en fait de créer une bijection entre $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ et la collection de suites $(n_j)_{j\geq 1}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$. En partant de gauche à droite sur les diagonales du "carré" $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on peut par exemple poser

$$\begin{aligned} C_{m_1} &= A_{m_1}^{(1)} \\ C_{m_1,m_2} &= A_{m_1}^{(2)} \\ C_{m_1,m_2,m_3} &= A_{m_1,m_2}^{(1)} \\ &\vdots \\ C_{m_1,m_2,\ldots,m_p} &= A_{m_1,\ldots,m_{p-u(u+1)/2}}^{(u+u(u+1)/2-p+2)}, \end{aligned}$$

où $u = \lfloor \frac{\sqrt{1+8p}-1}{2} \rfloor$.

Il suit alors que C est généré par la famille $(C_{n_1,n_2,\ldots,n_p})_{n_i,p\in\mathbb{N}}$, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 1.3.5. *Tout ensemble Borélien est analytique.*

Démonstration. Posons $\mathcal{A} := \{A \subset X : A \text{ et } X \setminus A \text{ sont analytiques}\}$. Par définion et par le lemme 1.3.3, il est clair que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre. Comme les ensembles ouverts sont exprimables comme l'union dénombrable d'ensembles compacts et comme ces derniers sont analytiques, alors les ouverts le sont aussi. Leurs compléments étant fermés (donc analytiques), il suit que les ouverts appartiennent à $\mathcal{A}$. Comme la tribu de Borel est la plus petite σ-algèbre contenant les ouverts, alors celle-ci est incluse dans $\mathcal{A}$, donc les boréliens sont analytiques. $\square$

1.4 Le théorème de Choquet

Dans cette section, nous démontrerons le théorème de Choquet, lequel nous sera d'une grande aide plus tard dans le document. Il nous permettra entre autre de faire un lien fort entre la capacité duale et la L^2-capacité sur $\mathbb{T}$.

Théorème 1.4.1 (Choquet)**.** *Tout ensemble analytique est capacitable.*

Conjugué au corollaire 1.3.4, on déduit entre autre que les Boréliens sont capacitables. Cependant, avant de démontrer ce précieux théorème, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 1.4.2. *Soit A un ensemble analytique généré par la famille $(A_{n_1,n_2,\ldots,n_k})_{n_i,k\in\mathbb{N}}$. Soit aussi $(N_i)_{i\geq 1}$ une suite quelconque d'entiers positifs. Pour chaque $p \geq 1$, définissons*

$$F_p := \bigcup_{1\leq n_i\leq N_i} \Big(A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap \ldots \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_p}\Big)$$

et posons $F := \cap_{p\geq 1} F_p$. Alors F est un sous-ensemble fermé de A.

Démonstration. Le fait que F soit fermé est presque trivial. En effet, comme F_p est l'union finie de fermés, il suit que F_p est fermé et donc F aussi. Il suffit donc de montrer que $F \subset A$.

Fixons $x \in F$. Pour chaque $p \geq 1$, on a que $x \in F_p$, d'où l'existance d'entiers $n_1^{(p)}, n_2^{(p)}, \ldots, n_p^{(p)}$ tels que

$$x \in A_{n_1^{(p)}} \cap A_{n_1^{(p)},n_2^{(p)}} \cap A_{n_1^{(p)},n_2^{(p)},\ldots,n_p^{(p)}} \tag{1.1}$$

avec $1 \leq n_i^{(p)} \leq N_i$, $(1 \leq i \leq p)$.

Pour un i fixé quelconque, la suite $(n_i^{(p)})_{p\geq i}$ est bornée supérieurement par N_i. Ainsi, cette suite (ou une sous-suite quelconque de celle-ci) possède une sous-suite constante, disons de valeur n_i. Commencant avec $i = 1$, on peut donc trouver une suite $(p_{1,k})_{k\geq 1}$ telle que

$$n_1^{(p_{1,k})} = n_1$$

pour chaque $k \geq 1$. Par (1.1) on a que

$$x \in A_{n_1}.$$

Ensuite, on peut extraire de $(p_{1,k})_{k\geq 1}$ une autre sous-suite $(p_{2,k})_{k\geq 1}$ telle que

$$x \in A_{n_1,n_2}.$$

Continuant indéfiniment ce procédé, on obtient une suite d'entiers $(n_i)_{i\geq 1}$ telle que

$$x \in A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap A_{n_1,n_2,n_3} \cap \ldots.$$

Ainsi, $x \in A$. □

Démonstration du théorème de Choquet. Il est clair que les ensembles fermés sont capacitables. Soit A un ensemble analytique généré par la famille $(A_{n_1,n_2,\ldots,n_p})_{n_i,p\in\mathbb{N}}$. Pour chaque $N \geq 1$, posons

$$A^{(N)} := \bigcup_{1\leq n_1\leq N} (A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap A_{n_1,n_2,n_3} \cap \ldots).$$

Nous ne posons aucune restriction sur les autres indices et ils parcourent $\mathbb{N}$. La séquence $(A^{(N)})_{N\geq 1}$ est croissante et $\cup_{N=1}^{\infty} A^{(N)} = A$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$ quelconque, par l'axiome (iii), il existe N_1 tel que

$$c(A^{(N_1)}) \geq c(A) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Ensuite, posons

$$A^{(N_1,N)} := \bigcup_{\substack{1\leq n_1\leq N_1 \\ 1\leq n_2\leq N}} \left(A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap A_{n_1,n_2,n_3} \cap \ldots\right).$$

Encore une fois, nous ne posons aucune restriction sur les autres indices et ils parcourent $\mathbb{N}$. La séquence $(A^{(N_1,N)})_{N\geq 1}$ est croissante et $\cup_{N=1}^{\infty} A^{(N_1,N)} = A^{(N_1)}$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$ quelconque, par l'axiome (iii) il existe N_2 tel que

$$c(A^{(N_1,N_2)}) \geq c(A^{(N_1)}) - \frac{\epsilon}{4}.$$

En posant

$$A^{(N_1,N_2,\cdots,N_j)} := \bigcup_{\substack{1\leq n_i\leq N_i \\ 1\leq i\leq j}} \left(A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap A_{n_1,n_2,n_3} \cap \ldots\right),$$

on arrive à trouver N_j tel que

$$c(A^{(N_1,N_2,\cdots,N_j)}) \geq c\left(A^{(N_1,N_2,\cdots,N_{j-1})}\right) - \frac{\epsilon}{2^j}.$$

En additionnant les inégalités, on obtient que pour chaque $j \geq 1$,

$$c(A^{(N_1,N_2,\ldots,N_j)}) \geq c(A) - \epsilon. \tag{1.2}$$

Ayant construit une séquence de $(N_j)_{j\geq 1}$, il suffit de considérer la suite $(F_j)_{j\geq 1}$ définie comme dans le lemme 1.4.2 par

$$F_j = \bigcup_{1\leq n_i\leq N_i} \left(A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap \ldots \cap A_{n_1,n_2,\ldots,n_j}\right).$$

Ainsi, $A^{(N_1,N_2,\ldots,N_j)} \subset F_j$ et par l'axiome (ii) définissant une capacité et (1.2) respectivement, on a pour $j \geq 1$ que

$$c(F_j) \geq c(A^{(N_1,N_2,\ldots,N_j)}) \geq c(A) - \epsilon. \tag{1.3}$$

De plus, par le lemme 1.4.2, $F = \cap_j F_j$ est un ensemble fermé de A et donc par les axiomes (ii), (iv) et par (1.3), on a

$$c(A) \geq c(F) = \inf_j c(F_j) \geq c(A) - \epsilon.$$

N'oublions pas que F dépend de ϵ. Comme X est un espace métrique compact, il suit que F est compact et donc

$$c(A) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{compact}}} c(F),$$

bref A est capacitable. $\square$

Chapitre 2

Potentiel, énergie et capacité sur un espace métrique compact

La notion de capacité constitue un outil primordial dans l'étude des espaces de Dirichlet. Nous nous intéressons principalement à la capacité logarithmique sur $\mathbb{T}$, laquelle assigne une notion de grandeur aux sous-ensembles de $\mathbb{T}$. Nous obtiendrons grâce à ces concepts des résultats plus forts sur les limites au bord de fonctions de l'espace de Dirichlet. Il n'est pas beaucoup plus difficile de généraliser la capacité logarithmique à d'autres noyaux et sur un espace métrique compact quelconque, et c'est ce que nous présenterons dans ce chapitre. De cette manière, nous pourrons aussi couvrir la capacité de Riesz qui apparaît naturellement dans l'étude d'une famille d'espaces de Dirichlet à poids. Les résultats présentés sont standards. Le lecteur peut se référer à [10, 16, 27].

2.1 Capacité sur un compact

Fixons un espace metrique compact (X, d). On dira d'une fonction $K : (0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ qu'elle est un *n*oyau si elle est continue et décroissante. On étend la définition de K en 0 en posant $K(0) := \lim_{t \to 0} K(t)$. Cette extension en 0 n'exclut donc pas que $K(0) = \infty$, ce qui en pratique est souvent le cas, en particulier avec $K(t) = \log^+(2/t)$. On excluera aussi le cas où $K \equiv 0$ pour éviter les trivialités. Fixons donc une telle K.

Définition 2.1.1. Soit μ une mesure de Borel finie et positive sur X. Le K-potentiel de μ est la fonction $K_\mu(x) : X \longrightarrow [0, \infty]$ définit par

$$K_\mu(x) := \int_X K(d(x, y))\, d\mu(y)$$

La K-énergie de μ est quant à elle définie par

$$I_K(\mu) := \int_X K_\mu(x)\, d\mu(x) = \iint K(d(x,y))\, d\mu(x)d\mu(y).$$

On dira d'un ensemble E qu'il est *polaire* si $I_K(\mu) = \infty$ pour chaque mesure borélienne finie non-nulle μ telle que son support est un sous-ensemble compact de E.

Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{C}$ qui est finie, positive et dont le support est compact. Posons $X := \mathrm{supp}\mu$ et $K(t) = \log^+(2/t)$. L'exemple 1.2.2 nous assure que

$$-\log(2/|z-w|) = -\log 2 + \log|z-w|$$

est sous-harmonique. En appliquant le théorème 1.2.10 sur $\mathbb{C} \times X$ à $-\log 2 + \log|z-w|$, on trouve que $K_\mu(z)$ est super-harmonique sur $\mathbb{C}$. En appliquant le même théorème sur $(\mathbb{C} \setminus X) \times X$ à $\log(2/|z-w|)$, on trouve que $K_\mu(z)$ est sous-harmonique sur ce domaine. Ainsi, $K_\mu(z)$ est harmonique sur $(\mathbb{C} \setminus X)$ et super-harmonique sur X. On peut donc appliquer judicieusement les résultats des sections 1.1 et 1.2 à K_μ.

Nous nommons la quantité $I_K(\mu)$ une énergie en raison de son interprétation physique. En regardant μ comme une charge sur X, on peut voir $K_\mu(x)$ comme l'énergie potentielle au point x par rapport à μ. L'énergie totale de μ est donc donnée par $I_K(\mu) = \int_X K_\mu(x)\, d\mu(x)$, d'où cette terminologie.

Il est clair que $I_K(\mu) \in [0, \infty]$. En fait, si K n'est pas identiquement nulle et μ est une mesure finie et positive sur X, on a $I_K(\mu) > 0$. En effet, soit $x \in \mathrm{supp}\mu$ et $K \not\equiv 0$. Comme K est continue et décroissante, il existe $\epsilon > 0$ et $\alpha > 0$tel que pour chaque $0 \leq y < \epsilon$, $K(y) \geq \alpha > 0$. Ainsi,

$$K_\mu(x) = \int_X K(d(x,y))\, d\mu(y) \geq \int_{d(x,y)<\epsilon} K(d(x,y))\, d\mu(y) \geq \alpha \int_{d(x,y)<\epsilon} d\mu(y) > 0,$$

la dernière inégalité étant vraie puisque $x \in \mathrm{supp}\mu$. Ainsi, comme $K_\mu(x) > 0$ pour chaque $x \in \mathrm{supp}x$, on déduit que $I_K(\mu) > 0$.

Remarquons cependant qu'il est possible que $I_K(\mu) = \infty$, par exemple si $K(0) = \infty$ et que μ est une mesure de Dirac.

Nous sommes maintenant prês à introduire la capacité. Soit F un ensemble compact. Écrivons $\mathcal{P}(F)$ pour l'ensemble des mesures de probabilité de Borel sur F.

Définition 2.1.2. Définissons la K-capacité de F par

$$c_K(F) := \frac{1}{\inf\{I_K(\mu) : \mu \in \mathcal{P}(F)\}}.$$

Voici maintenant quelques propriétés classiques de la capacité.

Théorème 2.1.3. *(i)* $c_K(\emptyset) = 0$ *;*

(ii) Si $F_1 \subset F_2$*, alors* $c_K(F_1) \leq c_K(F_2)$ *;*

(iii) c_K *est sous-additive, c'est-à-dire* $c_K(F_1 \cup \ldots \cup F_n) \leq c_K(F_1) + \ldots c_K(F_n)$*.*

Démonstration. (i) Comme il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\emptyset$, on peut directement conclure.
(ii) Comme $\mathcal{P}(F_1) \subset \mathcal{P}(F_2)$, on a

$$\inf\{I_K(\mu) : \mu \in \mathcal{P}(F_2)\} \leq \inf\{I_K(\mu) : \mu \in \mathcal{P}(F_1)\},$$

d'où $c_K(F_1) \leq c_K(F_2)$.
(iii) Posons $F := \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ et soit $\mu \in \mathcal{P}(F)$. Pour chaque k et pour $S \in F$, définissons

$$\mu_k(S) := \mu(S \cap F_k \backslash (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1})).$$

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mu_k(S) &= \sum_{k=1}^{n} \mu(S \cap F_k \backslash (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1}))\\ &= \mu(\cup_{k=1}^{n} \mu(S \cap F_k \backslash (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1})))\\ &= \mu(S),\end{aligned}$$

donc

$$I_K(\mu) \geq \sum_{k=1}^{n} I_K(\mu_k) \tag{2.1}$$

par simple définition de l'intégral et par les propriétés de l'infimum. Aussi, chaque mesure μ_k est supportée sur F_k, donc en prenant la mesure de probabilité sur F_k définie par $\nu := \frac{\mu_k}{\mu_k(F_k)}$, on trouve que $\frac{1}{c_K(F_k)} \geq I_K(\nu) = \frac{I_K(\mu_k)}{\mu_k(F_k)^2}$. On a donc par l'inégalité de Schwarz et la précédente respectivement que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} I_K(\mu_k)\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} c_K(F_k)\right)^{1/2} &\geq \sum_{k=1}^{n} \sqrt{I_K(\mu_k) c_K(F_k)}\\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \mu_k(F_k)\\ &= \mu(F) = 1.\end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec (2.1), on obtient que $I_K(\mu) \sum_{k=1}^{n} c_K(F_k) \geq 1$. Comme ceci tient pour chaque $\mu \in \mathcal{P}(F)$, on obtient le résultat recherché, soit $c_K(F) \leq \sum_{k=1}^{n} c_K(F_k)$. $\square$

Voici maintenant une borne supérieure pour la capacité en terme du diamètre.

Théorème 2.1.4. *Si F est un sous-ensemble compact de X, alors $c_K(F) \leq \frac{1}{K(diam(F))}$.*

Démonstration. Si $\mu \in \mathcal{P}(F)$, comme K est décroissante, alors

$$I_K(\mu) \geq \iint K(\mathrm{diam}(F))\, d\mu(x) d\mu(y) = K(\mathrm{diam}(F)).$$

Comme ceci est vrai pour chaque $\mu \in \mathcal{P}(F)$, alors on conclut que $c_K(F) \leq \frac{1}{K(\mathrm{diam}(F))}$. □

Corollaire 2.1.5. *Pour chaque ensemble compact F, on a $c_K(F) < \infty$.*

Démonstration. On a par hypothèse que K n'est pas identiquement égal à 0 et donc il existe $d_0 > 0$ tel que $K(d_0) > 0$. Comme F est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de sous-ensembles compacts de diamètres inférieurs à d_0. Ainsi, $c_K(F) = c_K(\bigcup_{i=1}^n F_i) \leq c_K(F_1) + \ldots + c_K(F_n) \leq \frac{n}{K(d_0)} < \infty$. □

Nous aimerions maintenant montrer que la capacité est en quelque sorte semi-continue supérieurement, dans un sens qui sera spécifié dans le prochain théorème. Nous aurons besoin pour la démonstration d'une définition et d'un lemme.

Définition 2.1.6. On dira qu'une suite de mesures finies $(\mu_n)_{n\geq 1}$ sur X est faiblement*-convergente vers μ si $\int g\, d\mu_n \to \int g\, d\mu$ pour toutes fonctions continues g sur X.

Lemme 2.1.7. *Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une séquence dans $\mathcal{P}(X)$ faiblement*-convergente vers une mesure $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Alors, $\liminf_{n\to\infty} I_K(\mu_n) \geq I_K(\mu)$.*

Démonstration. D'abord, montrons que si $f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors $\iint f\, d\mu_n d\mu_n \to \iint f\, d\mu d\mu$ si $n \to \infty$. Ceci est trivial si f est de la forme $f(x,y) = g(x)h(y)$. Aussi, les sommes finies de fonctions de cette forme induisent une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X \times X)$ qui sépare les points et qui contient une fonction constante non nulle. Par le théorème de Stone-Weirstrass, cette sous-algèbre est dense et donc toute fonction $f : X \times X \to \mathbb{R}$ peut être approximée par ces sommes finies. Le résultat suit donc aussi dans le cas général. De plus, si $K(0) < \infty$, alors en posant $f(x,y) := K(d(x,y))$, on déduit que $I_K(\mu_n) \to I_K(\mu)$ lorsque $n \to \infty$. Pour le cas général, posons $K_T(t) := \min\{K(t), T\}$. On a donc encore une fois par le résultat plus haut que $\lim_{n\to\infty} I_{K_T}(\mu_n) = I_{K_T}(\mu)$. Comme pour tout n on a que $I_{K_T}(\mu_n) \leq I_K(\mu_n)$, alors $I_{K_T}(\mu) \leq \liminf_{n\to\infty} I_K(\mu_n)$. Par le théorème de convergence monotone, on a aussi $I_{K_T}(\mu) \to I_K(\mu)$ quand $T \to \infty$. On en tire le résultat voulu, soit $I_K(\mu) \leq \liminf_{n\to\infty} I_K(\mu_n)$. □

Nous sommes maintenant prés à démontrer que la capacité est semi-continue supérieurement dans le sens suivant.

Théorème 2.1.8. *Soit $(F_n)_{n\geq 1}$ une séquence décroissante de sous-ensembles compacts de X et posons $F := \bigcap_{n\geq 1} F_n$. On a alors que $c_K(F) = \lim\limits_{n\to\infty} c_K(F_n)$.*

Démonstration. Comme F_n est une séquence décroissante, par le théorème 2.1.3 (ii), $c_K(F_n)$ est aussi une séquence décroissante et $c_K(F_n) \geq c_K(F)$ pour tout n. Il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} c_K(F_n) \leq c_K(F)$. Pour chaque n, prenons un $\mu_n \in \mathcal{P}(F)$ tel que $I_K(\mu_n) < \frac{1}{c_K(F_n)} + \frac{1}{n}$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite de $(\mu_n)_{n\geq 1}$ qui est faiblement*-convergente vers un certain $\mu \in \mathcal{P}(X)$. Pour alléger la notation on peut, si nécessaire, réindicer la sous-suite et supposer que toute la suite converge faiblement*. Il est clair que le support de μ est inclus dans F_n pour chaque n, donc $\mu \in \mathcal{P}(F)$ et $I_K(\mu) \geq \frac{1}{c_K(F)}$. Finalement, par le lemme 2.1.7, on a $I_K(\mu) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} I_K(\mu_n) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{c_K(F_n)}$. Il s'en suit que $\lim\limits_{n\to\infty} c_K(F_n) \leq c_K(F)$, d'où l'égalité. □

2.2 Capacité intérieure et extérieure

Dans le chapitre 1, nous avons présenté la capacité selon Choquet comme étant définie sur chaque sous-ensemble de X. Présentement, notre définition de capacité n'est bien définie que pour un sous-ensemble compact de X. Nous étendons maintenant cette définition à des ensembles quelconques.

Définition 2.2.1. Soit E un sous-ensemble quelconque de X. On définie la K-capacité intérieure de E par

$$c_K(E) := \sup\{c_K(F) : F \subset E, \quad F \text{ compact}\}.$$

On définie alors la K-capacité extérieure de E par

$$c_K^*(E) := \inf\{c_K(U) : U \supset E, \quad U \text{ ouvert dans } X\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que la définition de la capacité intérieure est équivalente à

$$c_K(E) := \frac{1}{\inf_\mu I_K(\mu)},$$

où l'infimum est pris sur toutes les mesures de probabilité boréliennes avec comme support un sous-ensemble compact de E.

Rappelons qu'on dit d'un ensemble E qu'il est polaire si $I_K(\mu) = \infty$ pour chaque mesure borélienne finie non nulle μ dont le support est un sous-ensemble compact de E. Il est clair par définition que $c_K(E) = 0$ si et seulement si pour chaque $F \subset E$ compact et pour tout $\mu \in \mathcal{P}(F)$, on a $I_K(\mu) = \infty$. Ainsi, les ensembles polaires sont spécifiquement ceux dont la capacité intérieure est nulle.

Remarquons qu'on a toujours $c_K(E) \leq c^*_K(E)$. Nous montrerons plus tard que c^* est une capacité au sens de Choquet. Ainsi, un ensemble E est *capacitable* au sens de Choquet si $c_K(E) = c^*_K(E)$. Sans même faire référence à ce théorème, on a trivialement que les ouverts sont capacitables. De plus, on observe que pour un compact, la définition de capacité intérieure et celle donnée au début du chapitre coïncide. Aussi, le théorème 2.1.8 nous dit que les ensembles compacts sont aussi capacitables.

Le prochain théorème nous donne les propriétés de bases de la K-capacité extérieure, celles-ci étant analogues à celles de la capacité d'un compact.

Théorème 2.2.2. *(i)* $c^*_K(\emptyset) = 0$.

(ii) Si $E_1 \subset E_2$*, alors* $c^*_K(E_1) \leq c^*_K(E_2)$.

(iii) c^*_K *est sous-additive, c'est-à-dire* $c^*_K(\cup_{k\geq 1} E_k) \leq \sum_{k\geq 1} c^*_K(E_k)$.

Démonstration. Les parties (i) et (ii) sont triviales par la définition et le théorème 2.1.3. (iii) Considérons d'abord le cas où chaque E_k est un ouvert, disons U_k. Soit F un sous-ensemble compact de $\bigcup_{k\geq 1} U_k$. Par compacité, il existe un $n \geq 1$ tel que $F \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n$. Nous pouvons en fait écrire $F = F_1 \cup \cdots \cup F_n$ où chaque F_k est un sous-ensemble compact de U_K. Ainsi, par le théorème 2.1.3, on trouve

$$c_K(F) \leq \sum_{k=1}^{n} c_K(F_k) \leq \sum_{k=1}^{n} c_K(U_k) \leq \sum_{k\geq 1} c_K(U_k).$$

Comme ceci tient pour chaque F, on obtient que $c_K(\cup_{k\geq 1} U_k) \leq \sum_{k\geq 1} c_K(U_k)$.

Pour le cas général, on peut supposer que $c^*_K(E_k) < \infty$ pour chaque k, puisque sinon il n'y a rien à prouver. Prenons $\epsilon > 0$. Pour chaque k, soit U_k un ouvert tel que $U_k \supset E_k$ et $c_K(U_k) < c^*_K(E_k) + \frac{\epsilon}{2^k}$. On a alors que l'ouvert $\cup_{k\geq 1} U_k$ contient $\cup_{k\geq 1} E_k$ et par ce qui a déjà été prouvé,

$$c_K^*(\cup_{k\geq 1}E_k) \leq c_K(\cup_{k\geq 1}U_k) \leq \sum_{k\geq 1} c_K(U_k) \leq \sum_{k\geq 1} c_K^*(E_k) + \epsilon.$$

Comme ceci tient pour chaque $\epsilon > 0$, le résultat est démontré. □

Remarquons que par 2.2.2 (iii), l'union dénombrable d'ensemble de capacité nulle est aussi de capacité nulle.

Corollaire 2.2.3. *Si $K(0) = \infty$, alors $c^*(E) = 0$ pour chaque $E \subset X$ dénombrable.*

Démonstration. Comme $K(0) = \infty$, alors les singletons sont de capacité nulle. Le résultat suit donc de 2.2.2 (iii). □

La réciproque à ce résultat est cependant fausse. En effet, dans le prochain chapitre, nous verrons des ensembles non dénombrables de capacité logarithmique nulle.

2.3 Mesure d'équilibre

Nous nous intéresserons maintenant aux mesures telles que l'infimum soit atteint dans la définition de capacité pour un compact. Cette notion remonte à la thèse de Frostman [18].

Définition 2.3.1. Soit F un sous-ensemble compact de X tel que $c_K(F) > 0$. Une *mesure d'équilibre* pour F est une mesure $\nu \in \mathcal{P}(F)$ telle que $I_K(\mu) \geq I_K(\nu)$ pour chaque $\mu \in \mathcal{P}(F)$.

Si ν est une mesure d'équilibre pour F, alors nous avons évidemment que $c_K(F) = \frac{1}{I_K(\nu)}$. Le prochain résultat fait état de l'existence d'une telle mesure pour un sous-ensemble compact de capacité non nulle de X.

Théorème 2.3.2. *Soit F un sous-ensemble compact de X tel que $c_K(F) > 0$. Alors F possède une mesure d'équilibre.*

Démonstration. Pour chaque $n \geq 1$, par définition d'infimum, on peut choisir $\mu_n \in \mathcal{P}(F)$ tel que $I_K(\mu_n) < \frac{1}{c_K(F)} + \frac{1}{n}$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite des $(\mu_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement* vers une mesure $\nu \in \mathcal{P}(F)$. Par le lemme 2.1.7, ν est telle que $I_K(\nu) \leq \frac{1}{c_K(F)}$. Or, on a toujours $I_K(\nu) \geq \frac{1}{c_K(F)}$, donc ν est une mesure d'équilibre pour F. $\square$

Dans plusieurs cas, la mesure d'équilibre est unique. Pour plus d'informations à ce sujet, le lecteur peut se référer à [10, Chapitre 3, Théorème 6] et [23, Chapitre 3, Proposition 4]. Le prochain résultat est une version d'un théorème que Frostman a obtenu dans sa thèse de doctorat [18], souvent connu comme le théorème fondamental de la théorie du potentiel.

Théorème 2.3.3 (Frostman)**.** *Soit F un sous-ensemble compact de X tel que $c_K(F) > 0$ et ν une mesure d'équilibre de F. Alors :*
(i) $K_\nu(x) \leq I_K(\nu)$ pour tout $x \in \operatorname{supp}\nu$
(ii) $K_\nu(x) \geq I_K(\nu)$ pour tout $x \in F \setminus E$, où $c_K^*(E) = 0$.

Nous avons besoin de deux lemmes pour cette démonstration.

Lemme 2.3.4. *Si μ est une mesure de Borel positive et finie sur X, alors $K_\mu(x)$ est une fonction semi-continue inférieurement sur X.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans X telle que $x_n \to x_0 \in X$ quand $n \to \infty$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} K_\mu(x_n) &= \liminf_{n\to\infty} \int K(d(x_n, y))\, d\mu(y) \\ &\geq \int \liminf_{n\to\infty} K(d(x_n, y))\, d\mu(y) \\ &\geq \int K(d(x_0, y))\, d\mu(y) = K_\mu(x_0),\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Lemme 2.3.5. *Soit F un sous-ensemble compact de X et ν une mesure d'équilibre sur F. Si $\mu \in \mathcal{P}(F)$ et $I_K(\mu) < \infty$, alors $\int K_\nu\, d\mu \geq I_K(\nu)$.*

Démonstration. On peut supposer que $\int K_\nu\, d\mu < \infty$ car sinon il n'y a rien à prouver. Pour chaque $t \in (0,1)$, considérons la mesure $\mu_t := t\mu + (1-t)\nu$. Un calcul simple nous montre que

$$I_K(\mu_t) = I_K(\nu) + 2t\left(\int K_\nu\, d\mu - I_K(\nu)\right) + t^2\left(I_K(\mu) + I_K(\nu) - 2\int K_\nu\, d\mu\right).$$

De plus, puisque $\mu_t \in \mathcal{P}(F)$ et que ν est une mesure d'équilibre, on doit avoir que $I_K(\mu_t) \geq I_K(\nu)$ pour chaque $t \in (0,1)$. Il suit donc que $\int K_\nu\, d\mu \geq I_K(\nu)$. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème fondamental de la théorie du potentiel.

Démonstration du théorème de Frostman. (i) Supposons au contraire que $K_\nu(x_0) > I_K(\nu)$ pour un certain $x_0 \in \mathrm{supp}(\nu)$. Comme K_ν est semi-continue inférieurement, il existe un voisinage N de x_0 tel que $K_\nu > I_K(\nu)$ sur N. Comme $x \in \mathrm{supp}(\nu)$, on a que $\nu(N) > 0$. Ainsi,

$$\int_N K_\nu \, d\nu > I_K(\nu)\nu(N).$$

De plus, par le lemme 2.3.5 appliqué à la mesure $\mu(S) := \nu(S \backslash N)/\nu(X \backslash N)$, on a

$$\int_{X \backslash N} K_\nu \, d\nu \geq I_K(\nu)\nu(X \backslash N).$$

En additionnant les deux inégalités, on obtient

$$\int K_\nu \, d\nu > I_K(\nu),$$

ce qui est une contradiction puisque ces deux quantités sont égales. On conclut donc que $K_\nu(x) \leq I_K(\nu)$ pour chaque $x \in \mathrm{supp}(\nu)$.
(ii) Pour chaque $n \geq 1$, posons

$$E_n := \left\{ x \in F : K_\nu(x) \leq I_K(\nu) - \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme K_ν est semi-continue inférieurement, E_n est fermé dans F, donc compact. Supposons que $c_K(E_n) > 0$ pour un certain n. On a alors que E_n possède une mesure d'équilibre ν_n. Par le lemme 3.1.17, on a

$$\int K_\nu \, d\nu_n \geq I_K(\nu).$$

De plus, puisque $K_\nu \leq I_K(\nu) - \frac{1}{n}$ sur E_n, on a

$$I_K(\nu) \leq \int K_\nu \, d\nu_n \leq I_K(\nu) - \frac{1}{n},$$

ce qui est une contradiction. Ainsi, on doit conclure que $c_K(E_n) = 0$ pour chaque n. En posant $E := \bigcup_{n \geq 1} E_n$, on a $c^*{}_K(E) = 0$ et clairement $K_\nu(x) \geq I_K(\nu)$ pour chaque $x \in F \backslash E$.

□

2.4 Capacité classique sur $\mathbb{T}$

Nous présentons maintenant la capacité qui nous sera la plus utile pour l'étude de l'espace de Dirichlet classique.

Définition 2.4.1. Posons $X = \mathbb{T}$ avec la métrique $d(z, w) := |z-w|$ et $K(t) := \log^+(\frac{2}{t})$. La capacité associée à ces conditions se nomme la capacité logarithmique. Nous la dénoterons par $c(\cdot)$.

Le choix du nombre 2 pour notre noyau est lié à la taille du diamètre du cercle unité. Cependant, nous aurions pu remplacer ce nombre par n'importe quelle constante $A \geq 2$ et la capacité c_A résultante aurait été équivalente à la notre dans le sens où $\frac{1}{c_A(F)} - \frac{1}{c(F)} = \log(A/2)$ pour chaque F. Une autre possibilité, entre autre choisie dans [33], est de prendre $K(t) = \log(1/t)$. Ce noyau n'est pas strictement positif, mais on peut néanmoins définir la capacité par

$$\tilde{c}(F) := \exp\left(-\inf\{I_K(\mu) : \mu \in \mathcal{P}(F)\}\right).$$

Nous obtenons alors la relation $\frac{1}{c} = \log(2/\tilde{c})$. Ceci nous donne entre autre que $c(F) = 0$ si et seulement si $\tilde{c}(F) = 0$.

Notons que la capacité logarithmique peut être en fait définie de plusieurs façons. Il est possible de la définir via l'énergie [2, 6, 16, 20, 22, 27, 33, 35, 36], le potentiel [1, 3, 10, 23, 29], les réduites [4, 12, 21], les fonctions de Green [19, 26, 31] et le diamètre transfini [32]. Tel que vu en début de chapitre, nous avons opté pour la définition passant par la notion d'énergie. Malgré le fait que ces différentes définitions puissent donner différentes capacités pour un ensemble, elles sont quand même équivalentes dans le sens où chacune d'elle peut être arbitrairement petite si l'autre l'est suffisamment. En particulier, les ensembles de capacité logarithmique nulle sont tous les mêmes et ce, peu importe la définition privilégiée.

Nous présentons maintenant une formule pour l'énergie d'une mesure μ en terme de ses coefficients de Fourier, ceux-ci étant définis par

$$\hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{T}} e^{-ikt}\, d\mu(e^{it}) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Théorème 2.4.2. *Soit $X = \mathbb{T}$, $d(z, w) := |z - w|$ et $K(t) := \log^+(2/t)$. Si μ est une mesure borélienne positive et finie sur $\mathbb{T}$, alors*

$$I_K(\mu) = \sum_{k \geq 1} \frac{|\hat{\mu}(k)|^2}{k} + \mu(\mathbb{T})^2 \log 2.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$I_K(\mu) - \mu(\mathbb{T})^2 \log 2 = \iint \log \frac{1}{|e^{it} - e^{is}|} \, d\mu(e^{is}) d\mu(e^{it}).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\iint \log \frac{1}{|e^{it} - e^{is}|} \, d\mu(e^{is}) d\mu(e^{it}) = \sum_{k \geq 1} \frac{|\hat{\mu}(k)|^2}{k}. \tag{2.2}$$

Soit $0 < r < 1$. On a

$$\begin{aligned} \iint \log \frac{1}{|e^{it} - re^{is}|} \, d\mu(e^{is}) d\mu(e^{it}) &= \Re \iint - \log(1 - re^{i(s-t)}) \, d\mu(e^{is}) d\mu(e^{it}) \\ &= \Re \iint \sum_{k \geq 1} \frac{r^k e^{ik(s-t)}}{k} \, d\mu(e^{is}) d\mu(e^{it}) \\ &= \Re \sum_{k \geq 1} \frac{r^k}{k} \overline{\hat{\mu}(k)} \hat{\mu}(k) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{r^k |\hat{\mu}(k)|^2}{k}. \end{aligned}$$

En faisant tendre $r \to 1^-$ de part et d'autre, on obtient le résultat. Pour justifier le passage de la limite à l'intérieur des intégrales, on considère deux situations. Si le membre de gauche de (2.2) est infini, il suffit d'utiliser le lemme de Fatou pour conclure. Considérons maintenant le cas où le membre de gauche de (2.2) est fini. Remarquons que la transformation de Möbius $z \mapsto \frac{|1-z|}{|1-rz|}$ envoie le cercle unité sur un cercle symétrique à l'axe réel et passant par 0 et $\frac{2}{1+r}$. Ainsi, le segement $[0, \frac{2}{1+r}]$ est un diamètre de ce cercle et donc

$$\frac{|1 - \zeta|}{|1 - r\zeta|} \leq \frac{2}{1 + r} \leq 2$$

pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$. Il suit alors facilement que $\frac{1}{|e^{it} - re^{is}|} \leq \frac{2}{|e^{it} - e^{is}|}$ pour chaque $r < 1$. On peut ainsi utiliser le théorème de convergence dominée pour justifier le passage de la limite à l'intérieur des intégrales. □

Nous allons maintenant montrer qu'un ensemble polaire (selon la capacité logarithmique sur $\mathbb{T}$) est de mesure de Lebesgue nulle. Nous déduirons ce résultat via un corollaire au théorème suivant.

Nous noterons par $|E|$ la mesure de longueur d'arc de E.

Théorème 2.4.3. *Soit E un sous-ensemble de Borel de $\mathbb{T}$ avec $|E| > 0$. Alors*

$$c(E) \geq \frac{1}{\log(2\pi e / |E|)}.$$

Démonstration. Montrons d'abord le résultat pour F un sous-ensemble compact de $\mathbb{T}$ avec $|F| > 0$. Posons $K(t) := \log^+(2/t)$ et soit μ la mesure de probabilité sur F définie par $\mu(S) := |F \cap S|/|F|$. On a alors pour $z \in \mathbb{T}$ que

$$K_\mu(z) = \frac{1}{|F|} \int_{e^{i\theta} \in F} \log \frac{2}{|z - e^{i\theta}|} \, d\theta.$$

Pour une valeur de z fixée, si au lieu d'intégrer sur F on intègre sur un arc dans $\mathbb{T}$ centré en z et de longueur $|F|$, alors il est évident que la valeur de cette nouvelle intégrale sera plus grande ou égale à la précédente. On a donc

$$\begin{aligned} K_\mu(z) &\leq \frac{1}{|F|} \int_{-|F|/2}^{|F|/2} \log \frac{2}{|2\sin(\theta/2)|} \, d\theta \\ &\leq \frac{1}{|F|} \int_{-|F|/2}^{|F|/2} \log \frac{\pi}{|\theta|} \, d\theta \\ &= \frac{2\pi}{|F|} \int_0^{|F|/2} \log(1/t) \, dt = \log(2\pi e/|F|). \end{aligned}$$

Comme μ est une mesure de probabilité, il s'en suit que $I(\mu) \leq \log(2\pi e/|F|)$ et donc $c(F) \geq 1/\log(2\pi e/|F|)$. Pour le cas général ($E$ Borélien), il suffit d'exploiter le fait que la mesure de Lebesgue est régulière, c'est-à-dire que $|E| = \sup\{|F| : F \subset E, F \text{ fermé}\}$. Or, les fermés de $\mathbb{T}$ sont compacts, ce qui termine la démonstration. $\square$

Corollaire 2.4.4. *Un ensemble de capacité logarithmique nulle possède une mesure de Lebesgue nulle*

Démonstration. Il suffit de montrer la contraposée. Soit donc E tel que $|E| > 0$. Par le théorème précédent, on a alors

$$c(E) \geq \frac{1}{\log(2\pi e/|E|)} > 0.$$

$\square$

Remarquons que par le corollaire 2.2.3, les ensembles dénombrables de $\mathbb{T}$ sont polaires. Cependant, nous verrons dans le prochain chapitre qu'il existe des ensembles non-dénombrables ayant une capacité nulle.

Il est aussi possible de donner une borne supérieure pour la capacité logarithmique d'un arc en terme de sa mesure. Il n'est pas difficile de montrer que si $I \subset \mathbb{T}$ est un arc fermé, alors

$$c(I) \leq \frac{1}{\log(2e/|I|)}.$$

Cependant, il n'existe pas de telles bornes pour un fermé quelconque de $\mathbb{T}$. En effet, il existe certains sous-ensembles de E tels que $|E| = 0$, mais $c(E) > 0$. L'ensemble de cantor triadique en est un exemple.

Le dernier théorème de cette section est connu comme le principe du maximum pour le potentiel.

Théorème 2.4.5. *Soit $\mathbb{T}$ muni de la métrique $d(z, w) := |z - w|$ et soit K un noyau convexe. Si μ est une mesure borélienne finie et positive sur $\mathbb{T}$ et $K_\mu \leq M$ sur supp μ, alors $K_\mu \leq M$ sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit I une composante connexe de $\mathbb{T} \backslash \text{supp}\mu$, disons $I = (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ avec $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$. Si on montre que $K_\mu \leq M$ sur I, alors on aura terminé puisque I est quelconque sur $\mathbb{T} \backslash \text{supp}\mu$. Soit γ tel que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. On a

$$K_\mu(e^{i\gamma}) = \int K(|e^{i\theta} - e^{i\gamma}|)\, d\mu(e^{i\theta}) = \int_{[\beta, \alpha+2\pi]} K\left(\sin \frac{\theta - \gamma}{2}\right) d\mu(e^{i\theta}).$$

Posons $f(\gamma) := K_\mu(e^{i\gamma})$. Comme la fonction sinus est concave sur $[0, \pi]$ et que K est décroissante, on a que $K(2\sin(\theta - \gamma)/2)$ est convexe sur $[\alpha, \beta]$, donc f aussi sur ce même intervalle. En particulier, $f(\gamma) \leq \max\{f(\alpha), f(\beta)\}$ pour $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Or, $f \leq M$ en α et en β puisque $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ appartiennent à suppμ. On a donc que $f(\gamma) \leq M$ pour chaque $\gamma \in (\alpha, \beta)$, ce qui est équivalent au fait que $K_\mu \leq M$ sur I. □

Le résultat s'applique évidemment avec $K := \log^+(2/t)$. On en déduit ainsi ce précieux corollaire.

Corollaire 2.4.6. *Soit $\mathbb{T}$ muni de la métrique $d(z, w) := |z - w|$ et soit K un noyau convexe. Soit aussi F un sous ensemble compact de $\mathbb{T}$ tel que $c_K(F) > 0$ et ν une mesure d'équilibre sur F. Alors*
(i) $K_\nu(x) \leq I_K(\nu)$ pour chaque $x \in \mathbb{T}$
(ii) $K_\nu(x) = I_K(\nu)$ pour chaque $x \in F \backslash E$, où $c_K^*(E) = 0$.

Démonstration. Pour (i), on combine le théorème 2.4.3 et le point (i) du théorème 2.3.3. Pour (ii), il suffit de considérer le point (i) de ce corollaire (qu'on vient de démontrer) avec le point (ii) du théorème 2.3.3. □

Chapitre 3

Différentes capacités sur $\mathbb{T}$

Dans ce chapitre, nous présenterons trois familles de capacités sur $\mathbb{T}$ et ferons un lien très fort entre les deux premières, grâce entre autres à toute la puissance du théorème de Choquet. La section sur la capacité classique nous montrera une autre généralisation de la capacité logarithmique, mais cette fois via les produits de convolutions. Nous étudierons aussi la capacité des ensembles de Cantor généralisés et parlerons brièvement des ensembles exceptionnels. La grande majorité de ce chapitre est inspirée de [24]. Commençons de ce pas.

3.1 L^2-capacité

Dans cette section, on considère un noyau semi-continue inférieurement $k : \mathbb{T} \to (0, \infty]$ appartenant à $L^1(\mathbb{T})$. On utilisera, pour $0 < \alpha < 1$, la famille de noyaux $|1 - \zeta|^{-\alpha}$. On identifiera ainsi pour $\zeta \in \mathbb{T}$

$$k_\alpha(\zeta) := |1 - \zeta|^{-\alpha}.$$

On nomme cette famille de noyau les *n*oyaux de Riesz. On dénotera aussi $L^2_+(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}), f \geq 0\}$. Soit donc k un noyau et $f \in L^2_+(\mathbb{T})$. On définira le produit de convolution $k * f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ par

$$(k * f)(\zeta) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\lambda}) f(\lambda) |d\lambda| \quad (\zeta \in \mathbb{T}).$$

De plus, si $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T}) := \{\mu : \mu \text{ est une mesure de Borel finie et positive sur } \mathbb{T}\}$, on définiera $k * \mu : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ par

$$(k * \mu)(\zeta) := \int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\lambda})\, d\mu(\lambda).$$

Théorème 3.1.1. *Soit k un noyau, $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ et $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$. Alors* *(i) La fonction $k * f$ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{T}$.*

(ii) Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ qui converge faiblement vers μ, alors*

$$\liminf_{n\to\infty} k * \mu_n \geq k * \mu.$$

Démonstration. Soit $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{T}$ qui converge vers $\zeta \in \mathbb{T}$. Par le lemme de Fatou et le fait que k soit semi-continue inférieurement, on obtient

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}(k * f)(\zeta_n) &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \liminf_{n\to\infty} k(\zeta_n\overline{\lambda})f(\lambda)|d\lambda| \\ &\geq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} k(\zeta\overline{\lambda})f(\lambda)|d\lambda| \\ &= (k * f)(\zeta),\end{aligned}$$

d'où la semi-continuité inférieure de $k * f$.
(ii) Puisque k est semi-continue inférieurement, il existe une séquence croissante de fonctions $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{T}$ qui converge point par point vers k. Par hypothèse, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement-* vers μ, donc pour chaque m, on a $k_m * \mu_n \to k_m * \mu$ lorsque $n \to \infty$. De plus, $k \geq k_m$ et ainsi

$$\liminf_{n\to\infty} k * \mu_n \geq k_m * \mu.$$

En faisant tendre $m \to \infty$ et à l'aide du théorème de convergence monotone, on obtient

$$\liminf_{n\to\infty} k * \mu_n \geq k * \mu.$$

□

Nous sommes maintenant près à définir ce que nous nommerons une capacité, expression qui ne sera justifiée qu'à la fin de la section.

Définition 3.1.2. La L^2-*capacité* d'un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ selon un noyau k est définie par

$$C_{k,2}(E) := \inf\{\|f\|_2^2 : f \in L^2_+(\mathbb{T}),\ k * f \geq 1 \text{ sur } E\}.$$

Établissons maintenant quelques propriétés de base de cette capacité.

Théorème 3.1.3. *(i) Si $E \subset F$, alors $C_{k,2}(E) \leq C_{k,2}(F)$.*

(ii) $C_{k,2}(\emptyset) = 0$ et $C_{k,2} \leq \frac{1}{\|k\|_1^2}$.

(iii) $C_{k,2}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} C_{k,2}(E_i)$.

(iv) $C_{k,2}$ *est une capacité extérieure, i.e. pour chaque* $E \subset \mathbb{T}$

$$C_{k,2}(E) = \inf\{C_{k,2}(U) : U \supset E \ \textit{ est ouvert dans } \mathbb{T}\}.$$

(v) Si $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ *et* $t > 0$, *alors*

$$C_{k,2}(\{\zeta \in \mathbb{T} : (k * f)(\zeta) \geq t\}) \leq \frac{\|f\|_2^2}{t^2}.$$

(vi) $C_{k,2}(E) = 0$ *si et seulement s'il existe* $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ *telle que* $k * f = \infty$ *sur* E.

Démonstration. (i) Triviale par la définition.
(ii) Il est clair que $C_{k,2}(\emptyset) = 0$. De plus, comme $\|k\|_1 > 0$, il suffit de prendre $f := \frac{1}{\|k\|_1}$ dans la définition et le résultat suit.
(iii) Sans perte de généralité, supposons que $\sum_i C_{k,2}(E_i) < \infty$, sinon le résultat est trivial. Par définition d'infimum, pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $f_i \in L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $k * f_i \geq 1$ sur E_i et $\|f_i\|_2^2 < C_{k,2}(E_i) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Posons maintenant $f := \sup_i f_i$. Il est clair que $f^2 \leq \sum_i f_i^2$, donc

$$\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{T}} |f(\lambda)|^2 \, d\lambda \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_i f_i(\lambda)^2 \right| \, d\lambda \\
&\leq \sum_i \int_{\mathbb{T}} |f_i(\lambda)|^2 \, d\lambda \\
&\leq \sum_i C_{k,2}(E_i) + \epsilon < \infty,
\end{aligned}$$

donc on a aussi que $f \in L^2_+(\mathbb{T})$. De plus, comme $f \geq f_i$ pour chaque i, on a aussi $k * f \geq k * f_i \geq 1$ sur E_i, donc $k * f \geq 1$ sur $\cup_i E_i$. Ainsi, comme $\epsilon > 0$ était quelconque, en prenant la fonction f telle que définie initialement, on trouve bien que $C_{k,2}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} C_{k,2}(E_i)$.
(iv) Encore une fois, supposons que $C_{k,2}(E) < \infty$. De même qu'en (iii), pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $k * f \geq 1$ sur E et $\|f\|_2^2 < C_{k,2}(E) + \epsilon$. Posons $g := (1 + \epsilon) f$. Ainsi, sur E, on a $k * g \geq 1 + \epsilon > 1$. Posons $U_\epsilon := \{\zeta \in \mathbb{T} : k * g > 1\}$. Il est clair que $U_\epsilon \supset E$ et que U_ϵ est ouvert puisque par la proposition 3.1.1 (i), $k * g$ est semi-continue inférieurement. De plus,

$$C_{k,2}(U_\epsilon) \leq \|g\|_2^2 = (1 + \epsilon)^2 \|f\|_2^2 \leq (1 + \epsilon)^2 (C_{k,2}(E) + \epsilon).$$

Finalement, on a que $\epsilon_1 < \epsilon_2$ entraîne $U_{\epsilon_1} \subset U_{\epsilon_2}$. La conclusion recherchée suit puisque $\epsilon > 0$ était arbitraire.
(v) Posons $E := \{\zeta \in \mathbb{T} : (k * f)(\zeta) \geq t\}$. Il est évident que sur E, on a $k * (f/t) \geq 1$. Ainsi,

$$C_{k,2}(E) \leq \|f/t\|_2^2 = \|f\|_2^2/t^2.$$

(vi) Si $C_{k,2}(E) = 0$, alors il doit exister une suite $(f_i)_{i\geq 1}$ dans $L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $k * f_i \geq 1$ sur E et $\|f_i\|_2 \leq 2^{-i}$. En posant $f := \sum_i f_i$, on a que $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ et $k * f = \infty$ sur E. Réciproquement, s'il existe $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $k*f = \infty$ sur E, alors comme $C_{k,2}(E) \leq \frac{\|f\|_2^2}{t^2}$ pour tout $t > 0$, on conclut par (v) que $C_{k,2}(E) = 0$. □

On remarque à l'aide du résultat (vi) que $k * f$ est finie quasi-partout sur $\mathbb{T}$. Ces propriétés importantes de $C_{k,2}$ nous donne en fait davantage, comme en témoigneront les prochains corollaires.

Corollaire 3.1.4. *Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une collection dénombrable d'ensembles tels que $C_{k,2}(E_n) = 0$ pour chaque n, alors $C_{k,2}(\cup_n E_n) = 0$.*

Démonstration. Ceci est une conséquence directe de (iii). □

Le dernier corollaire montre que si chacune des propriétés d'une famille dénombrable tient quasi-partout sur E, alors la famille de propriétés tient quasi-partout sur E. Voici un autre corollaire important.

Corollaire 3.1.5. *Si $C_{k,2}(E) = 0$, alors $|E| = 0$, où $|E|$ désigne la mesure de Lebesgue de E sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Comme $C_{k,2}(E) = 0$, alors par (vi) il existe $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $k * f = \infty$ sur E. L'inégalité de Young nous donne que $\|k * f\|_2 \leq \|k\|_1\|f\|_2$, d'où $k * f \in L^2_+(\mathbb{T})$. Si la mesure de Lebesgue de E n'était pas nulle, alors on aurait que $k * f \notin L^2_+(\mathbb{T})$, ce qui est une contradiction. On a donc que $|E| = 0$. □

Ainsi, qu'une propriété tienne quasi-partout sur E implique qu'elle tient presque partout sur E. On peut donc voir $C_{k,2}$ comme un raffinement de la mesure de Lebesgue, au sens ou $C_{k,2}$ discerne mieux les ensembles « petits » des « très petit ».

Rappelons qu'on a posé $k_\alpha(\zeta) := |1-\zeta|^{-\alpha}$. De façon à abréger la notation, $C_{\alpha,2}$ désignera $C_{k_\alpha,2}$.

Corollaire 3.1.6. *Les ensembles dénombrables ont une $C_{\alpha,2}$ capacité nulle si $\alpha \geq 1/2$.*

Démonstration. Si on montre que $C_{\alpha,2}(\{1\}) = 0$, alors il suivra que $C_{\alpha,2}(\{\zeta_0\}) = 0$ pour chaque singleton dans $\mathbb{T}$ par l'invariance de la capacité sous la rotation. On pourra ainsi déduire la conclusion recherchée par le corollaire 3.1.4. Pour montrer que $C_{\alpha,2}(\{1\}) = 0$, il suffit, par le théorème 3.1.3 (iv), de trouver $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $(k_\alpha * f)(1) = \infty$. Comme $\frac{|1-\zeta|^\beta}{\log^2(4/|1-\zeta|)}$ converge lorsque $\zeta \to 1$ si $\beta \geq -1$, il suit que

$$f := \frac{|1-\zeta|^{\alpha-1}}{\log(4/|1-\zeta|)} \in L^2_+(\mathbb{T}).$$

De plus,

$$(k * f)(1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{|1-\zeta|^{-1}}{\log(4/|1-\zeta|)} |d\zeta| = \infty,$$

ce qui termine la démonstration □

En définissant initalement le produit de convolution sur $\mathbb{T}$, nous avons supposé que $f \in L^2_+(\mathbb{T})$. Il n'est pas difficile d'étendre cette définition à $f \in L^2(\mathbb{T})$. Il suffit décrire $f = (\Re f)^+ - (\Re f)^- + i(\Im f)^+ - i(\Im f)^-$. Nous avons

$$k * f = k * (\Re f)^+ - k * (\Re f)^- + ik * (\Im f)^+ - ik * (\Im f)^-,$$

cette dernière expression étant bien définie et finie quasi-partout par la remarque faite après le théorème 3.1.3. Finalement, puisque $\|k * f\|_2 \leq \|k\|_1 \|f\|_2$, l'inégalité de Young implique que $k * f \in L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 3.1.7. *Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, alors pour chaque $t > 0$ on a*

$$C_{k,2}(\{\zeta \in \mathbb{T} : |k * f|(\zeta) \geq t\}) \leq \frac{\|f\|_2^2}{t^2}.$$

Démonstration. On a que $|k * f|$ est bien définie presque partout. Lorsque c'est le cas, il est clair que $|k * f| \leq k * |f|$. En posant $E := \{\zeta \in \mathbb{T} : |k * f|(\zeta) \geq t\}$ et $F := \{\zeta \in \mathbb{T} : k * |f|(\zeta) \geq t\}$, on obtient que $E \subset F$ q.p. Ainsi, par le théorème 3.1.3 (i) et (v), on a $C_{k,2}(E) \leq C_{k,2}(F) \leq \frac{\|f\|_2^2}{t^2}$. □

Posons $\Omega_E := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : k * f \geq 1 \quad \text{sur } E\}$. En observant la définition initiale de $C_{k,2}(E)$, il est légitime de tenter d'expliciter $\overline{\Omega_E}$ si cela est possible puisque l'infimum sera nécesserement atteint sur cette fermeture. En fait, le prochain théorème nous montrera que $\overline{\Omega_E} = \{f \in L^2(\mathbb{T}) : k * f \geq 1 \quad \text{q.p. sur } E\}$. Plus spécifiquement, nous montrerons qu'il existe une fonction $f \in \overline{\Omega_E}$ telle que $C_{k,2}(E) = \|f\|_2^2$ et qu'en plus f est unique à un ensemble de mesure nulle près. Nous nommerons une telle fonction le *p*otentiel capacitaire de E. Avant de démontrer ce résultat, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 3.1.8. *Si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{T})$, alors il existe une sous suite (f_{n_i}) telle que $k * f_{n_i} \to k * f$ q.p.*

Démonstration. D'abord, il est clair que $k * f_n$ et $k * f$ sont bien définies et finies quasi-partout. Posons

$$A_{n,i} := \{\zeta \in \mathbb{T} : |k * f_n(\zeta) - k * f(\zeta)| \geq 2^{-i}\}.$$

Par le théoerème 3.1.7, on a pour $i, n \geq 1$ que

$$C_{k,2}(A_{i,n}) \leq 2^{2i}\|f_n - f\|_2^2.$$

Comme $\|f_n - f\|_2^2 \to 0$ quand $n \to \infty$, il existe une suite $(n_i)_{i\geq 1}$ telle que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ et

$$C_{k,2}(A_{i,n_i}) < 2^{-2i}.$$

Posons maintenant

$$A := \bigcap_{j\geq 1} \bigcup_{i\geq j} A_{i,n_i}.$$

Ainsi, pour chaque j,

$$C_{k,2}(A) \leq C_{k,2}(\cup_{i\geq j} A_{i,n_i}) \leq \sum_{i\geq j} C_{k,2}(A_{i,n_i}) \leq \sum_{j\geq 1} 2^{-2i}.$$

En faisant tendre $j \to \infty$, il suit que $C_{k,2}(A) = 0$. De plus, pour chaque $\zeta \in \mathbb{T} \setminus A$, il existe j tel que $\zeta \notin \cup_{i\geq j A_{i,n_1}}$. Ainsi, par définition des A_{i,n_i}, pour chaque $i \geq j$,

$$|k * f_{n_i}(\zeta) - k * f(\zeta)| \leq 2^{-i},$$

ce qui démontre le résultat. □

Nous sommes prés à démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.9. *Pour chaque $E \subset \mathbb{T}$, il existe une unique fonction $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $C_{k,2}(E) = \|f\|_2^2$ et $k * f \geq 1$ quasi-partout sur E. Dit autrement, le potentiel capacitaire de E existe pour tout sous-ensemble E de $\mathbb{T}$ et est unique.*

Démonstration. Commençons par démontrer l'existence. Soit (f_i) une suite de $L^2_+(\mathbb{T})$ telle que $k * f_i \geq 1$ sur E et $\|f_i\|_2^2 \to C_{k,2}(E)$ lorsque $i \to \infty$. On a clairement que pour chaque i, l'inégalité $\|f_i\|_2^2 \geq C_{k,2}(E)$ tient. De plus, $\frac{k*(f_i+f_j)}{2} \geq 1$ sur E, donc $\|f_i + f_j\|_2^2 \geq 4C_{k,2}(E)$ pour chaque i, j. L'identité du parallélogramme nous donne alors que

$$\|f_i - f_j\|_2^2 = 2\|f_i\|_2^2 + 2\|f_j\|_2^2 - \|f_i + f_j\|_2^2 \leq 2\|f_i\|_2^2 + 2\|f_j\|_2^2 - 4C_{k,2}(E).$$

Ainsi,

$$0 \leq \limsup_{i,j\to\infty} \|f_i - f_j\|_2^2 \leq 2C_{k,2}(E) + 2C_{k,2}(E) - 4C_{k,2}(E) = 0.$$

La suite (f_i) est donc Cauchy dans $L^2(\mathbb{T})$. Comme cet espace est complet, il existe $f \in L^2(\mathbb{T})$ telle que $\|f - f_i\|_2 \to 0$ quand $i \to \infty$. Ceci nous amène donc à conclure que $f \in L^2_+(\mathbb{T})$ et que $\|f\|_2^2 = C_{k,2}(E)$. Finalement, le lemme 3.1.8 nous affirme qu'une sous-suite de $k * f_i$ converge vers $k * f$ q.p., donc $k * f \geq 1$ q.p. sur E.
Pour l'unicité, supposons que $\tilde{f}$ soit une autre fonction faisant l'affaire. On a donc que $k * \frac{(f+\tilde{f})}{2} \geq 1$ sur E et donc $\|f + \tilde{f}\|_2^2 \geq 4C_{k,2}(E)$. Par l'identité du parallélogramme, on a

$$\|f - \tilde{f}\|_2^2 = 2\|f\|_2^2 + 2\|\tilde{f}\|_2^2 - \|f + \tilde{f}\|_2^2 \leq 4C_{k,2}(E) - 4C_{k,2}(E) = 0.$$

Ainsi, $f = \tilde{f}$ presque partout. $\square$

Depuis le début de la section, nous avons nommé sans scrupule l'objet mathématique $C_{k,2}$ une capacité et ce sans justifier l'emploi d'une telle expression. En se référant à la définition d'une capacité selon Choquet donnée dans la section 1.3, on observe que seuls les points (i) et (ii) on été traités. Le prochain théorème justifiera donc l'appelation de cet objet en traitant (iii) et (iv). Avant d'y arriver, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 3.1.10. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $L^2_+(\mathbb{T})$ qui converge faiblement vers $f \in L^2(\mathbb{T})$. Alors*
(i) $\liminf_{n\to\infty} k * f_n \geq k * f$ *sur* $\mathbb{T}$.
(ii) $\liminf_{n\to\infty} k * f_n = k * f$ *quasi partout sur* $\mathbb{T}$.

Démonstration. (i) Dénotons par m la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{T}$. La suite de mesures $(f_n\, dm)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ converge faiblement* vers la mesure $f\, dm$. Le résultat suit par le théorème 3.2.1 (ii)
(ii) Par (i), il suffit de montrer que $\liminf_{n\to\infty} k * f_n \leq k * f$ quasi-partout sur $\mathbb{T}$. Si f_n

converge faiblement vers f, alors, par le théorème de Banach-Saks, il existe une sous-suite (f_{n_i}) telle que $\|f - g_j\|_2 \to 0$ pour $j \to \infty$. Posons $g_j := \frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} f_{n_i}$. Par le lemme 3.2.8, il existe une sous-suite (g_{j_ι}) telle que $k * g_{j_\iota} \to k * f$ quasi-partout. Ainsi

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} k * f_n &\leq \liminf_{i\to\infty} k * f_{n_i}\\ &\leq \liminf_{j\to\infty} k * g_j\\ &\leq \liminf_{\iota\to\infty} k * g_{j_\iota} = k * f, \qquad \text{q.p sur } \mathbb{T}.\end{aligned}$$

□

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1.11. $C_{k,2}$ *est une capacité sur* $\mathbb{T}$ *selon Choquet.*

Démonstration. Par la remarque faite plus haut, il suffit de montrer que :
(i) Pour chaque suite croissante d'ensembles $E_n \subset \mathbb{T}$ avec $E := \bigcup_n E_n$, on a

$$C_{k,2}(E) = \sup_n C_{k,2}(E_n);$$

(ii) Pour chaque suite décroissante d'ensembles compacts $K_n \subset \mathbb{T}$ avec $K := \bigcap_n K_n$, on a

$$C_{k,2}(K) = \inf_n C_{k,2}(K_n).$$

Pour (i), remarquons d'abord que puisque $C_{k,2}(E_n) \leq C_{k,2}(E)$ pour chaque n, alors $\sup_n C_{k,2}(E_n) \leq C_{k,2}(E)$. Il suffit donc de démontrer l'inégalité inverse. Sans perte de généralité, supposons que $\sup_n C_{k,2}(E_n) < \infty$ (sinon l'égalité est triviale). Pour chaque n, il existe $f_n \in \Omega_E$ telle que $\|f_n\|_2^2 \leq C_{k,2}(E_n) + \frac{1}{n} \leq \sup_n C_{k,2}(E_n) + 1 < \infty$. Ainsi, la suite (f_n) est bornée dans $L^2(\mathbb{T})$. Par la propriété de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert, il existe une sous-suite (f_{n_i}) qui converge faiblement vers un $f \in L^2(\mathbb{T})$. De plus, il est clair qu'en fait, $f \in L^2_+(\mathbb{T})$. Par le lemme 3.1.10, on a que $\liminf_{i\to\infty} k * f_{n_i} = k * f$ quasi-partout et donc $k * f \geq 1$ quasi partout sur E. On en déduit que

$$C_{k,2}(E) \leq \|f\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_2^2 \leq \liminf_{n\to\infty} C_{k,2}(E_n),$$

la deuxième inégalité venant du fait que f_n tend faiblement vers f dans un espace de Banach.

(ii) Comme $C_{k,2}(K_n) \geq C_{k,2}(K)$ pour chaque n, on a aussi $\inf_n C_{k,2}(K_n) \geq C_{k,2}(K)$. Prouvons l'inégalité inverse. Comme

$$C_{k,2}(K) = \inf\{C_{k,2}(U) : U \text{ est ouvert dans } \mathbb{T},\ U \supset K\},$$

alors par pour chaque $\epsilon > 0$ il existe un ouvert U de $\mathbb{T}$ tel que $U \supset K$ et $C_{k,2}(U) < C_{k,2}(K) + \epsilon$. Ensuite, il est clair qu'il existe N tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq N$. Ainsi

$$\limsup_{n\to\infty} C_{k,2}(K_n) \leq C_{k,2}(U) < C_{k,2}(K) + \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ était quelconque, le résultat suit. □

On en déduit un important corollaire.

Corollaire 3.1.12. *Chaque ensemble analytique E de $\mathbb{T}$ (en particulier chaque Borélien) est $C_{k,2}$-capacitable, c'est-à-dire*

$$C_{k,2}(A) = \sup_{\substack{K\subset A \\ K \text{ compact}}} C_{k,2}(K).$$

Démonstration. Par le théorème précédent, $C_{k,2}$ est une capacité selon Choquet. Le résultat découle du théorème de Choquet. □

3.2 Le principe du minimax de von Neumann

Nous établissons ici l'énoncé ainsi que la démonstration du principe du minimax de Von Neumann. Ce résultat fera le pont entre la L^2-capacité et le capacité duale, celle-ci étant définie dans la section 3.3.

Théorème 3.2.1 (Principe du minimax de Von Neumann)**.** *Soit E et F des espaces vectoriels normés, $X \subset E$ et $Y \subset F$ deux ensembles convexes avec Y un ensemble compact. Soit aussi $\Phi(x,y)$ une fonction réelle sur $X \times Y$ telle que*

- *(i) Pour chaque $y \in Y$ fixé, la fonction $x \mapsto \Phi(x,y)$ est concave ;*
- *(ii) Pour chaque $x \in X$ fixé. la fonction $y \mapsto \Phi(x,y)$ est convexe et semi-continue inférieurement.*

Alors,

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \Phi(x,y) = \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} \Phi(x,y).$$

Pour les fins de la démonstration, nous montrerons deux lemmes. Nous posons

$$\sigma_* := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \Phi(x, y)$$

et

$$\sigma^* := \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \Phi(x, y).$$

Il est clair par définition que $\sigma_* \leq \sigma^*$. Pour démontrer le théorème, il suffira donc de montrer l'inégalité inverse.

Pour chaque $x \in X$ et $\sigma \in \mathbb{R}$, définissons

$$Y_x^\sigma := \{y \in Y : \Phi(x, y) \leq \sigma\}$$

et

$$Y^\sigma := \bigcap_{x \in X} Y_x^\sigma.$$

Lemme 3.2.2. *$\sigma_* = \sigma^*$ si et seulement si pour chaque $\sigma > \sigma_*$, on a*

$$Y^\sigma \neq \emptyset.$$

Démonstration. Supposons d'abord que pour tout $\sigma > \sigma_*$ on ait $Y^\sigma \neq \emptyset$. Pour chaque $\sigma > \sigma_*$, il existe donc $y_\sigma \in Y^\sigma$ tel que $\Phi(x, y_\sigma) \leq \sigma$ pour tout $x \in X$. Ainsi,

$$\sigma^* \leq \sup_{x \in X} \Phi(x, y_\sigma) \leq \inf\{\sigma \in \mathbb{R} : \sigma > \sigma_*\} = \sigma_*.$$

Supposons maintenant que $\sigma_* = \sigma^*$ et prenons $\sigma > \sigma_*$ quelconque. Montrons qu'il existe $y_\sigma \in Y$ tel que $\Phi(x, y_\sigma) \leq \sigma$ pour chaque $x \in X$. Supposons qu'il n'existe pas un tel $y_\sigma \in Y$. Il n'existe donc pas de $y \in Y$ tel que $\sup_{x \in X} \Phi(x, y) \leq \sigma$, bref pour chaque $y \in Y$, on a $\sup_{x \in X} \Phi(x, y) > \sigma$. Ainsi, on trouve que

$$\sigma^* = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} \Phi(x, y) \geq \sigma > \sigma_* = \sigma^*,$$

ce qui est une contradiction. Il existe donc $y_\sigma \in Y$ tel que $\Phi(x, y_\sigma) \leq \sigma$ pour chaque $x \in X$. Ainsi, $Y^\sigma \neq \emptyset$ et ce, pour chaque $\sigma > \sigma^*$. □

Lemme 3.2.3. *Pour chaque $\sigma > \sigma_*$ et pour chaque sous-ensemble fini $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset X$, on a*

$$\bigcap_{i=1}^N Y_{x_i}^\sigma \neq \emptyset.$$

Démonstration. On peut supposer que $\sigma^* < \infty$. Soit donc σ tel que $\infty > \sigma > \sigma_*$ et $x_1, x_2 \in X$. Montrons d'abord que

$$Y^\sigma_{x_1} \cap Y^\sigma_{x_2} \neq \emptyset.$$

Supposons le contraire et définissons $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f(y) = (\sigma - \Phi(x_1, y), \sigma - \Phi(x_2, y)).$$

Pour $y \in Y$ quelconque, comme $Y^\sigma_{x_1} \cap Y^\sigma_{x_2} = \emptyset$, soit $\Phi(x_1, y) > \sigma$ ou $\Phi(x_2, y) > \sigma$. On a donc que $f(Y) \cap \mathbb{R}^2_+ = \emptyset$. Montrons maintenant que

$$\mathrm{Conv} f(Y) \cap \mathrm{Int}\, \mathbb{R}^2_+ = \emptyset, \tag{3.1}$$

où Conv et Int désigne respectivement l'enveloppe convexe et l'intérieur d'un ensemble. Rappelons que l'enveloppe convexe d'un ensemble A est le plus petit ensemble convexe contenant A. Si (3.1) ne tient pas, alors il existe $y \in \mathrm{Conv} f(Y) \cap \mathrm{Int}\, \mathbb{R}^2_+$. Comme $y \in \mathrm{Conv} f(Y)$, il existe $y_1, y_2, \dots y_n \in Y$ avec $\lambda_i > 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ tel que $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$. Ainsi, comme $y \in \mathrm{Int}\, \mathbb{R}^2_+$, pour $j \in \{1, 2\}$, on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\sigma - \Phi(x_j, y_i)) > 0,$$

bref

$$\sigma > \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(x_j, y_i).$$

Posons $y_\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$. Comme $y \mapsto \Phi(x, y)$ est une fonction convexe pour chaque $x \in X$, on a pour $j \in \{1, 2\}$ que

$$\begin{aligned}\sigma &> \sum_{i=1}^n \lambda_i \Phi(x_j, y_i)\\ &\geq \Phi(x_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i)\\ &= \Phi(x_j, y_\lambda).\end{aligned}$$

Ainsi, $y_\lambda \in Y^\sigma_{x_1} \cap Y^\sigma_{x_2}$, ce qui est une contradiction puisqu'on a supposé l'intersection vide. (3.1) est donc montré. Par le théorème de séparation de Hahn-Banach dans $\mathbb{R}^2$, il existe une droite séparant $\mathrm{Conv} f(Y)$ et $\mathrm{Int}\, \mathbb{R}^2_+$. Ainsi, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que

$$\lambda(\sigma - \Phi(x_1, y)) + (1 - \lambda)(\sigma - \Phi(x_2, y)) \leq 0$$

pour chaque $y \in Y$, bref

$$\lambda\Phi(x_1, y) + (1 - \lambda)(\Phi(x_2, y)) \geq \sigma.$$

Posons maintenant $x_\lambda := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Comme la fonction $x \mapsto \Phi(x,y)$ est concave, on a $\Phi(x_\lambda, y) \geq \lambda\Phi(x_1,y) + (1-\lambda)\Phi(x_2,y)$, donc pour chaque $y \in Y$ on a

$$\Phi(x_\lambda, y) \geq \sigma$$

et ainsi

$$Y^\sigma_{x_\lambda} = \{y \in Y : \Phi(x_\lambda, y) = \sigma\}.$$

Il suit que $\sigma \leq \sigma^*$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé $\sigma > \sigma^*$. Ainsi, pour chaque $\sigma > \sigma^*$, on a

$$Y^\sigma_{x_1} \cap Y^\sigma_{x_2} = \emptyset.$$

Nous montrons maintenant le résultat pour un ensemble fini quelconque de X par induction sur N. Soit $\sigma > \sigma^*$ et supposons que

$$\bigcap_{i=1}^{n} Y^\sigma_{x_i} \neq \emptyset$$

pour chaque $n \leq N$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Il suffit de montrer que $\bigcap_{i=1}^{N+1} Y^\sigma_{x_i} \neq \emptyset$. Pour ce faire remarquons que $A := \cap_{i=1}^{N-1} Y^\sigma_{x_i}$ est un ensemble convexe non-vide et que $\Psi := \Phi|_{X\times A}$ est concave sur X pour chaque $y \in A$ et convexe sur A pour chaque $x \in X$. On peut donc répéter l'argumentaire plus haut avec $\tilde{Y}^\sigma_{x_N} := Y^\sigma_{x_N} \cap A$ et $\tilde{Y}^\sigma_{x_{N+1}} := Y^\sigma_{x_{N+1}} \cap A$. En procédant ainsi, on trouve que

$$\bigcap_{i=1}^{N+1} Y^\sigma_{x_i} = \tilde{Y}^\sigma_{x_N} \cap \tilde{Y}^\sigma_{x_{N+1}} \neq \emptyset.$$

L'induction sur N nous permet de conclure. □

Démonstration du principe du minimax de von Newmann. Comme Y est compact et $y \mapsto \Phi(x,y)$ est semi-continue inférieurement sur Y pour chaque $x \in X$, il suit que Y^σ_x est compact.

Supposons que $Y^\sigma = \emptyset$. On a alors que $Y = \bigcup_{x\in X}(Y \setminus Y^\sigma_x)$. Comme Y est compact et $\{Y \setminus Y^\sigma_x\}$ est un recouvrement ouvert de Y, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. On a donc pour certains $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ que $Y = \bigcup_{i=1}^n (Y \setminus Y^\sigma_{x_i})$. Ainsi, $\bigcap_{i=1}^n Y^\sigma_{x_i} = \emptyset$, ce qui est impossible par le lemme 3.2.3. On a donc que $Y^\sigma \neq \emptyset$ ce qui, par le lemme 3.2.2, démontre le théorème. □

3.3 Capacité duale

Nous discutons maintenant d'une deuxième capacité sur $\mathbb{T}$. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ et E un Borélien. Nous dirons que μ est *portée par* E si $\mu(\mathbb{T} \setminus E) = 0$ et que μ est *supportée* sur E si μ est portée par un sous-ensemble compact de E. On écrira encore une fois $\mathcal{M}^+(E)$ pour désigner l'ensemble des mesures de Borel positives et finies supportées par E. Définissons maintenant la capacité duale.

Définition 3.3.1. Soit k un noyau et E un sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}$. Une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ portée par E et satisfaisant $\|k * \mu\|_2 \leq 1$ se nomme une *mesure test* sur E. On définit $c_{k,2}(E)$ par

$$c_{k,2}(E) := \sup\{\mu(E) : \mu \text{ est une mesure test sur } E\}.$$

On remarque que $c_{k,2}$ n'est pas définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ mais bien sur la tribu de Borel de $\mathbb{T}$. Ainsi, $c_{k,2}$ n'est pas une capacité au sens de Choquet. Néanmoins, nous la nommerons une capacité et remarquerons qu'elle détient pour les Boréliens les propriétés d'une capacité au sens de Choquet. Montrons quelques propriétés de base de $c_{k,2}$.

Théorème 3.3.2. *(i) Si $E \subset F$, alors $c_{k,2}(E) \leq c_{k,2}(F)$.*

(ii) $c_{k,2}(\emptyset) = 0$ et $c_{k,2}(\mathbb{T}) \leq \frac{1}{\|k\|_1}$.

(iii) $c_{k,2}(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_{k,2}(E_i)$.

(iv) $c_{k,2}$ est une capacité intérieurement régulière, c'est-à-dire

$$c_{k,2}(E) = \sup\{c_{k,2}(K) : K \ \textit{ est compact}, K \subset E\}.$$

Démonstration. (i) Si μ est une mesure test pour E, alors elle l'est pour F, ce qui entraîne le résultat.
(ii) Le fait que $c_{k,2}(\emptyset) = 0$ est évident. De plus, pour chaque $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$, on a $\|k*\mu\|_2 \leq \|k * \mu\|_1 = \|k\|_1 \mu(\mathbb{T})$. Ainsi, pour chaque mesure test μ de $\mathbb{T}$, on a $\mu(\mathbb{T}) \leq 1/\|k\|_1$, d'où le résultat.
(iii) Posons $E := \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ et soit μ une mesure test sur E. Posons $F_1 := E_1$ et $F_i := E_i \setminus (E_1 \cup \ldots \cup E_{i-1})$ pour $i \geq 2$. Soit aussi μ_i la mesure définie par $\mu_i(A) := \mu(A \cap F_i)$. On a $\mu_i(\mathbb{T} \setminus F_i) = \mu((\mathbb{T} \setminus F_i) \cap F_i) = \mu(\emptyset) = 0$, donc μ_i est supportée par F_i. Aussi,

$\|k*\mu_i\|_2 \leq \|k*\mu\|_2 \leq 1$, donc μ_i est une mesure test de F_i et $\mu_i(F_i) \leq c_{k,2}(F_i)$. Finalement,

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_{k,2}(F_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c_{k,2}(E_i).$$

Comme cette observation tient pour chaque mesure test μ de E, on obtient le résultat.
(iv) Soit $\epsilon > 0$ et μ une mesure test pour E telle que $\mu(E) > c_{k,2} - \epsilon$. Comme μ est une mesure borélienne positive et finie sur $\mathbb{T}$, alors μ est une mesure régulière. Ainsi, il existe un sous-ensemble compact K de E tel que $\mu(K) > \mu(E) - \epsilon$. Définissons $\mu_1(A) := \mu(A \cap K)$. Alors μ_1 est une mesure test sur K, donc $c_{k,2}(K) \geq \mu_1(K) > \mu(E) - \epsilon > c_{k,2}(E) - 2\epsilon$. Le résultat suit puisque $\epsilon > 0$ était arbitraire. □

Nous donnerons maintenant une nouvelle représentation de $c_{k,2}(K)$ pour un compact K de $\mathbb{T}$.

Théorème 3.3.3. *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{T}$. Alors*

$$\frac{1}{c_{k,2}(E)} = \inf\{\|k*\mu\|_2 : \mu \in \mathcal{M}^+(E), \mu(E) = 1\}.$$

Démonstration. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ une mesure de probabilité sur E. En posant $\nu := \|k*\mu\|_2^{-1}\mu$, on a que $\nu \in \mathcal{M}^+(E)$ et $\|k*\nu\|_2 = 1$, donc $c_{k,2}(E) \geq \nu(E) = \frac{1}{\|k*\mu\|_2}$. Ainsi

$$\frac{1}{c_{k,2}(E)} \leq \inf\{\|k*\mu\|_2 : \mu \in \mathcal{M}^+(E), \mu(E) = 1\}.$$

Posons maintenant $\epsilon > 0$. Il existe $\nu \in \mathcal{M}^+(E)$ telle que $\|k*\nu\|_2 \leq 1$ et $\nu(E) > c_{k,2}(E) - \epsilon$. Nous normalisons ν sur E en posant $\nu_1 := \frac{\nu}{\nu(E)}$. On a alors $\nu_1(E) = 1$, $\nu_1 \in \mathcal{M}^+(E)$ et $\|k*\nu_1\|_2 = \frac{\|k*\nu\|_2}{\nu(E)} \leq \frac{1}{c_{k,2}(E)-\epsilon}$. Ainsi

$$\frac{1}{c_{k,2}(E) - \epsilon} \geq \inf\{\|k*\mu\|_2 : \mu \in (M)^+(E), \mu(E) = 1\}.$$

Le résultat suit en faisant tendre $\epsilon \to 0$. □

Pour E un ensemble compact non vide de $\mathbb{T}$, une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$ se nomme une *distribution capacitaire* sur E si $c_{k,2}(E) = \mu(E)$ et $\|k*\mu\|_2 = 1$. Pour une telle mesure, $k*\mu$ se nomme le *potentiel capacitaire*. Voici un théorème d'existence pour la distribution capacitaire.

Théorème 3.3.4. *Il existe une distribution capacitaire sur chaque sous-ensemble compact non vide K de $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}^+(K)$ une suite de mesures telle que $\|k * \mu_n\|_2 \leq 1$ pour chaque $n \in \mathbb{T}$ et $\mu_n(K) \to c_{k,2}(K)$. Par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une sous-suite (μ_{n_i}) qui converge faiblement* vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{T})$. En particulier, on a

$$\mu(K) = \lim_{i\to\infty} \mu_{n_i}(K) = c_{k,2}(K).$$

Par le théorème 3.1.1, on a $k * \mu \leq \liminf_{i\to\infty} k * \mu_{n,i}$. Ainsi, comme $\|k * \mu_n\|_2 \leq 1$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le lemme de Fatou nous donne donc que $\|k * \mu\|_2 \leq 1$. Finalement, comme $\mu(K) = c_{k,2}(K)$, on a $t\mu(K) > c_{k,2}(K)$ pour $t > 1$, donc $t\mu$ ne peut être une mesure test pour K. Il suit que $\|k * t\mu\|_2 > 1$, bref $\|k * \mu\|_2 = 1$. □

Pour terminer cette section, nous montrons un lien intéressant entre la L^2-capacité et la capacité duale.

Théorème 3.3.5. *Si E est un sous-ensemble de Borel de $\mathbb{T}$, alors $C_{k,2}(E) = c_{k,2}(E)^2$.*

Démonstration. Montrons d'abord le résultat pour E compact. Posons $X := \{f \in L^2_+(\mathbb{T}) : \|f\|_2 \leq 1\}$ et $Y := \{\mu \in \mathcal{M}^+(E) : \mu(E) = 1\}$. Remarquons que X et Y sont convexes. En effet, pour $f, g \in X$ et $\mu, \nu \in Y$, il est clair par l'inégalité triangulaire que pour tout $t \in [0, 1]$, $(1 - t)f + tg \in X$ et $(1 - t)\mu + t\nu \in Y$. Aussi, Y est faiblement*-compact. Posons maintenant $\Phi : X \times X \to \mathbb{R}^+$ l'application définie par

$$\Phi(f, \mu) := \int_{\mathbb{T}} (k * f)(\zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Par ces remarques, on peut appliquer le principe du minimax de von Neumann pour obtenir que

$$\inf_{\mu\in Y} \sup_{f\in X} \Phi(f, \mu) = \sup_{f\in X} \inf_{\mu\in Y} \Phi(f, \mu). \tag{3.2}$$

Évaluons d'abord le membre de gauche de cette équation. On a que

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in X} \Phi(f, \mu) &= \sup_{f\in X} \int_{\mathbb{T}} (k * f)(\zeta)\, d\mu(\zeta) \\
&= \sup_{f\in X} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\lambda}) f(\lambda) |d\lambda| \right) d\mu(\zeta) \\
&= \sup_{f\in X} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\lambda})\, d\mu(\zeta) \right) f(\lambda) |d\lambda| \\
&= \sup_{f\in X} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} (k * \mu)(\lambda) f(\lambda) |d\lambda| \\
&= \sup_{f\in X} \|k * \mu\|_2 \|f\|_2 \\
&= \|k * \mu\|_2.
\end{aligned}$$

Ainsi, par le théorème 3.2.3, on a

$$\inf_{\mu\in Y}\sup_{f\in X}\Phi(f,\mu)=\inf_{\mu\in Y}\|k*\mu\|_2=\frac{1}{c_{k,2}(E)}.$$

Évaluons maintenant le côté droit de (3.2). On a d'abord

$$\inf_{\mu\in Y}\int k*f\,d\mu=\inf_{\substack{\mu\in\mathcal{M}^+(E)\\ \mu(E)=1}}\int k*f\,d\mu=\inf_{\zeta\in E}(k*\mu)(\zeta).$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned}\sup_{f\in X}\inf_{\mu\in Y}\Phi(f,\mu)&=\sup_{f\in X}\inf_{\zeta\in E}(k*f)(\zeta)\\&=\sup_{f\in L^2_+(\mathbb{T})}\frac{\inf_{\zeta\in E}(k*f)(\zeta)}{\|f\|_2}\\&=\left(\inf_{f\in L^2_+(\mathbb{T})}\frac{\|f\|_2}{\inf_{\zeta\in E}(k*f)(\zeta)}\right)^{-1}\\&=\Big(\inf\{\|f\|_2:f\in L^2_+(\mathbb{T}),k*f\geq 1\text{ sur }E\}\Big)^{-1}\\&=\frac{1}{C_{k,2}(E)^{1/2}}.\end{aligned}$$

En comparant les égalités relatives aux membres de gauche et de droite de (3.2), on trouve que pour E compact, on a $C_{k,2}(E)=c_{k,2}(E)^2$. Pour conclure, si E est un sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}$, alors 3.1.12 et 3.2.2 (iv) impliquent que

$$C_{k,2}(E)=\sup_{\substack{K\subset E\\ K\text{ compact}}}C_{k,2}(K)=\sup_{\substack{K\subset E\\ K\text{ compact}}}c_{k,2}(K)^2=c_{k,2}(E)^2.$$

□

3.4 Capacité classique via la convolution

Au chapitre 2, nous avons discuté de la capacité classique sur un espace métrique compact et plus particulièrement dans la section 4 du cas où $X:=\mathbb{T}$. Dans cette section, nous présentons la capacité sous l'angle de la convolution. Cette façon de présenter les choses présentera une famille un peu différente de capacités dites "classiques" comparativement à la définition originale.
Considérons donc $k:\mathbb{T}\to(0,\infty]$ un noyau tel que

- $k\in L^1(\mathbb{T})$;

- $k(\zeta) = k(\bar{\zeta})$;
- l'application $\theta \mapsto k(e^{i\theta})$ est finie et convexe sur $(0, 2\pi)$.

Nous nous intéressons encore une fois au *n*oyau de Riesz-Bessel $k_\alpha := \frac{1}{|1-\zeta|^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$ et au *n*oyau logarithmique $k_0(\zeta) := \log\left(\frac{2}{|1-\zeta|}\right)$. Pour $0 < \delta < \pi$, on définira k_δ sur $[0, 2\pi)$ comme étant le plus petit noyau en chaque point convexe tel que $k_\delta(e^{i\theta}) = k(e^{i\theta})$ pour $\theta \in [\delta, 2\pi - \delta]$. En particulier, comme k est un noyau, il suit que $k_\delta(e^{i\theta}) \leq k(e^{i\theta})$ pour $\theta \in [0, \delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi)$. De plus, comme k_δ est convexe, il suit que k_δ est une fonction affine sur $[0, \delta]$ et que la pente de cette droite est égale à la dérivée à droite de $k(e^{i\delta})$. Remarquons finalement que pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$, $k_\delta(\zeta) \to k(\zeta)$ quand $\delta \to 0$. Nous sommes maintenant en mesure de commencer.

Définition 3.4.1. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$. Le *p*otentiel de μ par rapport à k est la fonction

$$p_{k,\mu}(\zeta) := (k * \mu)(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\lambda})\, d\mu(\lambda) \qquad (\zeta \in \mathbb{T}).$$

Le potentiel satisfait en quelque sorte un principe du maximum.

Théorème 3.4.2. *Le potentiel $p_{k,\mu}$ est semi-continu inférieurement sur $\mathbb{T}$ et satisfait*

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} p_{k,\mu}(\zeta) = \sup_{\zeta \in \mathrm{supp}\mu} p_{k,\mu}(\zeta). \tag{3.3}$$

Démonstration. Soit $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{T}$ telle que $\zeta_n \to \zeta_0 \in \mathbb{T}$ quand $n \to \infty$. Par le lemme de Fatou, on a

$$\liminf_{n\to\infty} p_{k,\mu}(\zeta_n) \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta_n\bar{\lambda})\, d\mu(\lambda) \geq \int_{\mathbb{T}} k(\zeta_0\bar{\lambda})\, d\mu(\lambda) = p_{k,\mu}(\zeta_0),$$

donc le potentiel $p_{k,\mu}$ est semi-continu inférieurement sur $\mathbb{T}$. Pour montrer que

$$\sup_{\zeta \in \mathbb{T}} p_{k,\mu}(\zeta) = \sup_{\zeta \in \mathrm{supp}\mu} p_{k,\mu}(\zeta),$$

il suffit de montrer que pour chaque $\zeta_0 \in \mathbb{T}$, on a $p_{k,\mu}(\zeta_0) \leq \sup\limits_{\zeta \in \mathrm{supp}\mu} p_{k,\mu}(\zeta)$. Soit maintenant $\delta > 0$ et k_δ tel que définie plus haut. Soit aussi $\zeta_0 \in \mathbb{T} \setminus \mathrm{supp}\mu$ et $I = (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ l'arc de $\mathbb{T} \setminus \mathrm{supp}\mu$ contenant ζ_0. Pour chaque $e^{i\theta} \in \mathrm{supp}\mu$, l'application $t \mapsto k_\delta(e^{i(t-\theta)})$ est convexe sur $[\alpha, \beta]$ et donc de même pour $t \mapsto p_{k_\delta,\mu}(e^{it})$. Puisque une fonction convexe sur un interval fermé atteint son maximum à au moins une des extrémités de l'interval, il suit que

$$p_{k_\delta,\mu}(\zeta_0) \leq \sup_{\zeta \in \mathrm{supp}\mu} p_{k_\delta,\mu}(\zeta) \leq \sup_{\zeta \in \mathrm{supp}\mu} p_{k,\mu}(\zeta).$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, on obtient $p_{k,\mu}(\zeta_0) \leq \sup_{\zeta \in \mathrm{supp}\mu} p_{k,\mu}(\zeta)$, ce qui démontre le résultat. $\square$

Nous définissons maintenant la capacité au sens de de La Vallée Poussin.

Définition 3.4.3. Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble borélien. La *capacité* de E par rapport à k est définie par

$$C_k(E) := \sup\{\mu(E) : \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T}), \mu \text{ est supportée sur } E,\, p_{k,\mu} \leq 1 \text{ sur } E\}.$$

Encore une fois, on dira qu'une propriété tient C_k*-quasi-partout* sur E si elle tient partout sur E sauf sur un ensemble borélien de C_k-capacité nulle.

La définition, bien qu'elle semble loin de ce que nous avons fait pour la capacité classique sur un compact quelconque, est en fait seulement un point de vue différent du même objet. Un corollaire du théorème de Frostman viendra clarifier la situation et harmoniser notre conception de la capacité via ce qu'on définira comme l'énergie. Voici maintenant quelques résultats élémentaires sur ces capacités.

Théorème 3.4.4. *(i) Si $E \subset F$, alors $C_k(E) \leq C_k(F)$.*

(ii) $C_k(\emptyset) = 0$ et $C_k(\mathbb{T}) \leq \frac{1}{\|k\|_1}$.

(iii) C_k est une capacité intérieurement régulière.

(iv) Si $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite de sous-ensembles boréliens de $\mathbb{T}$, alors $C_K(\cup_{n\geq 1} E_n) \leq \sum_{n\geq 1} C_k(E_n)$.

Démonstration. (i) Ce résultat est trivial.
(ii) Il est clair que $C_k(\emptyset) = 0$. Aussi, si $p_{k,\mu} \leq 1$ sur $\mathbb{T}$, alors $\|p_{k,\mu}\|_1 \leq 1$. Comme

$$\|p_{k,\mu}\|_1 = \|k * \mu\|_1 = \|k\|_1 \mu(\mathbb{T}),$$

on conlut que $\mu(\mathbb{T}) \leq \frac{1}{\|k\|_1}$ et $C_k(\mathbb{T}) \leq \frac{1}{\|k\|_1}$.
(iii) Il est clair par définition que

$$C_k(E) = \sup_{\substack{K \subset E \\ K \text{compact}}} C_k(K),$$

bref C_k est une capacité intérieure.
(iv) Posons $E := \cup_{n\geq 1} E_n$. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ une mesure supportée sur E telle que $p_{k,\mu} \leq 1$ sur E et fixons $\epsilon > 0$. Par régularité de la mesure, pour chaque n il existe un sous-ensemble compact K_n de E_n tel que $\mu(K_n) > \mu(E_n) - \frac{\epsilon}{2^n}$. Soit maintenant μ_n une mesure définie par $\mu_n(A) := \mu(A \cap K_n)$. On a que μ_n est supportée par E_n et que $p_{k,\mu_n} \leq p_{k,\mu} \leq 1$ sur E_n. Il suit donc que $\mu_n(K_n) \leq C_k(E_n)$ et donc

$$\mu(E) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(E_n) = \sum_{n\geq 1} (\mu(K_n) + \epsilon 2^{-n}) = \sum_{n\geq 1} \mu_n(K_n) + \epsilon \leq \sum_{n\geq 1} C_k(E_n) + \epsilon.$$

Comme ϵ était arbitraire, on a que $\mu(E) \leq \sum_{n\geq 1} C_k(E_n)$. Comme ceci tient pour chaque $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ supportée sur E où $p_{k,\mu} \leq 1$ sur E, le résultat suit. $\square$

Nous sommes maintenant près à définir la k-énergie de μ. La définition sera analogue à celle donnée au chapitre 2, mais son lien avec la capacité définie au sens de la Vallée Poussin semblera beaucoup moins clair. Un peu plus loin dans cette section, nous serons cependant en mesure d'établir le même lien entre énergie et capacité que celui défini au chapitre 2.

Définition 3.4.5. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$. La k- ´energie de μ est définie par

$$I_k(\mu) := \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\lambda})\, d\mu(\lambda) d\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} p_{k,\mu}\, d\mu.$$

L' ´energie d'un sous-ensemble borélien $E \subset \mathbb{T}$ est quant à elle définie par

$$I_k(E) := \inf\{I_k(\mu) : \mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T}), \mu \text{ est supportée par } E, \mu(E) = 1\}.$$

Il est possible que la k-énergie de μ sur $\mathbb{T}$ soit infinie, comme c'est le cas si $k(1) = \infty$ et μ est une mesure de Dirac concentrée au point 1. De plus, il est possible que l'énergie de E soit infinie, par exemple si E est un singleton et $k(1) = \infty$.

Comme nous travaillons avec les produits de convolutions, il paraît naturel d'étudier l'énergie via les coefficients de Fourier de k et de μ. Le prochain théorème fait ce lien.

Théorème 3.4.6. *(i)* $\hat{k}(n) = \hat{k}(-n) \geq 0$ *pour chaque* $n \geq 0$.

(ii) Si $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$, *alors*

$$I_k(\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k}(n)|\hat{\mu}(n)|^2 = \hat{k}(0)|\hat{\mu}(0)|^2 + 2\sum_{n\geq 1} \hat{k}(n)|\hat{\mu}(n)|^2. \tag{3.4}$$

Démonstration. Écrivons $k(\theta)$ pour $k(e^{i\theta})$. Remarquons que pour $k \in L^1(\mathbb{T})$ quelconque et $n \geq 1$, on a

$$i(\hat{k}(n) - \hat{k}(-n)) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(t)(e^{-int} - e^{int})\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k(t) \sin(nt)\, dt.$$

Comme ici k est un noyau, k est en particulier pair. Ainsi, la fonction $k(t)\sin(nt)$ est impaire et de période de 2π, donc $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k(t)\sin(nt)\, dt = 0$, ce qui donne que $\hat{k}(n) = \hat{k}(-n)$.

Il faut maintenant montrer que tous les coefficients de Fourier sont positifs. Supposons d'abord que k est continu et fini. Comme k est positif, on a $\hat{k}(0) \geq 0$. Soit $n \geq 1$. Rappelons que k est une fonction paire. Comme $\hat{k}(n) = \hat{k}(-n)$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{k}(n) &= \frac{\hat{k}(n) + \hat{k}(-n)}{2} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(t) \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k(t) \cos(nt)\, dt \\
&= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} k'(t) \sin(nt)\, dt \\
&= -\frac{1}{2\pi n} \sum_{j=0}^{2n-1} \int_{j\pi/n}^{(j+1)\pi/n} k'(t) \sin(nt)\, dt \\
&= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{\pi/n} \left(\sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j k'(t + j\pi/n) \right) \sin(nt)\, dt.
\end{aligned}$$

Comme k est convexe sur $[0, 2\pi]$ par définition, il suit que $k'(t)$ est croissante et donc la somme dans la formule précédente est négative. Ainsi, $\hat{k}(n) \geq 0$. Pour le cas général, il suffit de remarquer que par le théorème de convergence dominée, on a $\hat{k}_\delta(n) \to \hat{k}(n)$ quand $\delta \to 0$.

(ii) Supposons d'abord que k est $\mathcal{C}^1$ par morceaux autour de 0. Dans cette situation, le noyau k est égal à sa série de Fourier autour de 0. En particulier, on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{k}(n)| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k}(n) k_\delta(0) < \infty$, donc la série de Fourier est absolument convergente. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_k(\mu) &= \iint k(s-t)\, d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \iint \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k}(n) e^{in(s-t)}\, d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k}(n) |\hat{\mu}(n)|^2.
\end{aligned}$$

Pour k quelconque, considérons k_δ. Puisque k_δ est linéaire par morceaux proche de 0, on peut appliquer le résultat précédent et obtenir

$$I_{k_\delta}(\mu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k_\delta}(n) |\hat{\mu}(n)|^2. \tag{3.5}$$

Lorsque δ décroît vers 0, k_δ croît en chaque point vers k, donc $I_{k_\delta}(\mu) \to I_k(\mu)$. De plus, si $\delta_1 < \delta_2$, alors $k_{\delta_1} - k_{\delta_2}$ est aussi un noyau, donc $\widehat{k_{\delta_1} - k_{\delta_2}} \geq 0$ pour chaque n. Ainsi, lorsque δ tend vers 0, $\widehat{k_\delta}$ croît vers $\hat{k}(n)$. Il suffit donc de laisser tendre $\delta \to 0$ dans (3.5) pour obtenir (3.4). $\square$

Nous montrerons maintenant que, comme dans le cas de l'énergie classique, l'infimum dans la définition d'énergie d'un borélien E est toujours atteint par une mesure si E est un compact. De plus, sous certaines hypothèses, cette mesure est unique.

Théorème 3.4.7. *Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble compact. Alors, il existe une mesure $\mu_e \in \mathcal{M}^+(E)$ telle que $\mu_e(E) = 1$ et $I_k(\mu_e) = I_k(E)$. De plus, si $I_k(E) < \infty$ et $\hat{k}(n) > 0$ pour chaque $n \geq 1$, alors μ_e est unique.*

Une telle mesure μ_e se nomme encore une fois une *m*esure d'équilibre pour E. Avant de montrer le théorème, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 3.4.8. *Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ qui converge faiblement* vers une mesure μ. Alors, $\liminf_{n\to\infty} I_k(\mu_n) \geq I_k(\mu)$.*

Démonstration. Pour chaque $\delta > 0$, la fonction $(\zeta, \lambda) \mapsto k_\delta(\zeta\bar{\lambda})$ est continue sur $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$. Ainsi, $I_{k_\delta}(\mu_n) \to I_{k_\delta}(\mu)$ quand $n \to \infty$. Comme $k \geq k_\delta$, il suit que $\liminf_{n\to\infty} I_k(\mu_n) \geq I_{k_\delta}(\mu)$. Finalement, comme $I_{k_\delta}(\mu) \to I_k(\mu)$ quand $\delta \to 0$, le résultat suit. □

Démonstration du théorème 3.3.7. Commençons par l'existence. Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ telle que $\mu_n(E) = 1$ et $I_k(\mu_n) \to I_k(E)$. Par le théorème de Banach-Anaoglu, il existe une sous-suite $(\mu_{n_i})_i$ faiblement*-convergente vers une mesure $\mu_e \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$. Il est clair que $\mu_e(E) = 1$ et donc $I_k(\mu_e) \geq I_k(E)$. De plus, le lemme précédent montre qu'en fait $I_k(\mu_e) \leq I_k(E)$, bref μ_e est une mesure d'équilibre pour E.
Pour l'unicité, supposons que μ_e et ν_e soient deux mesures d'équilibre pour E. Pour chaque entier n, on a

$$|\widehat{\mu_e}(n) + \widehat{\nu_e}(n)|^2 + |\widehat{\mu_e}(n) - \widehat{\nu_e}(n)|^2 = 2|\widehat{\mu_e}(n)|^2 + 2|\widehat{\nu_e}(n)|^2.$$

En utilisant l'égalité précédente, il suit que

$$I_k(\mu_e + \nu_e) + I_k(\mu_e - \nu_e) = 2I_k(\mu_e) + 2I_k(\nu_e) = 4I_k(E). \tag{3.6}$$

Comme la mesure $\frac{\mu_e+\nu_e}{2}$ est aussi une mesure de probabilité supportée par E, il suit que son énergie est au moins $I_k(E)$ et donc $I_k(\mu_e + \nu_e) \geq 4I_k(E)$. Comme $I_k(E) < \infty$, il suit par (3.4) et (3.6) que

$$I_k(\mu_e - \nu_e) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k}(n)|\widehat{\mu_e}(n) - \widehat{\nu_e}(n)|^2 \leq 0.$$

Par hypothèse, $\hat{k}(n) > 0$ pour chaque $n \geq 1$ et $\hat{k}(n) = \hat{k}(-n)$. On a donc que $\hat{k}(n) > 0$ pour chaque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Par l'équation précédente, on trouve que $\widehat{\mu_e}(n) = \widehat{\nu_e}(n)$ pour chaque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Remarquons aussi que $\widehat{\mu_e}(0) = \widehat{\nu_e}(0) = 1$ puisque μ_e et ν_e sont des mesures de probabilités et donc $\widehat{\mu_e}(n) = \widehat{\nu_e}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On a donc bel et bien que $\mu_e = \nu_e$. $\square$

Tout comme pour la capacité classique définie sur un espace compact, il existe une version du théorème de Frostman pour la capacité classique définie via la convolution.

Théorème 3.4.9 (Frostman)**.** *Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble compact tel que $I_k(E) < \infty$ et soit μ_e sa mesure d'équilibre. Alors*

(i) $p_{k,\mu_e} \leq I_k(E)$ sur $\mathbb{T}$,

(ii) $p_{k,\mu_e} = I_k(E)$ ν-p.p. pour chaque mesure $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ telle que $I_k(\nu) < \infty$.

Démonstration. Montrons d'abord que si $\nu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$ et $I_k(\nu) < \infty$, alors $p_{k,\mu_e} \geq I_k(E)$ ν presque partout sur E. Supposons le contraire. Pour $\epsilon > 0$, posons

$$F_\epsilon := \{\zeta \in E : p_{k,\mu_e}(\zeta) \leq I_k(E) - \epsilon\}.$$

Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $\nu(F_\epsilon) > 0$. Remarquons que F_ϵ est compact puisque le potentiel p_{k,μ_e} est semi-continu inférieurement. Soit maintenant σ la mesure définie par $\sigma(A) := \frac{\nu(A \cap F_\epsilon)}{\nu(F_\epsilon)}$. Par construction, σ est une mesure de probabilité supportée par F_ϵ. Pour $t \in (0,1)$, posons $\mu_t := (1-t)\mu_e + t\nu$. Remarquons que la mesure μ_t est une mesure de probabilité supportée par E. De plus, on a

$$\begin{aligned}
I_k(\mu_t) &= (1-t)^2 I_k(\mu_e) + t^2 I_k(\sigma) + 2t(t-t)\int p_{k,\mu_e}\, d\sigma \\
&\leq (1-t)^2 I_k(\mu_e) + t^2 I_k(\sigma) + 2t(1-t)(I_k(E) - \epsilon) \\
&= I_k(E) - 2t\epsilon + O(t^2) \qquad (t \to 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, si $t > 0$ est suffisamment petit, alors $I_k(\mu_t) < I_k(E)$, ce qui est absurde. Il suit que $p_{k,\mu_e} \geq I_k(E)$ ν-presque partout sur E.
Il suffit maintenant de montrer (i) pour montrer le théorème. Soit $\epsilon > 0$. Posons

$$G_\epsilon := \{\zeta \in \mathrm{supp}\mu_e : p_{k,\mu_e}(\zeta) > I_k(E) + \epsilon\}.$$

Par ce qu'on a déjà montré, $p_{k,\mu_e} \geq I_k(E)$ μ_e-presque partout sur E. Ainsi,

$$I_k(E) = \int p_{k,\mu_e}\, d\mu_e \geq (I_k(E) + \epsilon)\mu_e(G_\epsilon) + I_k(E)\mu_e(E \setminus G_\epsilon) = I_k(E) + \epsilon\mu_e(G_\epsilon)$$

On a donc que $\mu_e(G_\epsilon) = 0$. De plus, on a que G_ϵ est ouvert dans $\mathrm{supp}\mu_e$ car le potentiel p_{k,μ_e} est semi-continu inférieurement. Par la définition de support, il suit que $G_\epsilon = \emptyset$. Comme ϵ était quelconque, il suit que $p_{k,\mu_e} \leq I_k(E)$ sur $\mathrm{supp}\mu_e$. Finalement, par le principe du maximum (théorème 3.3.2), il suit que $p_{k,\mu_e} \leq I_k(E)$ partout sur $\mathbb{T}$. $\square$

Nous sommes maintenant près à établir le lien entre capacité et énergie d'un ensemble.

Corollaire 3.4.10. *Si E est un sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}$, alors*

$$C_k(E) = \frac{1}{I_k(E)}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer le résultat pour E compact : le cas pour E borélien en découle directement. Montrons d'abord que $C_k(E) \geq \frac{1}{I_k(E)}$ et supposons que $I_k(E) < \infty$. Soit μ_e une mesure d'équilibre pour E et posons $\nu := \frac{\mu_e}{I_k(\mu_e)}$. Par le théorème de Frostman, $p_\nu \leq 1$ sur $\mathbb{T}$. Ainsi, $C_k(E) \geq \frac{\mu_e}{I_k(\mu_e)} = \frac{1}{I_k(E)}$.
Montrons maintenant l'inégalité inverse. Soit $\mu \in \mathcal{M}^+$ telle que $p_{k,\mu} \leq 1$ sur E. On a alors $I_k(\mu) = \int p_{k,\mu}\, d\mu \leq \mu(E)$. Posons $\nu := \frac{\mu}{\mu(E)}$. La mesure ν est une mesure de probabilité sur E, donc $I_k(E) \leq I_k(\nu) = \frac{I_k(\mu)}{\mu(E)^2}$. On a donc que $\mu(E) \leq \frac{1}{I_k(E)}$. Comme ceci tient pour chaque telle μ, il suit que $C_k(E) \leq \frac{1}{I_k(E)}$. $\square$

Pour terminer cette section, nous établissons des conditions sur les coefficients de Fourier des noyaux pour que la L^2-capacité soit égale à la capacité classique sur chaque sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}$.

Théorème 3.4.11. *(i) Si $\hat{k}(n) \leq |\hat{l}(n)|^2$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, alors, pour chaque sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}$, on a*

$$C_k(E) \geq C_{l,2}(E).$$

(ii) Si $\hat{k}(n) \geq |\hat{l}(n)|^2$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, alors, pour chaque sous-ensemble borélien de $\mathbb{T}$, on a

$$C_k(E) \leq C_{l,2}(E).$$

Démonstration. Comme les Boréliens sont L^2-capacitables et que le théorème 3.3.4 (iii) stipule que la capacité classique est intérieure, il suffit de traiter le cas où E est compact. Par le corollaire 3.3.10 et le théorème 3.3.7, on a

$$\begin{aligned} C_k(E)^{-1} &= \inf\{I_k(\mu) : \mu \in \mathcal{M}^+(E), \mu(E) = 1\} \\ &= \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{k}(n)|\hat{\mu}|^2 : \mu \in \mathcal{M}^+(E), \mu(E) = 1\right\}. \end{aligned}$$

De plus, par le théorème 3.2.5, le théorème 3.2.3 et le théorème de Parseval, on a

$$\begin{aligned}
C_{l,2}(E)^{-1} &= c_{l,2}(E)^{-2} \\
&= \inf\{\|l * \mu\|_2^2 : \mu \in \mathcal{M}^+(E), \mu(E) = 1\} \\
&= \inf\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{l}(n)|^2|\hat{\mu}|^2 : \mu \in \mathcal{M}^+(E), \mu(E) = 1\right\}.
\end{aligned}$$

Les deux énoncés du théorème suivent immédiatement des deux formules précédentes.

□

De ce théorème, on peut déduire que dans le cas du noyau de Riesz, la capacité classique C_{k_α} est controlée par la L^2-capacité $C_{\frac{\alpha+1}{2}}$ pour tous les sous-ensemble boréliens de $\mathbb{T}$. Ce résultat s'avère important en pratique, mais avant de le déduire, montrons d'abord un lemme.

Lemme 3.4.12. *Soit $0 < \alpha \leq 1$. Alors $|\hat{k}_\alpha(n)| \asymp \frac{1}{1+|n|^{1+\alpha}}$ pour chaque $n \in \mathbb{Z}$. De plus, les constantes impliquées ne dépendent que de α.*

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $\alpha = 0$. Remarquons qu'on a $k_0(\zeta) = \Re \log(2/(1-\zeta))$ et que la fonction

$$\log\frac{2}{1-z} = \log 2 + \sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$$

appartient à $H^2(\mathbb{D})$. Ainsi, on a que $\hat{k}_0(z) = \frac{1}{2|n|}$ pour chaque $n \neq 0$ et $\hat{k}(0) = \log 2 > 0$. En particulier, il suit que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, on a $|\hat{k}_0(n)| \asymp \frac{1}{1+|n|}$. Supposons maintenant que $0 < \alpha < 1$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, comme k_α est un noyau, on a

$$\hat{k}_\alpha(n) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{(2\sin(t/2))^\alpha}\,dt > 0.$$

De plus, comme $(2\sin(t/2))^{-\alpha} - t^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, le comportement de $\hat{k}_\alpha(\pm n)$ quand $n \to \infty$ est donné par

$$\begin{aligned}
\hat{k}_\alpha(\pm n) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos nt}{t^\alpha}\,dt + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi n^{1-\alpha}}\int_0^{n\pi} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{\pi n^{1-\alpha}}\int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{M_\alpha}{n^{1-\alpha}} + O\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

où $M_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du > 0$ pour chaque $\alpha \in (0,1)$. Il suit donc que $|\hat{k}_\alpha(n)| \asymp \frac{1}{1+|n|}^{1-\alpha}$.

□

En écrivant C_α et $C_{\alpha,2}$ au lieu de C_{k_α} et $C_{k_\alpha,2}$, le théorème et le lemme précédent nous donnent le corollaire suivant.

Corollaire 3.4.13. *Soit* $0 \leq \alpha < 1$. *Alors, pour chaque sous-ensemble borélien* E *de* $\mathbb{T}$*, on a*

$$C_\alpha(E) \asymp C_{\frac{\alpha+1}{2},2}(E),$$

où les constantes impliquées ne dépendent que de α.

3.5 Capacité des ensembles de Cantor généralisés sur $\mathbb{T}$

Nous présentons ici une généralisation de l'ensemble de Cantor classique sur $\mathbb{T}$. Soit $\mathbf{s} := (s_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $[0, 2\pi]$ strictement décroissante telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n s_{n+1} \leq 2\pi.$$

Enlevons l'interval ouvert de longueur s_1 positionné au milieu de l'intervalle $[0, 2\pi]$. Dénotons par $C_1(\mathbf{s})$ l'union des deux intervalles fermés résultants. On a donc ici $C_1(\mathbf{s}) = [0, \pi - \frac{s_1}{2}] \cup [\pi + \frac{s_1}{2}]$. On dénote maintenant par ℓ_1 la longueur d'un des intervalles restants. On a donc

$$2\ell_1 + s_1 = 2\pi.$$

Nous recommençons le processus en enlevant un intervalle ouvert de longueur s_2 du milieu de chacun des deux intervalles de $C_1(\mathbf{s})$. On note par $C_2(\mathbf{s})$ la réunion des quatre intervalles fermés restant et ℓ_2 la longueur d'un de ces intervalles. On a donc

$$2\ell_2 + s_2 = \ell_1.$$

En continuant ce procédé, on obtient un ensemble compact $C_n(\mathbf{s})$ qui est l'union des 2^n intervalles fermés ainsi générés, chacun de longueur ℓ_n. On obtient la relation

$$2\ell_n + s_n = \ell_{n-1}.$$

Posons $C(\mathbf{s}) := \{e^{it} \in \mathbb{T} : t \in \bigcap_{n\geq 1} C_n(\mathbf{s})\}$.

Nous nommons $C(\mathbf{s})$ l'*ensemble de Cantor généralisé généré par* $\mathbf{s}$. Remarquons qu'avec le choix $s_n = \frac{2\pi}{3^n}$, on retombe sur l'ensemble de Cantor triadique sur $\mathbb{T}$. On remarque aussi que ces ensembles sont nulle part denses et possèdent une mesure de Lebesgue égale à

$$|C(\mathbf{s})| = \lim_{n\to\infty} 2^n \ell_n = 2\pi - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n s_{n+1}.$$

Ainsi, avec un choix judicieux de s_n, on peut ajuster la mesure de $C(\mathbf{s})$ pour obtenir n'importe quel nombre compris dans l'intervalle $[0, 2\pi)$. Par exemple, le choix classique nous donne $|C(\mathbf{s})| = 0$.
Nous investiguons maintenant la L^2-capacité des ensembles de Cantor généralisés.

Théorème 3.5.1. *Soit $\alpha < 1$ et $C(\mathbf{s})$ un ensemble de Cantor généralisé généré par $\mathbf{s}$. S'il existe une suite de nombres positifs $(a_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n^2 \ell_n \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] < \infty, \tag{3.7}$$

mais

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ell_n^{1-\alpha} \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] = \infty, \tag{3.8}$$

alors $C_{\alpha,2}(C(\mathbf{s})) = 0$.

Démonstration. Posons $E_n := C_n(\mathbf{s})$ et rappelons que $E_n \setminus E_{n+1}$ consiste en 2^n intervalles ouverts de longueur $\ell_n - 2\ell_{n+1}$. Considérons maintenant la fonction f définie par

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n \setminus E_{n+1}},$$

où χ_A représente la fonction caractéristique de A. Par (3.7), on a

$$\int_{\mathbb{T}} f^2(\zeta)|d\zeta| = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n\setminus E_{n+1}} a_n^2\, |d\zeta| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n {a_n}^2 \ell_n \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] < \infty.$$

Ainsi, $f \in L^2_+(\mathbb{T})$. Pour montrer que $C_{\alpha,2}(C(\mathbf{s})) = 0$, il suffit de montrer que $k_\alpha * f = \infty$ sur $C(\mathbf{s})$. Soit donc $\zeta \in C(\mathbf{s})$ quelconque. Pour chaque n, ζ appartient à un et un seul sous-intervalle de $C_n(\mathbf{s})$, disons L_n. Notons par le fait même que $|L_n| = \ell_n$ et posons $I_n := L_n \setminus E_{n+1}$. Pour $\xi \in I_n$, on a

$$|\zeta - \xi| \leq |I_n| = s_{n+1} = \ell_n - 2\ell_{n+1} \leq \ell_n.$$

Ainsi, par (3.8), on trouve que

$$\begin{aligned}(k_\alpha * f)(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\xi)}{|1-\zeta\bar{\xi}|^\alpha}\,|d\xi| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{E_n\setminus E_{n+1}} \frac{|d\xi|}{|1-\zeta\bar{\xi}|^\alpha} \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{I_n} \frac{|d\xi|}{|\xi-\zeta|^\alpha} \\ &\gtrsim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ell_n^\alpha} \int_{I_n} |d\xi| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ell^\alpha}(\ell_n - 2\ell_{n+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ell_n^{1-\alpha}\left[1 - 2\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] = \infty,\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration. □

On peut remarquer que $\ell_n\left[1-\frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] = s_{n+1}$, donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n {a_n}^2 \ell_n \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n {a_n}^2 s_{n+1}.$$

De plus, par construction, on a toujours que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n s_{n+1} \leq 2\pi.$$

Ainsi, par le critère de convergence de Dirichlet, un critère suffisant pour la convergence de la série (3.7) est que la suite (a_n^2) soit décroissante à partir d'un certain rang et qu'elle tende vers 0.

De même, si $\frac{a_n}{2^n \ell_n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 ou n'est jamais décroissante à partir d'un certain rang, alors on s'assure de la validité du critère (3.7).

Avec des choix judicieux de a_n, on tire de ce théorème deux corollaires intéressants.

Corollaire 3.5.2. *Soit $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ et $C(\mathbf{s})$ un ensemble de Cantor généralisé tel que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} < \frac{1}{2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \ell^{2\alpha-1}}{n^2} < \infty.$$

Alors, on a $C_{\alpha,2}(C(\mathbf{s})) = 0$.

Démonstration. Posons $b_n := \inf_{j>n} \frac{\ell_{j+1}}{\ell_j}$ et $c_n := \sup_{j>n} \frac{\ell_{j+1}}{\ell_j}$. Par hypothèse, comme b_n est croissante et c_n décroissante et que les deux sont bornées, elles convergent respectivement vers $b < c < 1/2$. Ainsi, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on a $b_n < c_n < \frac{1}{2}$. En particulier, pour tout $j > N$, on a $1 - 2c_N \geq 1 - \frac{2\ell_{j+1}}{\ell_j} \geq 1 - 2b_N > 0$.

Aussi, par le théorème précédent, il suffit pour démontrer ce résultat de trouver une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ respectant (3.7) et (3.8). Prenons $a_n := (n\ell_n^{1-\alpha})^{-1}$.

En remplaçant ce choix dans (3.7) et ne considérant la série qu'à partir du rang N, on obtient grâce aux hypothèses que

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} 2^n a_n^2 \ell_n \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] &= \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2^n \ell_n^{\alpha-1}}{n^2} \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] \\ &\leq (1-2c) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{2^n \ell_n^{2\alpha-1}}{n^2} < \infty.\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=N}^{\infty} a_n \ell_n^{1-\alpha} \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] &= \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} \left[1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n}\right] \\ &\geq (1-2b) \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,\end{aligned}$$

ce qui démontre le résultat. □

Pour terminer notre investigation de la L^2-capacité des ensembles de Cantor généralisés, nous présentons un autre corollaire dans la même veine que le précédent.

Corollaire 3.5.3. *Soit* $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ *et* $C(\mathbf{s})$ *un ensemble de Cantor généralisé tel que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} < \frac{1}{2}$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{2^{n/2} n} < \infty.$$

Alors, on a $C_{\alpha,2}(C(\mathbf{s})) = 0$.

Démonstration. La démonstration est similaire à la précédente, mais en utilisant cette fois $a_n^2 := \left[n^2 2^n \ell_n (1 - \frac{2\ell_{n+1}}{\ell_n})\right]^{-1}$. □

Nous présentons maintenant la capacité classique des ensembles de Cantor généralisés. Pour k un noyau, définissons $\tilde{k} : [0,1] \to (0,\infty]$ par

$$\tilde{k}(|1-\zeta|/2) = k(\zeta) \qquad (\zeta \in \mathbb{T}).$$

Comme k est convexe, on déduit que $\tilde{k}$ est décroissant sur $[0,1]$. Les noyaux logarithmiques et de Riesz-Bessel nous donne respectivement $\tilde{k}_0(r) = \log\frac{1}{r}$ et $\tilde{k}_\alpha(r) = \frac{1}{r^\alpha}$ pour $0 < \alpha < 1$. À l'aide de techniques standards en théorie de la mesure, on voit que

$$\int_{\mathbb{T}} k(\zeta\bar{\xi})\, d\mu(\xi) = \int_0^1 \bar{k}(r)\, du_\zeta(r), \tag{3.9}$$

où

$$u_\zeta(r) = \mu(\{\xi \in \mathbb{T} : |1-\zeta\bar{\xi}| \leq r\}) \qquad (\zeta \in \mathbb{T}, 0 \leq r \leq 2). \tag{3.10}$$

Si $N(r)$ est une fonction décroissante réelle telle que $N(2r) \asymp N(r)$, alors l'encadrement

$$\frac{\tilde{k}(2^{-n}) - \tilde{k}(2^{-n-1})}{N(2^{-n-1})} \leq \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \frac{\tilde{k}'(r)}{N(r)}\, dr \leq \frac{\tilde{k}(2^{-n}) - \tilde{k}(2^{-n-1})}{N(2^{-n})}$$

nous donne que

$$\int_0^1 \frac{\tilde{k}'(r)}{N(r)}\, dr > -\infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(2^{-n-1}) - \tilde{k}(2^{-n-1})}{N(2^{-n})}. \tag{3.11}$$

Une fonction $N(r)$ spéciale attirera notre attention. Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{T}$. Nous noterons maintant par $N(r)$ le plus petit nombre d'intervalles ouverts de longueur r qui recouvrent E.

Lemme 3.5.4. *Soit μ une mesure de probabilité sur E et $u_r(\zeta)$ tel que définit par (3.10). Alors*

$$\int u_\zeta(2^{-n})\, d\mu(\zeta) \geq \frac{1}{N(2^{-n-1})}.$$

Démonstration. Recouvrons E par $N(2^{-n})$ intervalles fermés de longueur 2^{-n} qu'on notera respectivement par $I_1^{(n)}, \cdots, I_{N(2^{-n})}^{(n)}$. Notons qu'un intervalle ouvert I peut être recouvert par au moins 3 intervalles de longueur $|I|/2$. Ainsi, si $\zeta \in E \cap I_k^{(n)}$, alors ζ

peut se situer au maximum dans 2 intervalles $I_k^{(n+1)}$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
N(2^{-n-1})\int u_\zeta(2^{-n})\,d\mu(\zeta) &= N(2^{-n-1})\sum_{k=1}^{N(2^{-n})}\int_{I_k^{(n)}} u_\zeta(2^{-n})\,d\mu(\zeta)\\
&\geq \frac{N(2^{-n-1})}{2}\sum_{k=1}^{N(2^{-n-1})}\int_{I_k^{(n+1)}} u_\zeta(2^{-n})\,d\mu(\zeta)\\
&\geq N(2^{-n-1})\sum_{k=1}^{N(2^{-n-1})}\mu\left(I_k^{(n+1)}\right)^2\\
&\geq \left(\sum_{k=1}^{N(2^{-n-1})}\mu\left(I_k^{(n+1)}\right)\right)^2 \qquad \text{(par Cauchy-Schwarz)}\\
&\geq \mu(E)=1,
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. □

Théorème 3.5.5. *Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{T}$. Si*

$$\int_0^1 \frac{\tilde{k}'(r)}{N(r)}\,dr = -\infty,$$

alors $C_k(E)=0$.

Démonstration. Supposons que $C_k(E)>0$. Il existe donc une mesure de probabilité sur E ayant une énergie finie. Définissons $u_\zeta(r)$ comme en (3.10). Par (3.9), on obtient que

$$I_k(\mu)=\int d\mu(\zeta)\int k(\zeta\bar{\xi})\,d\mu(\xi)=\int d\mu(\zeta)\int_0^1 \tilde{k}(r)\,du_\zeta(r).$$

En intégrant par partie, on trouve que

$$\int_0^2 \tilde{k}(r)du_\zeta(r)=\Big[u_\zeta(r)\tilde{k}(r)\Big]_0^2-\int_0^2 u_\zeta(r)\tilde{k}'(r)\,dr.$$

De plus, sur l'intervalle $0<r<2$, on a que $\tilde{k}$ décroît et

$$u_\zeta(r)\tilde{k}(r)\leq\int_0^r k(t)du_\zeta(t)\leq\int_{|1-\zeta\bar{\xi}|\leq r}k(\zeta\bar{\xi})d\mu(\xi)\to 0 \qquad (r\to 0).$$

Ainsi, comme $\int d\mu(\zeta)=1$, on a

$$\begin{aligned}
I_k(\mu) &\geq -\int d\mu(\zeta)\int_0^2 u_\zeta(r)\tilde{k}'(r)\,dr\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}\tilde{k}'(r)\,dr\int u_\zeta(2^{-n})\,d\mu(\zeta)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\tilde{k}(2^{-n-1})-\tilde{k}(2^{-n}))\int u_\zeta(2^{-n})\,d\mu(\zeta)\\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{k}(2^{-n-1})-\tilde{k}(2^{-n})}{N(2^{-n})}, \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant vérifiée selon le lemme 3.5.4. Le résultat suit maintenant de (3.11). □

Remarquons que si $C_k(E) > 0$, alors par (3.11) et (3.12) il existe une constante $c > 0$ telle que

$$C_k(E)^{-1} \geq c \int_0^1 \frac{\tilde{k}'(r)}{N(r)}\, dr.$$

Nous terminons cette section en caractérisant les ensembles de Cantor généralisés de capacité classique nulle.

Théorème 3.5.6. *Soit $C(\mathbf{s})$ un ensemble de Cantor généralisé généré par $\mathbf{s}$. Alors $C_k(C(\mathbf{s})) = 0$ si et seulement si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{k}(\ell_n) = \infty. \tag{3.13}$$

Démonstration. Supposons d'abord que (3.13) tienne. On a que $N(\ell_n) = 2^n$ et

$$\begin{aligned}
-\int \frac{\tilde{k}'(r)}{N(r)}\, dr &= -\sum_0^{\infty} \int_{\ell_{n+1}}^{\ell_n} \frac{\tilde{k}'(r)}{N(r)}\, dr \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(\ell_{n+1}) - \tilde{k}(\ell_n)}{N(\ell_{n+1})} \\
&\geq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(\ell_{n+1}) - \tilde{k}(\ell_n)}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} \int_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(\ell_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(\ell_{n+1})}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(\ell_n)}{2^{n+1}} (2-1) - \frac{\tilde{k}(\ell_1)}{2} = \infty.
\end{aligned}$$

Le théorème 3.5.5 nous donne donc que $C_k(C(\mathbf{s})) = 0$.

Supposons maintenant que (3.13) ne tienne pas. Posons

$$d\mu_n := (2^n \ell_n)^{-1} \chi_{C_n(\mathbf{s})}(\zeta) |d\zeta|.$$

On trouve immédiatement que

$$\int k(\zeta\bar{\xi}) d\mu_n(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\ell_{m+1} \leq |1-\zeta\bar{\xi}| \leq \ell_m} k(\zeta\bar{\xi})\, d\mu_n(\xi). \tag{3.14}$$

Aussi, pour $j \geq n$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_{j+1} \leq |1-\zeta\bar{\xi}| \leq \ell_j} k(\zeta\bar{\xi})\, d\mu_n(\xi) &= \int_{(\ell_{j+1} \leq |1-\zeta\bar{\xi}| \leq \ell_j) \cap C_n} k(\zeta\bar{\xi}) \frac{|d\xi|}{2^n \ell_n} \\
&\leq \tilde{k}(\ell_{j+1}) \frac{\ell_j - \ell_{j+1}}{2^n \ell_n} \\
&\leq \tilde{k}(\ell_{j+1}) \frac{\ell_j}{2^n \ell_n} \\
&\leq \frac{\tilde{k}(\ell_{m+1})}{2^j}.
\end{aligned}$$

Notons que la dernière inégalité provient du fait que $\ell_j \geq 2\ell_{j+1}$ et donc $\ell_j \geq 2^{j-n}\ell_j$ pour chaque $j \geq n$. Traitons maintenant le cas où $0 \leq j \leq n-1$. Fixons $\zeta \in C_n$. Il est relativement facile de voir qu'il y a au plus $2 \times 2 + 1$ intervalles de C_n tels que la distance entre ζ et un de ces intervalles est plus petite ou égale à ℓ_{n-1}. En répétant cet argument, pour $1 \leq j \leq n$, il y a au plus $2^{j+1} + 1$ intervalles de C_n ayant une distance plus petite où égale à ℓ_{n-m} de ζ. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\ell_{j+1} \leq |1-\zeta\bar{\xi}| \leq \ell_j} k(\zeta\bar{\xi})\, d\mu_n(\xi) &= \frac{1}{2^n \ell_n} \int_{\ell_{j+1} \leq |1-\zeta\bar{\xi}| \leq \ell_j} k(\zeta\bar{\xi})\, |d\xi| \\
&\leq \frac{1}{2^n \ell_n} \tilde{k}(\ell_{j+1})(2 + 2^{n-j} + 1)\ell_n \\
&\leq \frac{4}{2^j} \tilde{k}(\ell_{m+1}).
\end{aligned}$$

Grâce à (3.14), (3.15) et (3.16), on obtient que

$$\int k(\zeta\bar{\xi})\, d\mu_n(\xi) \lesssim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}(\ell_{j+1})}{2^j} < \infty.$$

Notons que le membre de droite est indépendant de ζ et donc $I(\mu_n) < \infty$ pour chaque n. Aussi, par le théorème de Banach-Alaoglu, il existe une mesure μ telle que μ_n converge faiblement* vers un μ. Par le lemme 3.4.8, on a $I_k(\mu) \leq \liminf_{n\to\infty} I_k(\mu_n) < \infty$. Comme ceci tient pour une mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$, il suit que $C_k(C(\mathbf{s})) > 0$. $\square$

Chapitre 4

Comportement au bord dans l'espace de Dirichlet

4.1 Espace de Dirichlet classique

L'étude de la capacité dans les chapitres précédents avait principalement pour but de démontrer des résultats sur la limite radiale de fonctions dans l'espace de Dirichlet. C'est Beurling [7] en 1933 qui, dans sa thèse de doctorat, fut le premier à parler de l'espace de Dirichlet. Définissons donc cet espace.

Définition 4.1.1. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$. L'*i*ntégrale de Dirichlet de f est définie par

$$\mathcal{D}(f) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dA(z),$$

où dA est la mesure d'aire standard.
L'*e*space de Dirichlet $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel définie par

$$\mathcal{D} := \{f \text{ est holomorphe dans } \mathbb{D} : \mathcal{D}(f) < \infty\}.$$

Comme f est holomorphe dans $\mathbb{D}$, on peut la développer en série de Taylor. Écrivons donc $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$. On trouve que

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2\, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f'(z)\cdot\overline{f'(z)}\, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \sum_{k\geq 1} k a_k z^{k-1}\cdot \sum_{j\geq 1} j\overline{a_j z^{j-1}}\, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} k a_k z^{k-1} j\overline{a_j z^{j-1}}\, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} kj a_k \overline{a_j}\int_{\mathbb{D}} z^{k-1}\overline{z^{j-1}}\, dA(z).
\end{aligned}$$

Or, si $j = k$, alors $\int_{\mathbb{D}} z^{k-1}\overline{z^{j-1}}\, dA(z) = \frac{\pi}{k}$ et si $j \neq k$, $\int_{\mathbb{D}} z^{k-1}\overline{z^{j-1}}\, dA(z) = 0$. Ainsi,

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1} k^2 a_k\cdot\overline{a_k}\left(\frac{\pi}{k}\right) = \sum_{k\geq 1} k|a_k|^2.$$

L'observation précédente nous amème à rappeler la définition des espaces de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ sur le dique unité. On définit donc pour $0 < p \leq \infty$

$$H^p(\mathbb{D}) := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_p < \infty\},$$

où

$$\|f\|_p := \sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \frac{dt}{2\pi}\right)^{1/p}$$

pour $0 < p < \infty$ et

$$\|f\|_\infty := \sup_{|z<1|} |f(z)|.$$

Aussi, il est standard de définir l'espace $H^2(\mathbb{D})$ par

$$H^2(\mathbb{D}) := \{f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) : \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty\}.$$

Remarquons qu'un résultat classique des espaces de Hardy confirme que les deux définitions sont équivalentes dans le cas $p = 2$.

Le calcul précédent nous montre ainsi que $\mathcal{D}$ est un sous-espace de H^2. En fait, on peut montrer ([16, exercices 6-7 page 3]) que $\mathcal{D} \subsetneq \cap_{p<\infty} H^p$. De plus, comme $\mathcal{D}$ contient les polynômes et que ceux-ci sont denses dans H^2, il suit que $\mathcal{D}$ est un sous-espace dense et propre de H^2. Ainsi, $\mathcal{D}$ n'est pas fermé dans H^2, donc n'est pas un espace de Hilbert avec la norme usuelle de H^2. On peut cependant contourner ce problème en définissant une nouvelle norme sur $\mathcal{D}$. Pour $f, g \in \mathcal{D}$, posons

$$\mathcal{D}(f,g) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathcal{D}} f'(z)\overline{g'(z)}\, dA(z).$$

Ceci définit un semi-produit scalaire et $\mathcal{D}(f,f) = \mathcal{D}(f)$. Ainsi, $\mathcal{D}(f)^{1/2}$ est une semi-norme sur $\mathcal{D}$. Ce n'est cependant pas une norme puisque $\mathcal{D}(f) = 0$ pour chaque f constante. En posant pour $f, g \in \mathcal{D}$,

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{D}} := \langle f, g\rangle_{H^2} + \mathcal{D}(f,g),$$

on obtient un véritable produit scalaire sur $\mathcal{D}$. La norme induite devient donc

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \|f\|_{H^2}^2 + \mathcal{D}(f).$$

Nous en tirons notre premier théorème.

Théorème 4.1.2. $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{D}})$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. En écrivant $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, on obtient $\|f\|_{\mathbb{D}}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|a_k|^2$. L'application $f \mapsto ((k+1)^{1/2}a_k)_{k\geq 0}$ définie donc une isométrie de $\mathcal{D}$ sur ℓ^2. Comme ℓ^2 est un espace de Hilbert, il suit que $\mathcal{D}$ l'est aussi. $\square$

En prenant $f(z) := \sum_{k\geq 2} \frac{z^k}{k(\log k)^{3/4}}$, on peut montrer ([16, page 5]) que $f \in \mathcal{D}$, mais que $f^2 \notin \mathcal{D}$. Ainsi, $\mathcal{D}$ n'est pas une algèbre. Cependant, on peut aussi montrer ([16, page 6]) que $\mathcal{D} \cap H^\infty$ est une algèbre avec la norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}\cap H^\infty} := \|f\|_{H^\infty} + \mathcal{D}(f)^{1/2}.$$

On présente maintenant une propriété d'invariance des transformations conformes.

Théorème 4.1.3. *Soit D_1, D_2 des domaines et $\phi : D_1 \to D_2$ une tranformation conforme. Soit aussi $f : D_2 \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$\int_{D_1} |(f\circ\phi)'(z)|^2\, dA(z) = \int_{D_2} |f'(w)|^2\, dA(w).$$

Démonstration. En posant $w = \phi(z)$, on a $dA(w) = |\phi'(z)|^2 dA(z)$. Il suit alors que

$$\int_{D_2} |f'(w)|^2\, dA(w) = \int_{D_1} |f'(\phi(z))|^2|\phi'(z)|^2\, dA(z) = \int_{D_1} |(f\circ\phi)'(z)|^2\, dA(z),$$

ce qui montre le résultat. $\square$

En particulier, en prenant $D_1 = \mathbb{D}$, $D_2 = \mathbb{C}$ et $f(z) = z$, on obtient une nouvelle interprétation de l'intégrale de Dirichlet.

Corollaire 4.1.4. *Soit $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe injective. Alors*

$$\mathcal{D}(\phi) = \int_{\mathbb{D}} |\phi'(z)|^2 \, dA(z) = \int_{\phi(\mathbb{D})} |w|^2 \, dA(w) = \text{Aire}(\phi(\mathbb{D})).$$

Ainsi, toute transformation conforme de $\mathbb{D}$ vers un domaine non-borné mais d'aire finie appartient à $\mathcal{D}$. En prenant n'importe quel domaine simplement connexe, non-borné et d'aire finie, le théorème de Riemann nous assure l'existence d'une telle transformation entre $\mathbb{D}$ et ce domaine. Ceci nous donne donc une panoplie d'exemples de fonctions dans $\mathcal{D}$ non-bornées dans $\mathbb{D}$.

Un autre cas intéressant est celui où l'on considère $D_1 = D_2 = \mathbb{D}$ et $f(z) = z$, en d'autres mots le cas où ϕ est un automorphisme du disque. Ceux-ci sont précisément les fonctions de Möbius qui sont de la forme

$$\phi(z) := e^{i\theta} \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \qquad (a \in \mathbb{D}, e^{i\theta} \in \mathbb{T}).$$

Corollaire 4.1.5. *Si ϕ est un automorphisme du disque unité et f est holomorphe dans $\mathbb{D}$, alors $\mathcal{D}(f \circ \phi) = \mathcal{D}(f)$. Conséquemment, si f appartient à l'espace de Dirichlet, alors $f \circ \phi$ aussi.*

Pour f holomorphe dans $\mathbb{D}$ et $\zeta \in \mathbb{T}$, on écrit $f^*(\zeta) := \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta)$ quand cette limite existe. On définie

$$H^2(\mathbb{T}) := \{f \in L^2(\mathbb{T}) : \hat{f}(-1) = \hat{f}(-2) = \cdots = 0\}.$$

On sait grâce au théorème de Fatou que pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, la valeur limite f^* existe presque partout et de plus $f^* \in H^2(\mathbb{T})$. Inversemment, si $f \in H^2(\mathbb{T})$ et F est l'intégrale de Poisson de f, alors $f = F^*$ presque partout. Nous obtenons donc une bijection entre $H^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{T})$. Celle-ci nous permet donc de voir $H^2(\mathbb{D})$ comme un espace de fonctions sur $\mathbb{T}$ et de même pour l'espace de Dirichlet. Le lecteur intéressé aux espaces de Hardy peut consulter les ouvrages [14, 25, 28]. Douglas a trouvé une formule permettant d'exprimer $\mathcal{D}(f)$ en terme de f^*. En fait, cette formule a joué un grand rôle dans la solution par Douglas du problème de Plateau [13], solution qui lui a permis d'obtenir l'une des deux premières médailles Fields en 1936.

Théorème 4.1.6 (Formule de Douglas)**.** *Soit $f \in H^2$. Alors*

$$\mathcal{D}(f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f^*(\lambda) - f^*(\zeta)}{\lambda - \zeta} \right|^2 |d\lambda||d\zeta|.$$

Avant de démontrer ce résultat, nous montrerons un lemme concernant les séries de Fourier de fonctions dans $L^2(\mathbb{T})$. Rappelons que pour $\phi \in L^2(\mathbb{T})$, le k-ième coefficient, noté par $\hat{\phi}(k)$, est définie pour $k \in \mathbb{Z}$ par

$$\hat{\phi}(k) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(e^{it})e^{-ikt}\,dt.$$

Rappelons aussi la formule de Parseval qui se traduit par

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{it})|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(k)|^2.$$

Lemme 4.1.7. *Soit* $\phi \in L^2(\mathbb{T})$. *Alors*

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \left|\frac{\phi(\lambda)-\phi(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right|^2 |d\lambda||d\zeta| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k||\hat{\phi}(k)|^2.$$

Démonstration. Posons $\lambda = e^{i(s+t)}$ et $\zeta = e^{it}$. Le membre de gauche de la formule qu'on veut montrer devient alors

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\phi(e^{i(s+t)} - \phi(e^{it})}{e^{is}-1}\right|^2 dt\,ds.$$

En appliquant la formule de Parseval à la fonction $\varphi(\zeta) := \phi(e^{is}\zeta) - \phi(\zeta)$, on trouve

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(e^{i(s+t)}) - \phi(e^{it})|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(k)|^2|e^{iks}-1|^2.$$

On a donc que

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\frac{\phi(e^{i(s+t)} - \phi(e^{it})}{e^{is}-1}\right|^2 dt\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(k)|^2\frac{|e^{iks}-1|^2}{|e^{is}-1|^2}\,ds.$$

Finalement, pour $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, la formule de Parseval nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{iks}-1}{e^{is}-1}\right|^2 ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |1 + e^{is} + \cdots + e^{i(|k|-1)s}|^2\,ds = |k|,$$

ce qui démontre le résultat. $\square$

Démonstration de la formule de Douglas. Appliquons le lemme précédent à $\phi = f^*$ et écrivons $f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$. On sait que pour $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a en fait

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \widehat{f^*}(k) z^k.$$

Par l'unicité des coefficients de Taylor, on a donc que $\widehat{f^*}(k) = a_k$ si $k \geq 0$ et $\widehat{f^*}(k) = 0$ si $k < 0$. Ainsi,

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{f^*(\lambda) - f^*(\zeta)}{\lambda - \zeta} \right|^2 = \sum_{k \geq 0} k |a_k|^2 = \mathcal{D}(f).$$

□

Il existe un résultat un peu plus général concernant le comportement au bord de fonctions dans H^2. En effet, pour $f \in H^2$ et presque chaque $\zeta \in \mathbb{T}$, on a que $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque region $|z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)$ où $\kappa > 0$. Ces régions d'approche se nomment « régions non tangentielles ». Pour les fonctions de $\mathcal{D}$, on peut déduire de la formule de Douglas un résultat plus fort pour un type de régions tangentielles, i.e. les régions d'approche oricycliques.

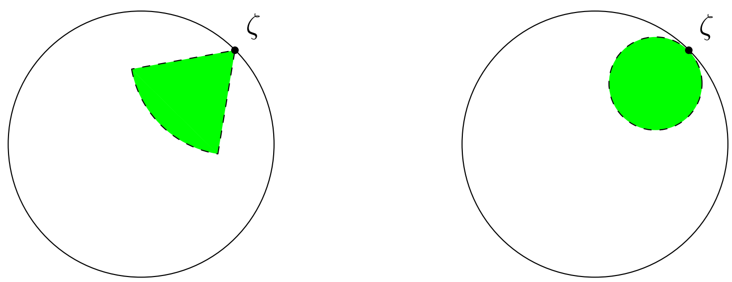

Figure 4.1 – Régions d'approche non tangentielle et oricyclique

Théorème 4.1.8. *Pour $f \in \mathcal{D}$ et presque chaque $\zeta \in \mathbb{T}$, on a $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région oricyclique $|z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)^{1/2}$ où $\kappa > 0$.*

Montrons d'abord un lemme.

Lemme 4.1.9. *Si $g \in H^2(\mathbb{D})$, alors $\lim\limits_{|z| \to 1} (1 - |z|^2)|g(z)|^2 = 0$.*

Démonstration. En écrivant $g(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne que pour chaque $z \in \mathbb{D}$

$$|g(z)|^2 \leq \sum_{k \geq 0} |a_k|^2 \sum_{j \geq 0} |z|^{2j} = \|g\|_{H^2}^2 (1 - |z|^2)^{-1}.$$

Ainsi, $\limsup_{|z| \to 1} (1 - |z|^2)|g(z)|^2 \leq \|g\|_{H^2}^2$. En remplaçant g par $g - \sum_{k=0}^n a_k z^k$ et en laissant tendre $n \to \infty$, on trouve qu'en fait $\lim\limits_{|z| \to 1} (1 - |z|^2)|g(z)|^2 = 0$. □

Démonstration du théorème 4.1.8. Soit $f \in \mathcal{D}$. Par la formule de Douglas, on a

$$\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}}\left|\frac{f^*(\lambda)-f^*(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right|^2 |d\lambda||d\zeta| < \infty.$$

Ainsi, pour presque chaque $\zeta \in \mathbb{T}$, la limite $f^*(\zeta)$ existe et satisfait

$$\int_{\mathbb{T}}\left|\frac{f^*(\lambda)-f^*(\zeta)}{\lambda-\zeta}\right|^2 |d\lambda| < \infty.$$

Fixons $\zeta \in \mathbb{T}$ et pour $z \in \mathbb{D}$, posons

$$g(z) := \frac{f^*(\lambda)-f^*(\zeta)}{z-\lambda}.$$

On a que g est holomorphe sur $\mathbb{D}$, que g^* existe presque partout et que $g^* \in L^2(\mathbb{T})$. Il est clair que $f(z) - f^*(\zeta) \in H^2(\mathbb{D})$ et donc, en appliquant le lemme précédent à g, on obtient que $|g(z)^2| = o((1-|z|^2)^{-1})$ quand $|z| \to 1$. Il suit de cette observation que

$$|f(z)-f^*(\zeta)|^2 = |z-\zeta|^2|g(z)|^2 = o\left(\frac{|z-\zeta|^2}{1-|z|^2}\right)$$

quand $|z| \to 1$. Ainsi, $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région d'approche $|z-\zeta| < \kappa(1-|z|)^{1/2}$. $\square$

On peut en fait dire davantage sur le comportement au bord de fonctions dans $\mathcal{D}$. En effet, il est possible d'élargir la région d'approche tangentielle décrite dans le théorème précédent et c'est ce que nous nous attarderons à faire dans la suite de ce document.

4.2 Transformée de Cauchy

Puisque $\mathcal{D}$ est inclus dans H^2, nous savons que chaque $f \in \mathcal{D}$ possède une limite non tangentielle presque partout sur $\mathbb{T}$. Dans sa thèse de doctorat, Beurling a en fait montré que l'ensemble exceptionnel était de capacité logarithmique nulle. Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin d'un théorème de représentation pour les fonctions dans l'espace de Dirichlet. C'est la transformée de Cauchy qui nous donnera une telle représentation et celle-ci nous permettra en fait de démontrer l'inégalité capacitaire forte et un théorème de convergence pour les régions d'approche exponentielle. Nous consacrons donc une petite section à cette transformée.

Définition 4.2.1. Soit $\mathbb{A} := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$. Nous écrirons $L^2(\mathbb{A})$ pour désigner l'espace de Hilbert des fonctions mesurables $g : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})} := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} |g(w)|^2 \, dA(w) < \infty.$$

On dénotera aussi par $\langle ., . \rangle_{L^2(\mathbb{A})}$ le produit scalaire sur $L^2(\mathbb{A})$ définit par

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{A})} := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} f(w)\overline{g(w)}\, dA(w) \qquad f, g \in L^2(\mathbb{A}).$$

Pour $g \in L^2(\mathbb{A})$, on définit la *transformée de Cauchy* $\mathcal{C}g : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{C}g(z) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{g(w)}{w-z}\, dA(w).$$

Pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, on a $\overline{g} \in L^2(\mathbb{A})$ et $\frac{1}{w-z} \in L^2(\mathbb{A})$. L'inégalité de Schwarz nous donne donc que

$$|\mathcal{C}g(z)| = \left|\left\langle \frac{1}{w-z}, \overline{g}\right\rangle\right| \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \left\|\frac{1}{w-z}\right\|_{L^2(\mathbb{A})} < \infty.$$

L'application $\mathcal{C}g(z)$ est donc bien définie et holomorphe pour chaque $z \in \mathbb{D}$. On peut en fait en dire davantage. Le prochain théorème en fait foi.

Théorème 4.2.2. *Si $g \in L^2(\mathbb{A})$, alors $\mathcal{C}g \in \mathcal{D}$ et $\|\mathcal{C}g\|_{\mathcal{D}} \leq \sqrt{3/2}\|g\|_{L^2(\mathbb{A})}$.*

Démonstration. Soit $g \in L^2(\mathbb{A})$. Pour chaque $z \in \mathbb{D}$ et pour γ un cercle centré en 0 de rayon inférieur à 1, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}g(z) &= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{\mathcal{C}g(z)}{\xi^{k+1}}\, d\xi\right) z^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{1}{\xi^{k+1}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{g(w)}{w-\xi}\, dA(w)\right) d\xi\right) z^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{g(w)}{2\pi i}\left(\int_\gamma \frac{1}{(w-\xi)\xi^{k+1}}\, d\xi\right) dA(w)\right) z^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{g(w)}{w^{k+1}}\, dA(w)\right) z^k \\
&= \sum_{k\geq 0} \langle g, \phi_k\rangle_{L^2(\mathbb{A})} z^k,
\end{aligned}$$

où $\phi_k(w) := 1/\overline{w}^{k+1}$. Ainsi, on a

$$\|\mathcal{C}g\|^2_{\mathcal{D}} = \sum_{k\geq 0} (k+1)|\langle g, \phi_k\rangle_{L^2(\mathbb{A})}|^2.$$

De plus, comme $\langle \phi_m, \phi_n \rangle = 0$ si $n \neq m$, alors $(\phi_k)_{k\geq 0}$ est une collection orthogonale de $L^2(\mathbb{A})$. Par l'inégalité de Bessel, on trouve

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)|\langle g, \phi_k\rangle_{L^2(\mathbb{A})}|^2 \leq B\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})},$$

où $B := \sup_{k\geq 0}(k+1)\|\phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{A})}$. Calculons explicitement B.

$$\|\phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{A})} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{1}{|w|^{2k+2}}\,dA(w) = 2\int_1^2 \frac{dr}{r^{2k+1}} = \begin{cases} \log 4, & k=0, \\ (1-4^{-k})/k, & k\geq 1. \end{cases}$$

Ainsi, on trouve que $B = 3/2$ et le théorème est démontré. Finalement, la valeur de $\sqrt{3/2}$ est optimale : il suffit de prendre $g(w) = \frac{1}{\overline{w}^2}$ pour obtenir l'égalité. $\square$

En réalité, la transformée de Cauchy peut être vue comme une surjection de $L^2(\mathbb{A})$ vers $\mathcal{D}$. Le prochain résultat fera donc office de théorème de représentation pour l'espace de Dirichlet.

Théorème 4.2.3. *Pour chaque $f \in \mathcal{D}$, il existe $g \in L^2(\mathbb{A})$ tel que $f = \mathcal{C}g$ et $\|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$.*

Démonstration. Prenons $f \in \mathcal{D}$ quelconque. Exprimons f en série de Taylor, disons $f = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$. Posons comme ci-dessus $\phi_k(w) := 1/\overline{w}^{k+1}$ et considérons la fonction

$$g := \sum_{k\geq 0} \frac{a_k\phi_k}{\|\phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{A})}}.$$

Montrons premièrement que g converge dans $L^2(\mathbb{A})$ et que $\|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$. Puisque (ϕ_k) est une suite orthogonale de $L^2(\mathbb{A})$, on trouve que

$$\begin{aligned} \|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})} &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} g(w)\overline{g(w)}\,dA(w) \\ &= \sum_{k\geq 0} |a_k|^2/\|\phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{A})} \\ &\leq \sum_{k\geq 0}(k+1)|a_k|^2 = \|f\|^2_{\mathcal{D}} < \infty, \end{aligned}$$

d'où $\|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$ et la convergeance de g dans $L^2(\mathbb{A})$. De plus, par le calcul fait dans la démonstration du théorème 4.2.2, on a pour $z \in \mathbb{D}$ et $k \geq 0$

$$\mathcal{C}\phi_k(z) = \sum_{j\geq 0}\langle \phi_k, \phi_j\rangle_{L^2(\mathbb{A})} z^j = \|\phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{A})} z^k.$$

Ainsi, toujours pour $z \in \mathbb{D}$, on trouve que

$$\mathcal{C}g(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k \mathcal{C}\phi_k}{\|\phi_k\|^2_{L^2(\mathbb{A})}} = \sum_{k\geq 0} a_k z^k = f(z),$$

ce qui termine la démonstration. $\square$

4.3 Le théorème de Beurling

Rappelons que $c^*(E)$ dénote la capacité logarithmique d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{T}$. Cette section a pour but de démontrer le théorème de Beurling qui suit.

Théorème 4.3.1 (Beurling)**.** *Soit $f \in \mathcal{D}$. Il existe $E \subset \mathbb{T}$ avec $c^*(E) = 0$ tel que, si $\zeta \in \mathbb{T} \setminus E$, alors $f^*(\zeta) := \lim_{r \to 1^-} f(r\zeta)$ existe et $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région $|z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)$ avec $\kappa > 0$.*

Rappelons aussi qu'on dit qu'une propriété tient *quasi-partout* (q.p.) sur $\mathbb{T}$ si elle tient partout sur $\mathbb{T} \setminus E$ où $c^*(E) = 0$. Nous pouvons donc résumer le théorème de Beurling en disant que chaque $f \in \mathcal{D}$ possède une limite non tangentielle quasi-partout sur $\mathbb{T}$. Pour en arriver à la démonstration du théorème, nous devons d'abord étendre la notion de transformée de Cauchy sur le cercle unité de la façon suivante.

Définition 4.3.2. Soit $g \in L^2(\mathbb{A})$. On définit $\widetilde{\mathcal{C}}g : \mathbb{T} \to [0, \infty]$ par

$$\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \frac{|g(w)|}{|w - \zeta|} \, dA(w).$$

De plus, si $\zeta \in \mathbb{T}$ et $\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) < \infty$, alors on pose

$$\mathcal{C}g(\zeta) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \frac{g(w)}{w - \zeta} \, dA(w).$$

Théorème 4.3.3. *Soit $g \in L^2(\mathbb{A})$. Alors $\widetilde{\mathcal{C}}g$ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit $(\zeta_n)_{n \geq 1}$ une suite qui tend vers ζ_0 dans $\mathbb{T}$. Par le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta_n) &= \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \frac{|g(w)|}{|w - \zeta_n|} \, dA(w) \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \frac{|g(w)|}{|w - \zeta_0|} \, dA(w) \\ &= \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta_0), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Le prochain théorème nous montre que $\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta)$ est en quelque sorte une fonction maximale.

Théorème 4.3.4. *Soit $g \in L^2(\mathbb{A})$ et $\zeta \in \mathbb{T}$. Supposons de plus que $\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) < \infty$. Alors*

$$|\mathcal{C}g(z)| \leq \left(1 + \frac{|z-\zeta|}{1-|z|}\right)\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) \tag{4.1}$$

pour $z \in \mathbb{D}$. Aussi, $\mathcal{C}g(z) \to \mathcal{C}g(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région $|z-\zeta| < \kappa(1-|z|)$ avec $\kappa > 0$.

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{D}$. On a

$$|\mathcal{C}g(z)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{|g(w)|}{|w-z|}\, dA(w) \leq \sup_{w\in\mathbb{A}} \frac{|w-\zeta|}{|w-z|}\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta).$$

Or, pour $z \in \mathbb{D}$ et $w \in \mathbb{A}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{|w-\zeta|}{|w-z|} &\leq \frac{|w-z|+|z-\zeta|}{|w-z|}\\ &= 1 + \frac{|z-\zeta|}{|w-z|} \leq 1 + \frac{|z-\zeta|}{1-|z|},\end{aligned}$$

ce qui donne (4.1).

Posons maintenant, pour $\delta > 0$, $g_\delta := g(w)\cdot\chi_{\{1<|w|<1+\delta\}}$. Toujours en fixant $z \in \mathbb{D}$, on trouve que

$$|\mathcal{C}g(z) - \mathcal{C}g(\zeta)| \leq |\mathcal{C}(g-g_\delta)(z) - \mathcal{C}(g-g_\delta)(\zeta)| + |\mathcal{C}g_\delta(z)| + |\mathcal{C}g_\delta(\zeta)|.$$

De plus, $\mathcal{C}(g-g_\delta)$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, donc en particulier

$$\lim_{\substack{z\to\zeta\\ z\in\mathbb{D}}} \mathcal{C}(g-g_\delta)(z) = \mathcal{C}(g-g_\delta)(\zeta).$$

De plus, par (4.1), on a

$$|\mathcal{C}g_\delta(z)| \leq \left(1 + \frac{|z-\zeta|}{|1-|z|}\right)\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta).$$

On a aussi que $|\mathcal{C}_\delta(\zeta)| \leq \widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta)$. En combinant tous ces faits, on trouve que, pour $\kappa > 0$,

$$\begin{aligned}&\limsup_{\substack{z\to\zeta\\ |z-\zeta|\leq\kappa(1-|z|)}} |\mathcal{C}g(z) - \mathcal{C}g(\zeta)|\\ &\leq \limsup_{\substack{z\to\zeta\\ |z-\zeta|\leq\kappa(1-|z|)}} |\mathcal{C}(g-g_\delta)(z) - \mathcal{C}(g-g_\delta)(\zeta)| + |\mathcal{C}g_\delta(z)| + |\mathcal{C}g_\delta(\zeta)|\\ &\leq (1+\kappa)\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta) + \widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta)\\ &= (\kappa+2)\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta).\end{aligned}$$

Or, cette inégalité tient pour chaque $\delta > 0$. Comme $\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) < \infty$, le théorème de convergence dominée implique que $\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta) \to 0$ si $\delta \to 0$. Ainsi, pour $\kappa > 0$,

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta \\ |z-\zeta|\leq\kappa(1-|z|)}} |\mathcal{C}g(z) - \mathcal{C}g(\zeta)| = 0,$$

ce qui démontre le résultat. □

Dans le théorème précédent, nous avons supposé que $\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta)$ était fini. On peut donc se demander si cette hypothèse est réalisée sur un ensemble vaste. Vu autrement, jusqu'à quel point un sous-ensemble E de $\mathbb{T}$ tel que $\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) = \infty$ pour chaque $\zeta \in E$ peut-il être imposant ? On utilisera la capacité pour mesurer ces notions intuitives de grandeur. Le prochain théorème répond, en partie du moins, à cette question.

Théorème 4.3.5. *Soit $g \in L^2(\mathbb{A})$. Alors, pour $t > 0$,*

$$c(\{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) > t\}) \leq A\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})}/t^2,$$

où A est une constante absolue.

Avant de démontrer ce résultat, nous avons besoin d'un lemme essentiel.

Lemme 4.3.6. *Il existe $B > 0$ tel que, pour chaque $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{T}$,*

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{dA(w)}{|w-\zeta_1||w-\zeta_2|} \leq 2\log\frac{B}{|\zeta_1-\zeta_2|}.$$

Démonstration. Posons d'abord $z := (w-\zeta_1)/(\zeta_2-\zeta_1)$. On a, en posant $B := 4e^5$, $R := 1/|\zeta_2-\zeta_1|$ et en remarquant que $4R > 2$,

$$\begin{aligned}
\int_{1<|w|<2} \frac{dA(w)}{|w-\zeta_1||w-\zeta_2|} &= \int_{1<|\zeta_1+(\zeta_2-\zeta_1)z|<2} \frac{dA(z)}{|z||z-1|} \\
&\leq \int_{|z|<4R} \frac{dA(z)}{|z||z-1|} \\
&= \int_{|z|<2} \frac{dA(z)}{|z||z-1|} + \int_{2\leq|z|<4R} \frac{dA(z)}{|z||z-1|} \\
&\leq \int_{|z|<2} \left(\frac{1}{|z|} + \frac{1}{|z-1|}\right) dA(z) + 2\pi\int_2^{4R} \frac{dr}{r-1} \\
&\leq \int_{|z|<2} \frac{dA(z)}{|z|} + \int_{|z|<3} \frac{dA(z)}{|z|} + 2\pi\log 4R \\
&= 4\pi + 6\pi + 2\pi\log 4R \\
&= 2\pi\log(RB),
\end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme. $\square$

Nous sommes près à démontrer le théorème 4.3.5.

Démonstration du théorème 4.3.5. Pour le moment, travaillons avec la capacité c_K avec $K := \log^+(B/t)$ où B est la constante trouvée dans le lemme précédent. Soit aussi $t > 0$ et F un sous-ensemble compact de $\{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) > t\}$. Finalement, prenons μ une mesure de probabilité de Borel quelconque sur F. Par le théorème de Fubini et l'inégalité de Schwarz respectivement, on a

$$\begin{aligned} t &\leq \int_F \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta)\, d\mu(\zeta) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} |g(w)| \int_F \frac{1}{|w-\zeta|}\, d\mu(\zeta)\, dA(w) \\ &\leq \|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \left(\int_F \frac{d\mu(\zeta)}{|w-\zeta|}\right)^2 dA(w)\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant encore le théorème de Fubini puis le lemme précédent, on trouve que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \left(\int_F \frac{d\mu(\zeta)}{|w-\zeta|}\right)^2 dA(w) &= \int_F\int_F \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}} \frac{dA(w)}{|w-\zeta_1||w-\zeta_2|}\, d\mu(\zeta_1)\, d\mu(\zeta_2) \\ &\leq \int_F\int_F 2\log\frac{B}{|\zeta_1-\zeta_2|}\, d\mu(\zeta_1)\, d\mu(\zeta_2) = 2I_K(\mu). \end{aligned}$$

En combinant les deux dernières chaînes d'inégalités, on trouve que $t \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{A})}(2I_K(\mu))^{1/2}$, c'est-à-dire,

$$\frac{1}{I_K(\mu)} \leq \frac{2\|g\|_{L^2(\mathbb{A})}}{t^2}.$$

Comme cette inégalité tient pour chaque $\mu \in \mathcal{P}(F)$, on a aussi

$$c_K(F) \leq \frac{2\|g\|_{L^2(\mathbb{A})}}{t^2}.$$

Ceci tenant pour chaque compact F dans $\{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) > t\}$, on a

$$c_K(\{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) > t\}) \leq \frac{2\|g\|_{L^2(\mathbb{A})}}{t^2}.$$

Pour se ramener à $c(\cdot)$, il suffit de remarquer que pour chaque sous-ensemble compact F, on a

$$\frac{1}{c_K(F)} - \frac{1}{c(F)} = \log(B/2),$$

donc

$$c(F) = c_K(F)(1 + \log(B/2)c(F)) \leq c_K(F)\left(1 + \log(B/2)c(\mathbb{T})\right).$$

Il suit que

$$c(\{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) > t\}) \leq \frac{A\|g\|_{L^2(\mathbb{A})}}{t^2},$$

avec $A := 2\,[1 + \log(B/2)c(\mathbb{T})]$.

□

On en dégage tout de suite un corollaire important.

Corollaire 4.3.7. *Si $g \in L^2(\mathbb{A})$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}g < \infty$ quasi-partout sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Puisque $\widetilde{\mathcal{C}}$ est semi-continue inférieurement, il suit que pour chaque $t > 0$, l'ensemble $\{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) > t\}$ est ouvert dans $\mathbb{T}$. Ainsi,

$$c^*(\{\widetilde{\mathcal{C}}g = \infty\}) \leq c(\{\widetilde{\mathcal{C}}g < \infty\}) \leq \frac{A\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})}}{t^2}$$

pour chaque $t > 0$. En faisant tendre $t \to \infty$, on trouve que $c^*(\{\widetilde{\mathcal{C}} = \infty\}) = 0$. □

Nous sommes finalement en mesure de démontrer le théorème de Beurling.

Démonstration du théorème de Beurling. Soit $f \in \mathcal{D}$ et $E := \{\zeta \in \mathbb{T} : \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) = \infty\}$. Par le théorème 4.2.3, on a que $f = \mathcal{C}g$ pour un certain $g \in L^2(\mathbb{A})$. De plus, le théorème 4.3.4 affirme que si $\zeta \in \mathbb{T} \setminus E$, alors $\mathcal{C}g(z) \to \mathcal{C}g(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région $|z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)$. Finalement, par le corollaire précédent, on a que $c(E) = 0$, ce qui termine la démonstration.

□

4.4 Inégalité capacitaire forte et faible

De la démonstration du théorème de Beurling on peut déduire beaucoup plus d'informations que ce que le théorème seul nous livre. Le prochain résultat en est l'illustration.

Théorème 4.4.1 (Inégalité capacitaire faible)**.** *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors pour $t > 0$,*

$$c^*(|f^*| > t) \leq \frac{A\|f\|^2_{\mathcal{D}}}{t^2},$$

où A est une constante absolue.

Démonstration. En utilisant le théorème 4.2.3, il existe $g \in L^2(\mathbb{A})$ tel que $f = \mathcal{C}g$ et $\|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$. De plus, on sait par le théorème 4.3.3 que $\widetilde{\mathcal{C}}g$ est semi-continue inférieurement, ce qui implique que $\{\widetilde{\mathcal{C}}g > t\}$ est ouvert dans $\mathbb{T}$ et donc capacitable. D'après les théorèmes 4.2.3 et 4.3.5, on a

$$c(\{\widetilde{\mathcal{C}}g > t\}) = c^*(\{\widetilde{\mathcal{C}}g > t\}) \leq A\|g\|^2_{L^2_{\mathbb{A}}}/t^2 \leq A\|f\|^2_{\mathcal{D}}/t^2$$

pour A une constante absolue. Finalement, comme $|f^*| = |\mathcal{C}g| \leq \widetilde{\mathcal{C}}g$ quasi-partout sur $\mathbb{T}$, on obtient le résultat. □

Rappelons que $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ et que celle-ci est reliée à la capacité via le théorème 2.4.2.

Corollaire 4.4.2. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors pour $t > 0$ on a*

$$|\{|f^*| > t\}| \leq Ae^{-Bt^2/\|f\|^2_{\mathcal{D}}},$$

où A et B sont des constantes absolues strictement positives.

Démonstration. Par le théorème 2.4.2 et l'inégalité capacitaire faible respectivement, on a que

$$\frac{1}{\log(2\pi e/|\{|f^*| > t\}|)} \leq c(\{|f^*| > t\}) \leq \frac{A\|f\|^2_{\mathcal{D}}}{t^2},$$

d'où

$$|\{|f^*| > t\}| \leq 2\pi e e^{(-1/A)\frac{t^2}{\|f\|^2_{\mathcal{D}}}}.$$

□

Corollaire 4.4.3. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors* $\exp(|f^*|^2) \in L^1(\mathbb{T})$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\|f\|^2_{\mathcal{D}} < B$, où B est la constante du corollaire 4.4.2. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} (e^{|f^*(e^{i\theta})|^2} - 1)\, d\theta &= \int_{\mathbb{T}} \int_0^{|f^*(e^{i\theta})|} 2te^{t^2}\, dt\, d\theta = \int_{t=0}^{\infty} \int_{\{|f^*|>t\}} 2te^{t^2}\, d\theta\, dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} 2te^{t^2} |\{|f^*| > t\}|\, dt \leq \int_{t=o}^{\infty} 2Ate^{t^2} e^{-Bt^2/\|f\|^2_{\mathcal{D}}}\, dt < \infty.\end{aligned}$$

Pour le cas général, écrivons $f = p + g$ pour p un polynôme et g une fonction telle que $\|g\|^2_{\mathcal{D}} < B/2$. Quasi-partout sur $\mathbb{T}$, on a

$$|f^*|^2 = |p|^2 + |g^*|^2 + p\overline{g^*} + g^*\overline{p} \leq |p - g^*|^2 + |p|^2 + |g^*|^2 + p\overline{g^*} + g^*\overline{p} = 2|p|^2 + 2|g^*|^2.$$

Ainsi,

$$\int_{\mathbb{T}} e^{|f^*(e^{i\theta})|^2}\, d\theta \leq \int_{\mathbb{T}} e^{2|p(e^{i\theta})|^2+2|g^*(e^{i\theta})|^2}\, d\theta \leq e^{2\|p\|_\infty^2} \int_{\mathbb{T}} e^{2|g^*(e^{i\theta})|^2}\, d\theta < \infty.$$

□

Malheureusement, on ne peut pas étendre ce résultat à $\exp(|f^*|^p)$ pour $p > 2$. En effet, pour de telles valeurs de p, si $f = (\log \frac{1}{1-z})^{1/p}$, on a que $f \in \mathcal{D}$, mais $\exp(|f^*|^p) \notin L^1(\mathbb{T})$.

Montrons maintenant un résultat un peu plus fort que l'inégalité capacitaire faible.

Théorème 4.4.4 (Inégalité capacitaire forte)**.** *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors*

$$\int_0^\infty c^*(|f^*| > t)\, dt^2 \leq A\|f\|_{\mathcal{D}}^2,$$

où A est une constante absolue.

Avant de passer à la démonstration, remarquons que l'inégalité capacitaire forte implique l'inégalité capacitaire faible. En effet, on a

$$A\|f\|_{\mathcal{D}}^2 \geq \int_0^\infty c^*(\{|f| > t\})dt^2 \geq \int_0^s c^*(\{|f| > t\})dt^2 \geq s^2 c^*(\{|f| > s\}).$$

Démonstration. Soit $K(t) := \log^+(B/t)$ avec B la constante du lemme 4.3.6. Il est facile de voir qu'en démontrant que

$$\int_0^\infty c_K(\widetilde{\mathcal{C}}g > t)\, dt^2 \leq 32\|g\|_{L^2(\mathbb{A})}^2, \tag{4.2}$$

alors on aura terminé. En effet, pour se ramener à la capacité logarithmique, il suffit de se rappeler que pour chaque ensemble compact F, on a $c(F) \leq c_K(F)(1+\log(B/2)c(\mathbb{T}))$. On se ramène au résultat souhaité en passant par les même étapes qu'à la démonstration du théorème 4.4.1, soit par le théorème de représentation pour $\mathcal{D}$, la semi continuité inférieur de $\widetilde{\mathcal{C}}$, (4.2) et le fait que $|f^*| = |\mathcal{C}g| \leq \widetilde{\mathcal{C}}g$ quasi-partout sur $\mathbb{T}$. Démontrons donc (4.2).

Fixons $n \geq 1$ et, pour $k = -n, \ldots, n$, prenons un sous ensemble compact quelconque de $\{\widetilde{\mathcal{C}}g > 2^k\}$ et nommons le F_k. Posons $A_j := \{2^j \leq \widetilde{\mathcal{C}}g < 2^{j+1}\}$ et $\mu := \sum_{k=-n}^n 2^k c_K(F_k)\nu_k$, où ν_k est une mesure d'équilibre pour F_k. Par le théorème de Fubini et l'inégalité de Schwarz appliqué aux deux dernières lignes, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(F_k) &= \sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(F_k)\nu_k(\cup_{j\in\mathbb{Z}} A_j) \\
&\le \sum_{k=-n}^{n} 2^{k} c_K(F_k) \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \nu_k(A_j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \sum_{k=-n}^{n} 2^{k} c_K(F_k)\nu_k(A_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^j \mu(A_j) \\
&\le \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{A_j} \widetilde{\mathcal{C}} g \, d\mu(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} \widetilde{\mathcal{C}} g \, d\mu(\zeta) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \int_{\mathbb{T}} \frac{|g(w)|}{|w-\zeta|} \, d\mu(\zeta) \, dA(w) \\
&\le \|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|w-\zeta|} \, d\mu(\zeta) \right)^2 dA(w) \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.3.6, il suit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{|w-\zeta|} \, d\mu(\zeta) \right)^2 dA(w) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \frac{dA(w)}{|w-\zeta_1||w-\zeta_2|} \, d\mu(\zeta_1) \, d\mu(\zeta_2) \\
&\le \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} 2 \log \frac{B}{|\zeta_1 - \zeta_2|} \, d\mu(\zeta_1) \, d\mu(\zeta_2) = 2 I_K(\mu).
\end{aligned}$$

De plus, par le corollaire 2.4.4, on a $K_{\nu_k} \le I_K(\nu_k)$ sur $\mathbb{T}$. On en déduit que $\int K_{\nu_j} \, d\nu_k = \int K_{\nu_k} \, d\nu_j \le I(\nu_k)$ pour chaque j, k. Ainsi,

$$\begin{aligned}
I_K(\mu) &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} K(d(x,y)) \, d\mu(x) \, d\mu(y) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}} K(d(x,y)) \sum_{k=-n}^{n} 2^k c_K(F_k) \sum_{j=-n}^{n} 2^j c_K(F_j) \, d\nu_k(x) \, d\nu_j(y) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} 2^j c_K(F_j) 2^k c_K(F_k) \int_{\mathbb{T}} K_{\nu_j} \, d\nu_k \\
&\le \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} 2^j c_K(F_j) 2^k c_K(F_k) \min\{I_K(\nu_j), I_K(\nu_k)\} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} 2^j 2^k \min\{c_K(F_j), c_K(F_k)\} \\
&\le 2 \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{k} 2^j 2^k c_K(F_k) \\
&\le 2 \sum_{k=-n}^{n} 2^k c_K(F_k)(2^{k+1} - 1 + 1) \\
&= 4 \sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(F_k).
\end{aligned}$$

En rassemblant ces inégalités, on trouve que

$$\sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(F_k) \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{A})} \left(8 \sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(F_k) \right)^{1/2},$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(F_k) \leq 8\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})}.$$

Comme ceci tient pour chaque sous-ensembles compacts F_k, on obtient que

$$\sum_{k=-n}^{n} 2^{2k} c_K(\widetilde{\mathcal{C}} > 2^k) \leq 8\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})}.$$

Il suffit de laisser tendre $n \to \infty$ pour obtenir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{2k} c_K(\widetilde{\mathcal{C}} > 2^k) \leq 8\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty c_K(\widetilde{\mathcal{C}}g > t)\, dt^2 &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^k}^{2^{k+1}} c_K(\widetilde{\mathcal{C}}g > 2^k)\, dt^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{2k+2} c_K(\widetilde{\mathcal{C}}g > 2^k) \\
&\leq 32\|g\|^2_{L^2(\mathbb{A})},
\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. □

4.5 Région d'approche tangentielle

Dans cette section, nous nous intéresserons au comportement au bord de fonctions dans l'espace de Dirichlet. Les limites de ces fonctions seront prises dans des régions exponentielles d'approche tangentielle. En outre, nous tenterons de démontrer un résultat dût à Nagel, Rudin et Shapiro, celui-ci étant plus fort que le théorème 4.1.7.

Théorème 4.5.1. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors pour presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$, on a que $f(z) \to f^*(\zeta)$ lorsque $z \to \zeta$ dans chaque région*

$$|z - \zeta| < \kappa \left(\log \frac{1}{1 - |z|} \right)^{-1}, \qquad (\kappa > 0).$$

Avant de démontrer le résultat, nous avons besoin d'une notion supplémentaire et d'un lemme.

Définition 4.5.2. Soit $h \in L^1(\mathbb{T})$. La $f$onction maximale de Hardy-Littlewood de h, $Mh : \mathbb{T} \to [0, \infty]$, est définie par

$$(Mh)(\zeta) := \sup_{\delta > 0} \frac{1}{2\delta} \int_{|\theta - \arg \zeta| < \delta} |h(e^{i\theta})| \, d\theta.$$

Dans [34], on démontre que Mh est semi-continue et satisfait l'inégalité de type faible

$$|\{Mh > t\}| \leq A \frac{\|h\|_{L^1(\mathbb{T})}}{t} \qquad (t > 0), \tag{4.3}$$

où A est une constante absolue.

La fonction de Hardy-Littlewood peut être définie de manière plus générale pour une mesure de Borel de $\mathbb{R}^n$. Cette fonction est en fait un outil important dans la démonstration du théorème de différentiation de Lebesgue. On peut montrer que la constante $A = 2$ fait l'affaire dans l'inégalité de type faible précédente.

Lemme 4.5.3. *Soit $g \in L^2(\mathbb{A})$ et $\zeta \in \mathbb{T}$. Alors pour $z \in \mathbb{D}$,*

$$|\mathcal{C}g(z)| \leq 2\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta) + 2\left[(Mh_g)(\zeta)|z - \zeta| \log\left(\frac{3}{1 - |z|}\right)\right]^{1/2}, \tag{4.4}$$

où pour $\zeta \in \mathbb{T}$

$$h_g(\zeta) := \int_1^2 |g(r\zeta)|^2 r \, dr.$$

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{D}$, $\zeta \in \mathbb{T}$ et posons $\delta := |z - \zeta|$. On a alors que

$$|\mathcal{C}g(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}} \frac{|g(w)|}{|w - z|} \, dA(w).$$

On tentera d'évaluer l'intégrale de droite en divisant le domaine $\mathbb{A}$ en deux parties, $\mathbb{A}_\delta$ et $\mathbb{A}'_\delta$ respectivement. Posons $\mathbb{A}_\delta := \{w \in \mathbb{A} : |w - \zeta| \leq 2\delta\}$ et $\mathbb{A}'_\delta := \mathbb{A} \setminus \mathbb{A}_\delta$. Pour $w \in \mathbb{A}'_\delta$, on a $|w - \zeta| \leq \delta + |w - z|$. De plus, comme $|w - \zeta| \geq 2\delta$, alors $|w - \zeta| \leq 2|w - \zeta| - 2\delta$. Ainsi, on a

$$\frac{|w - \zeta|}{|w - z|} \leq \frac{|w - \zeta|}{|w - \zeta| - \delta} \leq 2,$$

et donc

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}'_\delta} \frac{|g(w)|}{|w - z|} \, dA(w) \leq \int_{\mathbb{A}} \frac{2|g(w)|}{|w - \zeta|} \, dA(w) = 2\widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta).$$

En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient aussi

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}_\delta} \frac{|g(w)|}{|w - z|} \, dA(w) \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}_\delta} |g(w)|^2 \, dA(w)\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{A}_\delta} \frac{1}{|w - z|^2} \, dA(w)\right)^{1/2}.$$

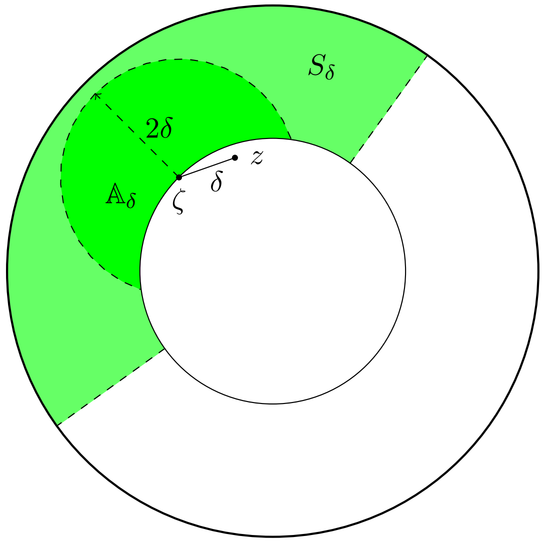

FIGURE 4.2 – Les régions $\mathbb{A}_\delta$ et S_δ

De plus, $\mathbb{A}_\delta$ est contenu dans le secteur $S_\delta := \{re^{i\theta} : 1 < r < 2, |\theta - \arg\zeta| < \pi\delta\}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi\delta}\int_{\mathbb{A}_\delta} |g(w)|^2\, dA(w) &\leq \frac{1}{2\pi\delta}\int_{|\theta-\arg\zeta|<\pi\delta} h_g(e^{i\theta})\, d\theta \\ &\leq \sup_{a>0}\frac{1}{2a}\int_{|\theta-\arg\zeta|<a} h_g(e^{i\theta})\, d\theta = (Mh_g)(\zeta).\end{aligned}$$

Aussi, en posant $u := z - w$, on a $1 - |z| \leq |w| - |z| \leq |u| \leq |w| + |z| \leq 3$. Ainsi,

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}_\delta} \frac{1}{|w-z|^2}\, dA(w) \leq \frac{1}{\pi}\int_{1-|z|<|u|<3} \frac{1}{|u|^2}\, dA(u) = 2\log\frac{3}{1-|z|}.$$

En rassemblant ces estimés, on obtient le résultat cherché. $\square$

Demonstration du théorème 4.5.1. Soit $f \in \mathcal{D}$. Par le théorème de représentation pour l'espace de Dirichlet, on peut écrire $f = \mathcal{C}g$ pour $g \in L^2(\mathbb{A})$. On a ainsi $f(z) - f^*(\zeta) = \mathcal{C}g(z) - \mathcal{C}g(\zeta)$ pour chaque $z \in \mathbb{D}$ et quasi partout pour $\zeta \in \mathbb{T}$. Fixons maintenant $\delta > 0$ et posons $g_\delta := g(w) \cdot \mathbb{1}_{\{1<|w|<1+\delta\}}$. De la même façon qu'au théorème 4.3.4, on obtient

$$|\mathcal{C}g(z) - \mathcal{C}g(\zeta)| \leq |\mathcal{C}(g-g_\delta)(z) - \mathcal{C}(g-g_\delta)(\zeta)| + |\mathcal{C}g_\delta(z)| + |\mathcal{C}g_\delta(\zeta)|.$$

Le premier terme tend vers 0 lorsque $z \to \zeta$ sans restriction sur la région d'approche. De plus, le troisième terme satisfait l'inégalité $|\mathcal{C}g_\delta(\zeta)| \leq \widetilde{\mathcal{C}}g(\zeta)$. En ce qui concerne le deuxième terme, en écrivant

$$\Omega_\kappa(\zeta) := \left\{z \in \mathbb{D} : |z - \zeta| < \frac{\kappa}{\log(3/(1-|z|))}\right\},$$

le lemme précédant nous donne que pour $z \in \Omega_\kappa(\zeta)$

$$|\mathcal{C}g_\delta(z)| \leq 2\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta) + 2(\kappa(Mh_{g_\delta})(\zeta))^{1/2}.$$

Il découle de ces estimés que

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\Omega_\kappa(\zeta)}} |f(z) - f^*(\zeta)| \leq 3\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta(\zeta) + 2(\kappa(Mh_{g_\delta})(\zeta))^{1/2}.$$

En utilisant les théorèmes 4.3.5 et 2.4.2, on a

$$|\{\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta > t\}| \leq Ae^{-Bt^2/\|g_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{A})}},$$

et par (4.3)

$$|\{Mh_{g_\delta} > t\}| \leq A\|h_{g_\delta}\|_{L^1(\mathbb{T})}/t \leq A'\|g_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{A})}/t,$$

avec A, A' et B des constantes absolues. De plus, comme $\|g_\delta\|_{L^2(\mathbb{A})} \to 0$ quand $\delta \to 0$, alors il est clair par les deux dernières inégalités qu'en fixant $\epsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$ de façon à ce que $|\{\widetilde{\mathcal{C}}g_\delta > t\}| \leq \epsilon$ et $|\{Mh_{g_\delta} > t\}| \leq \epsilon$. Il suit que

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\Omega_\kappa(\zeta)}} |f(z) - f^*(\zeta)| \leq 3\epsilon + 2(\kappa\epsilon)^{1/2}$$

pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$ hors d'un ensemble de mesure 2ϵ. En faisant tendre $\epsilon \to 0$, on déduit que

$$\limsup_{\substack{z\to\zeta \\ z\in\Omega_\kappa(\zeta)}} f(z) = f^*(\zeta)$$

pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$ hors d'un ensemble de mesure nulle. □

4.6 Optimalité des résultats

On peut se demander à quel point les résultats précédents sont optimaux. Par exemple, dans le théorème de Beurling, est-ce que la capacité logarithmique nulle est une condition suffisante pour la taille de l'ensemble exceptionnel ? Est-ce que l'inégalité capacitaire forte est optimale ? Dans cette section, nous discutons de ces questions concernant l'optimalité des résultats obtenus dans les sections précédentes. Les observations et théorèmes de cette section suivent presque intégralement [15]. Nous citerons un résultat concernant une réciproque partielle au théorème de Beurling et discuterons d'une réciproque à l'inégalité capacitaire forte. Voici d'abord celui concernant le théorème de Beurling.

Théorème 4.6.1 ([16, page 40])**.** *Soit $E \subset \mathbb{T}$ un ensemble fermé tel que $c^*(E) = 0$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{D}$ telle que $\lim_{z \to \zeta} \Re f(z) = \infty$ pour chaque $\zeta \in E$.*

Notons qu'on peut de plus exiger que f soit continue sur $\overline{\mathbb{D}} \setminus E$. Une modification de la construction que nous ferons est proposée dans [16] pour satisfaire cette restriction supplémentaire. Avant de démontrer ce théorème, nous avons besoin d'un lemme caractérisant une famille de fonctions qui seront utilisées dans notre démonstration.

Lemme 4.6.2. *Soit $K(t) := \log^+(2/t)$ et μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{T}$ telle que $I_K(\mu) < \infty$. Posons*

$$f_\mu(z) := \int \log\left(\frac{2}{1 - ze^{-it}}\right) d\mu(e^{it}) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Alors

(i) $f_\mu \in \mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}(f_\mu) = I_K(\mu) - \log 2$.

(ii) $|\Im f_\mu(z)| \leq \frac{\pi}{2}$ *sur* $\mathbb{D}$.

(iii) $0 \leq \Re f_\mu(z) \leq \log\left(\frac{2}{\mathrm{dist}(z, \mathrm{supp}\mu)}\right)$.

(iv) $\Re f_\mu^* \geq K_\mu(\zeta)$ *q.p. sur* $\mathbb{T}$.

Démonstration. (i) Il est clair que f_μ est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et que son développement en série de Taylor est donné par

$$f_\mu(z) = \log 2 + \sum_{k \geq 1} \frac{\hat{\mu}(k)}{k} z^k.$$

Ainsi, $\mathcal{D}(f_\mu) = \sum_{k\geq 1} \frac{|\hat{\mu}(k)|^2}{k} = I_K(\mu) - \log 2$, la dernière égalité étant justifiable par le théorème 2.4.2. Il suit que $\mathcal{D}(f_\mu) < \infty$, donc que $f_\mu \in \mathcal{D}$.

(ii) Si $|w| < 1$, alors l'argument de $1 - w$ se trouve entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{D}$ et $e^{it} \in \mathbb{T}$, la partie imaginaire de $\log(2/(1 - ze^{it}))$ se trouve entre $-\frac{\pi}{2}$ et$\frac{\pi}{2}$. Le résultat suit directement puisque μ est une mesure de probabilité.

(iii) En prenant la partie réelle de f_μ, on trouve

$$\Re f(z) = \int \log \frac{2}{|e^{it} - z|} d\mu(e^{it})$$

et les deux inégalités en découle directement.

(iv) Soit $\zeta \in \mathbb{T}$ un point où f_μ^* existe. On a

$$\begin{aligned}\Re f_\mu^*(\zeta) &= \lim_{r\to 1^-} \Re f_\mu(r\zeta)\\ &= \lim_{r\to 1^-} \int \log \frac{2}{|e^{it}-r\zeta|}\, d\mu(e^{it})\\ &\geq \int \log \frac{2}{|e^{it}-\zeta|}\, d\mu(e^{it}) = K_\mu(\zeta).\end{aligned}$$

Notons que l'inégalité dans la chaîne d'opérations précédente est justifiée par le lemme de Fatou. □

Démonstration du théorème 4.6.1. Tout au long de la preuve, nous travaillerons avec la capacité logarithmique habituelle $c(\cdot)$. Comme $c(E) = 0$ par hypothèse, on peut choisir, en utilisant le théorème 2.1.8, une suite (E_n) de voisinages fermés de E telle que

$$\sum_{n\geq 1} c(E_n)^{1/2} < \infty.$$

Pour chaque $n \geq 1$, soit ν_n une mesure d'équilibre pour E_n. En définissant f_{ν_n} comme dans le lemme précédent, on pose

$$f(z) := \sum_{n\geq 1} c(E_n) f_{\nu_n}(z) \qquad (z \in \mathbb{D}).$$

Il est clair que f est bien définie puisque la série converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$. Montrons maintenant que f respecte les conclusions du théorème. Montrons d'abord que $f \in \mathcal{D}$. Par le lemme 4.6.2 (i), on a $\mathcal{D}(f_{\nu_n}) \leq I_K(\nu_n) = \frac{1}{c(E_n)}$. Comme $f_{\nu_n}(0) = \log 2$ pour chaque n, il suit que $\|f_{\nu_n}\|_{\mathcal{D}} \leq \frac{A}{c(E_n)^{1/2}}$ pour une certaine constante absolue A. Ainsi,

$$\sum_{n\geq 1} \|c(E_n) f_{\nu_n}\|_{\mathcal{D}} \leq A \sum_{n\geq 1} c(E_n)^{1/2} < \infty, \tag{4.5}$$

donc la série définissant f converge dans $\mathcal{D}$, bref $f \in \mathcal{D}$.

Attardons-nous maintenant aux valeurs limites de f. Par le lemme 4.6.2 (iv), on a que $\Re f_{\nu_n}^* \geq K_{\nu_n}$ quasi-partout sur $\mathbb{T}$. De plus, par le corollaire 2.4.6, on a que $K_{\nu_n} = I_K(\nu_n) = \frac{1}{c(E_n)}$ quasi-partout sur E_n. En combinant ces deux résultats, on déduit que

$$\Re f_{\nu_n}^* \geq \frac{1}{c(E_n)} \qquad \text{q.p. sur } E_n.$$

Comme f_{ν_n} est holomorphe, il suit que $\Re f_{\nu_n}$ est une fonction harmonique et positive sur $\mathbb{D}$. Ainsi, par le théorème de Herglotz (théorème 1.1.7), $\Re f_{\nu_n}$ est l'intégrale de Poisson d'une mesure borélienne positive et finie sur $\mathbb{T}$ dont la partie absolument continue est

$\frac{\Re^* f_{\nu_n}\, d|\zeta|}{2\pi}$. Ainsi, la fonction $\Re f_{\nu_n}$ est au moins aussi grande que l'intégrale de Poisson de $\frac{\Re^* f_{\nu_n}\, d|\zeta|}{2\pi}$. De plus, comme $\Re f^*_{\nu_n} \geq \frac{1}{c(E_n)}$ q.p. sur E_n (en particulier p.p. sur E_n) et comme E_n est un voisinage de E (donc pour $\zeta \in E, \zeta \subset \mathrm{Int}(E_n)$), il suit que

$$\liminf_{\zeta \to z} \Re f_{\nu_n}(z) \geq \frac{1}{c(E_n)}$$

pour chaque $\zeta \in E$ et où la limite du membre de droite est sans restriction. Ainsi, pour chaque $N \geq 1$ et $\zeta \in E$, on a

$$\liminf_{z \to \zeta} \Re f(z) \geq \sum_{n=1}^{N} c(E_n) \liminf_{\zeta \to z} \Re f_{\nu_n}(z) \geq \sum_{n=1}^{N} 1 = N.$$

Comme N est arbitraire, il suit que $\lim_{z \to \zeta} \Re f(z) = \infty$. $\square$

Le théorème de Beurling et celui de Nagel-Rudin-Shapiro font partie des plus simples concernant les limites de fonctions de $\mathcal{D}$. Il existe une panoplie d'autres résultats où les hypothèses varient principalement entre la région d'approche et la taille de l'ensemble exceptionnel. Le prochain résultat est pris dans [37] et clarifie en quelque sorte la question.

Théorème 4.6.3. *Soit $f \in \mathcal{D}$. Alors*

(i) Pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$ hors d'un ensemble de capacité nulle, $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région

$$\{z : |z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)^{\lambda}\} \qquad (\kappa > 0, \lambda > 0).$$

(ii) Soit γ tel que $0 < \gamma \leq 1$. Pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$ hors d'un ensemble de γ-dimension de Hausdorff nulle, $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région

$$\left\{ z : |z - \zeta| < \kappa \log \left(\frac{1}{1 - |z|} \right)^{-1/\gamma} \right\}, \qquad (\kappa > 0).$$

Pour (ii), il n'est pas possible d'élargir la région d'approche. En effet, pour $\psi : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{t \to 0} \psi(t) \log(1/t) = \infty$, on peut construire f non identiquement nulle dans $\mathcal{D}$ avec une infinité de zéros dans $\Omega(\zeta) := \{z : |z - \zeta| < \psi(1 - |z|)\}$, et ce pour chaque $\zeta \in \mathbb{T}$. Ainsi, si $\lim_{z \to \zeta, z \in \Omega(\zeta)} f(z)$ existe, alors cette limite vaut 0 et ceci ne peut arriver que pour ζ dans un ensemble de mesure nulle. Cet argument est pris dans [30].

Le fait que la capacité nulle est optimale dans (i) peut se démontrer via une modification d'une construction de Carleson dans [8]. La construction montre que pour $E \subset \mathbb{T}$

compact et de capacité logarithmique nulle, il existe f telle que $\lim_{r\to 1}|f(r\zeta)| = \infty$ pour chaque $\zeta \in E$. En raffinant un peut la construction, on peut obtenir un résultat partielle (voir [17]) pour une réciproque partielle à l'inégalité capacitaire forte. On notera par d la longueur d'arc sur $\mathbb{T}$ et $E_t := \{\zeta \in \mathbb{T} : d(\zeta, E) \leq t\}$.

Théorème 4.6.4. *Soit $E \subsetneqq \mathbb{T}$ et $\eta : (0, \pi] \to (0, \infty)$ une fonction continue et décroissante telle que $\eta(0) := \lim_{t\to 0^+} \eta(t) = \infty$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) Il existe $f \in \mathcal{D}$ telle que

$$\liminf_{z\to\zeta} |f(z)| \geq \eta(d(\zeta, E)) \qquad (\zeta \in \mathbb{T}).$$

(ii) Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe $f \in \mathcal{D}$ telle que $|\Im f| < \epsilon$ sur $\mathbb{D}$ et

$$\liminf_{z\to\zeta} \Re f(z) \geq \eta(d(\zeta, E)) \qquad (\zeta \in \mathbb{T}).$$

(iii) La fonction η satisfait

$$\int_0^\pi c(E_t)|d\eta^2(t)| < \infty.$$

Démonstration. Que (ii) implique (i) est évident et que (i) implique (iii) se déduit facilement de l'inégalité capacitaire forte. En effet, si f satisfait (i), alors on a que $|f^*| \geq \eta(t)$ quasi-partout sur E_t et donc

$$\int_0^\pi c(E_t)|d\eta^2(t)| \leq \int_0^\pi c^*\left(\{|f^*| \geq \eta(t)\}\right)|d\eta^2(t)| = \int_{\eta(\pi)}^\infty c^*\left(\{|f^*| \geq s\}\right) ds^2,$$

la dernière intégrale étant finie par l'inégalité capacitaire forte. Pour l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii), on peut se référer à [16, pages 42 à 44]. $\square$

L'équivalence entre (i) et (iii) montre que, sous certaines hypothèses, l'inégalité capacitaire forte est optimale. On peut montrer [17, pages 84 et 85] qu'on a (iii) si

$$\int_0^1 |E_t|\eta'(t)^2\, dt < \infty. \tag{4.6}$$

Ainsi, (4.5) est une condition suffisante pour (i) et (ii). Nous concluons ce mémoire en présentant une preuve directe de ce fait quand η est convexe. Ceci est une conséquence directe du résultat suivant.

Théorème 4.6.5. *Soit E un ensemble fermé de $\mathbb{T}$ et $\eta : (0,2] \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe et décroissante. Si (4.5) tient, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{D}$ telle que pour $z \in \mathbb{D}$,*

$$\Re f(z) \geq \eta(dist(z,E)). \tag{4.7}$$

Démonstration. Soit $g : \mathbb{A} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(w) := -3w\eta'(\mathrm{dist}(w,e)/3).$$

Montrons d'abord que $g \in L^2(\mathbb{A})$. En écrivant $w = re^{i\theta}$ et dénotant par d la longueur d'arc, on a

$$\mathrm{dist}(w,E) \geq \max\{(r-1),(2/\pi)d(e^{i\theta},E)\} \geq (r-1)/2 + d(e^{i\theta},E)/\pi.$$

Ainsi, comme $|\eta'(t)|$ est une fonction décroissante, on trouve que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{A}} |g(w)|^2 \, dA(w) &\leq \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=1}^{2} 9r^2 \left|\eta'\left(\frac{r-1}{6} + \frac{1}{3\pi}d(e^{i\theta},E)\right)\right|^2 r\,dr\,d\theta \\ &\leq 72\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{t=d(e^{i\theta},E)/3\pi}^{1} |\eta'(t)|^2\,dt \\ &= 72\int_{t=0}^{1}\int_{d(e^{i\theta},E)/3\pi\leq t} |\eta'(t)|^2\,d\theta\,dt \\ &= 72\int_{t=0}^{1} |E_{3\pi t}||\eta'(t)|^2\,dt \\ &\leq 216\pi\int_{t=0}^{1} |E_t||\eta'(t)|^2\,dt.\end{aligned}$$

Par (4.5), cette intégrale est finie, ce qui montre que $g \in L^2(\mathbb{A})$. Posons maintenant $f := \mathcal{C}g + \eta(1/3)$. Le théorème 4.2.2 nous affirme que $f \in \mathcal{D}$. Montrons maintenant que f est la fonction recherchée. De façon explicite, pour $z \in \mathbb{D}$, on a

$$f = \eta(1/3) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{A}}\left(\frac{3w}{w-z}\right)|\eta'(\mathrm{dist}(w,E)/3)|\,dA(w).$$

Si on démontre le résultat pour $z = x \in [0,1)$, alors le théorème sera démontré. En effet, en écrivant $z = xe^{i\theta}$ pour $x \in [0,1)$ et f_E pour la fonction satisfaisant (4.6) pour E, on a

$$\Re f_E(z) = \Re f_{e^{-i\theta}E}(x) \leq \eta(\mathrm{dist}(x,e^{-i\theta}E)) = \eta(\mathrm{dist}(z,E)).$$

De plus, comme l'expression $\Re(w/(w-x))$ est positive pour $x \in \mathbb{A}$, alors $\Re f(x) \geq \eta(1/3)$, donc (2.6) est certainement vérifié si $\mathrm{dist}(x,E) \geq 1/3$.

Supposons donc que $z = x \in [0,1)$ et que $\mathrm{dist}(x,E) < 1/3$. Faisons aussi le changement de variable $w = x + \rho e^{i\phi}$. Il est clair que si $2\mathrm{dist}(x,E) < \rho < 1$ et $0 < \phi < \pi/3$, alors $w \in \mathbb{A}$. En effet, on obtient que

$$|x + \rho e^{i\theta}| \leq x + \rho < 2$$

et

$$|x + \rho e^{i\theta}| \geq x + \rho \cos\phi \geq x + \mathrm{dist}(x,E) \geq 1.$$

De plus, $\mathrm{dist}(w,E) \leq \mathrm{dist}(x,E) + \rho$ et

$$\begin{aligned}
\rho\Re(3w/(w-x)) &= 3\rho + 3\Re(xe^{-i\phi}) \\
&\geq 6\mathrm{dist}(x,E) + \frac{3x}{2} \\
&\geq 6(1-x) + \frac{3x}{2} = 6 - \frac{9x}{2} \geq 1,
\end{aligned}$$

d'où $\Re(3w/(w-x)) \geq 1/\rho$.

Ainsi, après le changement de variable et en posant provisoirement $a = \frac{\mathrm{dist}(x,E)+\rho}{3}$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Re f(x) &\geq \eta(1/3) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{2\mathrm{dist}(x,e)}^1 \frac{1}{\rho}|\eta'((\mathrm{dist}(x,E)+\rho)/3)|\rho\, d\rho\, d\phi \\
&= \eta(1/3) + \frac{1}{3}\int_{2\mathrm{dist}(x,e)}^1 |\eta'((\mathrm{dist}(x,E)+\rho)/3)|\, d\rho \\
&= \eta(1/3) + \int_{\mathrm{dist}(x,E)}^{\frac{\mathrm{dist}(x,E)+1}{3}} -\eta'(a)\, da \\
&= \eta(1/3) + \eta(\mathrm{dist}(x,E)) - \eta\left(\frac{\mathrm{dist}(x,E)+1}{3}\right) \\
&\geq \eta(\mathrm{dist}(x,E)),
\end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration. $\square$

Conclusion

Dans le premier chapitre, nous avons d'abord fait un survol des résultats classiques portant sur les fonctions harmoniques et sous-harmoniques. Ensuite, nous avons introduit la capacité selon Choquet. Au coeur de ce chapitre se trouve le théorème 1.4.1 ainsi que le corollaire 2.3.4. En effet, à eux deux, ils nous informent que les ensembles boréliens sont capacitables.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous avont présenté le potentiel, l'énergie et la capacité définis sur un espace métrique compact selon un noyau K. Nous avons d'abord présenté la capacité sur un compact, puis généralisé notre définition à un ensemble quelconque par la capacité intérieure, puis la capacité extérieure. Ensuite, le théorème 2.3.2 nous a assuré de l'existence d'une mesure d'équilibre pour chaque sous-ensemble compact, ce théorème étant plus ou moins une conséquence directe du théorème de Banach-Alaoglu. L'existence d'une mesure d'équilibre nous a permis de démontrer le théorème de Frostman connu aussi sous le nom de théorème fondamental de la théorie du potentiel. La dernière section de ce chapitre a été dévouée au cas particulier de la capacité logarithmique sur $\mathbb{T}$. Nous avons donné une borne inférieure à la capacité d'un borélien dépendant de la mesure d'arc de celui-ci. Ce résultat nous a entre autre permis de déduire qu'un ensemble de capacité logarithmique nulle possède nécessairement une mesure de Lebesgue nulle.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes attardé à trois familles de capacités sur $\mathbb{T}$. Nous avons déduit comme corollaire au théorème 3.1.4 qu'une L^2-capacité nulle impliquait aussi une mesure de Lebesgue nulle. Nous avons ensuite défini le potentiel capacitaire et montré que pour chaque $E \subset \mathbb{T}$, celui-ci existait et était unique. Le clou de cette section fut de montrer que cette capacité était bel et bien une capacité selon Choquet, bref que chaque sous-ensemble analytique de $\mathbb{T}$ était capacitable. La section suivante fut dévouée à la démonstration du principe du minimax de von Neumann. La capacité duale fut par la suite présentée et le théorème 3.3.5 nous montra un lien fort entre celle-ci et la L^2-capacité pour les boréliens. La section 3.4 a servi à présenter la capacité classique via la convolution. Le théorème 3.4.11 nous a enfin permis de lier toutes les capacité présentées dans ce chapitre. Nous avons finalement discuté des ensembles de Cantor généralisés sur $\mathbb{T}$ et de leurs capacités respectives.

Le dernier chapitre fut dévoué entièrement à l'espace de Dirichlet classique. Nous avons d'abord montré que cet espace était un sous-espace propre de $H^2(\mathbb{D})$, puis que celui-ci etait un espace de Hilbert avec la norme considérée. Nous avons ensuite terminé la section 4.1 avec la présentation de la fameuse formule de Douglas, laquelle nous a permis de montrer que pour $f \in \mathcal{D}$ et presque chaque $\zeta \in \mathbb{T}$, on a que $f(z) \to f^*(\zeta)$ quand $z \to \zeta$ dans chaque région oricyclique $|z - \zeta| < \kappa(1 - |z|)^{1/2}$. Dans la deuxième section, nous avons discuté de la transformée de Cauchy et obtenu un théorème de représentation pour l'espace de Dirichlet par des fonctions de $L^2(\mathbb{A})$. La section 5.3 fut déterminante puisqu'on y a démontré le fameux théorème de Beurling. Subséquemment, nous en avons déduit l'inégalité capacitaire faible, puis en raffinant un peu notre analyse, nous avons démontré l'inégalité capacitaire forte. Dans la section 4.5, nous avons démontré le théorème 4.5.1 dû à Nagel, Rudin et Shapiro. Pour les fins de cette démonstration, nous avons d'abord présenté la fonction d'Hardy-Littlewood et remarqué qu'elle satisfait une inégalité de type faible. Pour terminer, dans la dernière section du mémoire, nous avons discuté de l'optimalité des résultats sur la comportement au bord des fonctions de l'espace de Dirichlet, particulièrement par rapport au théorème de Beurling et à l'inégalité capacitaire forte.

Ce travail avait donc pour but de présenter une introduction à la capacité et à l'espace de Dirichlet. Nous espérons que ce but soit atteint et que le présent mémoire puisse servir dans l'avenir de base pour tout étudiant voulant poursuivre des études plus poussées concernant ces fascinants sujets. En espérant qu'il sache inspirer les esprits vifs de demain.

Bibliographie

[1] D.R. Adams and L.I. Hedberg. *Function spaces and potential theory.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin, 1996.

[2] Lars V. Ahlfors. *Conformal invariants : topics in geometric function theory.* McGraw-Hill Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill Book Co., New York, 1973.

[3] H. Aikawa and M. Essen. *Potential theory - selected topics.* Graduate Texts in Mathematics. Springer, Berlin, 1996.

[4] D.H. Armitage and S.J. Gardiner. *Classical potential theory.* Springer, London, 2001.

[5] John B. Conway. *Function of one complex variable I*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, deuxième edition edition, 1978.

[6] Carlos A. Berenstein and Roger Gay. *Complex variables*, volume 125 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] Arne Beurling. *Étude sur un problème de majoration.* Thèse de Doctorat. Uppsala University, 1933.

[8] Lennart Carleson. Set of uniqueness for functions regular in the unit circle. *Acta Math.*, 87 :325–345, 1952.

[9] Lennart Carleson. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. *Ann. of Math.(2)*, pages 76 : 547–559, 1962.

[10] Lennart Carleson. *Selected problems on exceptional sets*, volume 13 of *Van Nostrand Mathematical Studies.* D.Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[11] Jean-Pierre Demailly. Potential theory in several complex variables. Université de Grenoble I, 1995.

[12] J.L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. Springer, New York, 1984.

[13] Jesse Douglas. Solution of the problem of Plateau. *Trans. Amer. Math. Soc.*, (33) :263–321, 1931.

[14] Peter L. Duren. *Theory of H_p spaces*, volume 13 of *Pure and Applied Mathematics, 38*. Academic Press Inc., 1970.

[15] Omar El-Fallah, Karim Kellay, Javad Mashreghi, and Thomas Ransford. A self-contained proof of the strong-type capacitary inequality for the Dirichlet space. *Complex Analysis and Potential Theory,CRM proc.Lecture Notes*, 555 :1–20, 2011.

[16] Omar El-Fallah, Karim Kellay, Javad Mashreghi, and Thomas Ransford. *A primer on the Dirichlet space*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, à paraître.

[17] Omar El-Fallah, Karim Kellay, and Thomas Ransford. Cyclicity in the Dirichlet space. *Ark.Mat.*, 44 :61–86, 2006.

[18] Otto Frostman. *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions*. Thèse de doctorat. Meddel.Lunds Univ. Mat. Sem., 1935.

[19] J.B. Garnett and Donald E. Marshall. *Harmonic measure*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[20] W.K. Hayman and P.B. Kennedy. *Subharmonic functions, Vol I.*, volume 9 of *London Mathematical Society Monographs*. Academic Press, London, 1976.

[21] L.L. Helms. *Introduction to potential theory*. Robert E. Krieger, Huntington NY, 1975.

[22] Einar Hille. *Analytic function theory, Vol.II*. Introduction to Higher Mathematics, Boston, Mass - New York - Toronto, Ont., 1962.

[23] Jean-Pierre Kahane and Raphaël Salem. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Hermann, deuxième édition edition, 1994.

[24] Karim Kellay and Javad Mashreghi. Capacity. Ébauche non publiée, 2013.

[25] Paul Koosis. *Introduction to H_p spaces*, volume 28 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[26] Paul Koosis. *The logarithmic integral*, volume II. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[27] N.S. Landkof. *Foundation of modern potential theory*. Springer-Verlag, New York, 1972. Traduit du russe en anglais par A.P. Doohovskoy, Die Grundlehren der mathematischen Wissenchaften, Band 180.

[28] Javad Mashreghi. *Representation theorems in Hardy Spaces*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[29] N.G. Meyers. A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes. *Math. Scand.*, 26 :255–292, 1970.

[30] A. Nagel, W. Rudin, and J. Shapiro. Tangential boundary behavior of functions in Dirichlet-type spaces. *Ann. of Math. (2)*, (65) :331–360, 1982.

[31] Z. Nehari. *Conformal mapping*. Dover, New York, 1975.

[32] Ch. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*. Springer, Berlin, 1992.

[33] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[34] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, troisième edition, 1987.

[35] Edward B. Saff and Vilmos Totik. *Logarithmic potentials with external fields*, volume 316 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-verlag, Berlin, 1997.

[36] M. Tsuji. *Potential theory in modern function theory*. Chelsea Publishing Co., New York, 1975.

[37] J.B. Twomey. Tangential boundary behaviour of harmonic and holomorphic functions. *J.London Math.Soc.*, 2(65) :68–84, 2002.