UNIVERSITÉ LAVAL

CONTRIBUTIONS AU DEVELOPPEMENT DE POLITIQUES DE REMPLACEMENT PREVENTIF POUR DES SYSTEMES MULTI-COMPOSANTS

Thèse

Zouheir Malki

Doctorat en génie mécanique
Philosophiæ doctor (Ph. D.)

Québec, Canada

© Zouheir Malki, 2017

CONTRIBUTIONS AU DEVELOPPEMENT DE POLITIQUES DE REMPLACEMENT PREVENTIF POUR DES SYSTEMES MULTI-COMPOSANTS

Thèse

Zouheir Malki

Sous la direction de

Daoud Ait Kadi, directeur de recherche
Mohamed-Salah Ouali, codirecteur de recherche

Résumé

Dans cette thèse, nous proposons de développer des politiques de remplacement préventif pour des systèmes multi-composants. Ces systèmes sont composés de plusieurs composants selon une configuration bien déterminée et dont l'état se dégrade d'une manière aléatoire. Les politiques de remplacement définissent les actions à entreprendre en fonction de l'état du système ou de ses composants et ont pour objectif de retarder l'apparition des pannes et de prolonger la durée de vie du système. Sur le plan théorique, la généralisation des modèles de remplacement des systèmes mono-composants à des systèmes multi-composants n'est pas évidente. La difficulté réside essentiellement dans l'existence d'interaction ou de dépendance entre les différents composants du système.

Nous nous sommes concentrés dans cette thèse sur les dépendances stochastique et économique entre les composants. Pour la dépendance stochastique, la propagation de la panne a été modélisée par l'effet domino pour un système parallèle à deux composants. Nous avons proposé deux politiques de remplacement de type Age. Dans la première politique, nous avons supposé que la structure des coûts est constante alors que dans la deuxième politique cette hypothèse a été modifiée en prenant une structure de coûts variable. Nous avons aussi proposé dans le cadre de la dépendance stochastique un modèle de remplacement bi-objectif qui optimise à la fois le coût espéré du remplacement et la disponibilité du système. Pour la dépendance économique, nous avons proposé une politique de remplacement basée sur le comptage des pannes pour un système parallèle et nous l'avons intégrée dans un modèle d'allocation de la redondance d'un système série-parallèle. Le modèle mathématique a été résolu par une approche heuristique basée sur l'algorithme du recuit simulé.

Abstract

The aim of this thesis is to develop preventive replacement policies for multi-component systems. Systems are composed of several components connected under a known configuration and subject to random failures. Each replacement policy defines the actions to be taken according to the state of the system or its components and it is intended to delay the occurrence of failures and extend the lifetime of the system. From the theoretical point of view, the extension of replacement models from single-component systems to multi-component systems is not obvious. The difficulty is due primarily to the interaction or dependence between the different components of the system.

In this thesis the focus has been put on the stochastic and economic dependencies between components. For stochastic dependence the propagation of the failure is modeled by the domino effect for a two-component parallel system, and two age replacement policies are investigated. In the first policy, we assumed that the cost structure is constant whereas in the second policy a variable cost structure is assumed. We proposed also a bi-objective replacement model that optimizes both expected replacement cost rate and system availability. For economic dependence, we proposed a failure counting replacement policy for a parallel system and we integrated it in a redundancy allocation model for a serie-parallel system. The mathematical model has been built taking account of this policy and Simulated Annealing algorithm has been used as resolution approach.

TABLE DES MATIÈRES

RESUME ..... **III**

ABSTRACT ..... **IV**

LISTE DES TABLEAUX ..... **VII**

LISTE DES FIGURES ..... **VIII**

REMERCIEMENTS ..... **IX**

AVANT PROPOS ..... **X**

1.1 CLASSIFICATION DES POLITIQUES DE REMPLACEMENT 4
1.2 POLITIQUES DE REMPLACEMENT DES SYSTEMES MONO-COMPOSANT 9
1.2.1 Politique de remplacement de type Âge *9*
1.2.2 Politique de remplacement périodique *10*
1.2.3 Politique de type limite de défaillance (Failure limit policy) *12*
1.2.4 Politique de remplacement séquentiel *13*
1.2.5 Politique de type limite de réparation (Repair limit policy) *13*
1.2.6 Politique basée sur le comptage du nombre de réparations *14*
1.3 POLITIQUES DE REMPLACEMENT DES SYSTEMES MULTI-COMPOSANTS 15
1.3.1 Le cas de la dépendance stochastique *15*
1.3.2 Le cas de la dépendance économique *19*
1.3.3 Le cas de la dépendance structurelle *27*
1.4 CONCLUSION 27

CHAPITRE 2: AGE REPLACEMENT POLICIES FOR TWO-COMPONENT SYSTEMS WITH STOCHASTIC DEPENDENCE **28**

2.1 INTRODUCTION 30
2.1.1 Stochastic Dependence Modeling *31*
2.1.2 Replacement Policies *32*
2.2 AGE REPLACEMENT POLICY I WITH CONSTANT COST STRUCTURE 34
2.3 AGE REPLACEMENT POLICY II WITH NO-CONSTANT COST STRUCTURE 40
2.4 CONCLUSION 42

CHAPITRE 3: MULTICRITERIA DECISION ANALYSIS FRAMEWORK FOR PREVENTIVE REPLACEMENT POLICY **46**

3.1 INTRODUCTION 48
3.2 REPLACEMENT POLICY MODEL 50
3.3 AGGREGATING ATTRIBUTES WITH MAUT 53
3.4 ILLUSTRATIVE EXAMPLE 54
3.5 CONCLUSION 57

CHAPITRE 4: REDUNDANCY ALLOCATION PROBLEM FOR SERIES-PARALLEL SYSTEM SUBJECT TO A PREVENTIVE REPLACEMENT POLICY **60**

4.1 INTRODUCTION 62
4.1.1 Problem Description *62*
4.1.2 Literature review *63*
4.1.3 Paper outline *65*
4.2 PROBLEM FORMULATION AND MODELING 65
4.2.1 Mathematical model *66*
4.2.2 m-failure replacement policy *67*
4.2.3 Calculation of reliability function *69*
4.3 SOLVING THE RAP BY USING SIMULATED ANNEALING 70
4.4 ILLUSTRATIVE EXAMPLE 72
4.5 CONCLUSION 76

CHAPITRE 5 : CONCLUSION GENERALE **80**

BIBLIOGRAPHIE..... 84

LISTE DES TABLEAUX

Table 1. 1 : Nombre de publications entre 1972 et 1994 dans les domaines de la fiabilité et la maintenance…5
Table 1. 2: Politique de type Âge et quelques extensions…….. 10
Table 1. 3: Politique de remplacement périodique et quelques extensions…… 12
Table 1. 4: Politique de remplacement de type limite de défaillance…… 13
Table 1. 5: Politique de remplacement de type limite de réparation…… ….14

Table 2. 1 : Results for optimal policy I……..38
Table 2. 2 : Optimal solution in the case of $\lambda 1 < \lambda 2$……...39
Table 2. 3 : Optimal policy II compared with the case where Cp is constant……51

Table 3. 1: Sensitivity analysis of the model 56

Table 4. 1: Component parameters……73
Table 4. 2: Optimal Design in the both cases Model I and Model II……...74

LISTE DES FIGURES

Figure 1. 1: Différents facteurs à prendre en compte dans la définition d'une politique de remplacement..... 7
Figure 1. 2: Effet domino et défaillance par cause commune..... 16

Figure 2. 1 : $C(T)$ graphic curves for Cc/Cp = 10 and Tc/Tp = 2 and multiple values of p..... 38
Figure 2. 2: $C(T)$ graphic curves in the case of $\lambda 1 \leq \lambda 2$..... 39
Figure 2. 3 : $C(T)$ if Cp depends on T..... 42
Figure 2. 4 : $C(T)$ if Cp is constant with p = 0.7..... 42

Figure 3. 1: $C(T)$ graphic curve..... 55
Figure 3. 2 : $A(T)$ graphic curve..... 55

Figure 4. 1: Series-parallel system..... 63
Figure 4. 2: During the horizon H, each stage j will be replaced at T_j, $2T_j$, …, p_jT_j..... 69
Figure 4. 3: An overview of the algorithm iteration..... 72
Figure 4. 4: Reliability of the system vs budget in both models..... 74
Figure 4. 5: Reliability of the system vs the horizon H..... 75

Remerciements

Je tiens à remercier mon directeur de recherche, le Pr. Daoud Ait Kadi d'avoir accepté de diriger les travaux de cette thèse. Je le remercie pour son soutien inconditionnel, son engagement et sa confiance qu'il m'a accordée tout au long de ce travail.

J'aimerais aussi exprimer ma grande reconnaissance à mon co-directeur de recherche, le Pr. Mohamed-Salah Ouali pour son implication, son accueil et ses précieux conseils.

J'adresse aussi mes remerciements au Pr. Eric Niel et au Pr. Anis Chelbi qui ont bien accepté d'évaluer les travaux de ma thèse. Je remercie également le Pr. Nabil Nahas avec qui j'ai partagé des moments de réflexion au sujet de ma thèse.

Je dédie cette thèse à ma chère femme, Loubna. Sans son aide, ses encouragements, sa patience et ses sacrifices cette thèse n'a probablement pas pu aboutir. Je dédie cette thèse aussi à mes trois filles : Maryam, Marwa et Khadija qui ne cessent de me procurer chaque jour le sentiment de joie et de bonheur.

Enfin, je dédie cette thèse à mes chers parents, pour leur amour et leur dévouement tout au long de ma vie.

Avant propos

Dans cette thèse, nous développons des politiques de remplacement préventif pour des systèmes multi-composants sujets à des défaillances aléatoires. Ces systèmes sont constitués de plusieurs composants ou de sous-systèmes selon une configuration bien déterminée. Une grande majorité des modèles de politiques de remplacement considéraient le système étudié comme une seule entité (one-unit ou single-unit), cela signifie que le système étudié se comporte en ne tenant compte que de sa performance globale (par exemple : fiabilité globale ou taux de panne global) et non pas de la performance individuelle de chacun de ses composants. Les politiques ainsi développées sont appliquées sur tout le système à la fois.

Le progrès technologique des dernières décennies a contribué à la conception et à la fabrication de systèmes complexes. Les avions modernes et les engins aérospatiaux contiennent des milliers de composants. La complexité de ces systèmes pose deux défis majeurs, le premier est la détermination de la fiabilité de ses systèmes en vue d'accomplir la mission pour laquelle ils ont été conçus. Le deuxième défi, plus important, est étroitement lié au premier, il s'agit du développement des politiques de remplacement pour ces systèmes complexes. Plusieurs modèles ont été ainsi développés et prenaient différentes appellations : politiques de remplacement de groupe, politiques de remplacements opportunistes,… etc. Mais sans perte de généralité, une grande majorité de ces modèles supposaient l'indépendance des composants ou les sous-systèmes qui forment le système étudié. Cette hypothèse traduit l'absence d'interaction entre les composants. En d'autres termes, les composants n'interagissent pas et ne s'influencent pas mutuellement.

Une conséquence directe de cette hypothèse est qu'on peut effectuer une politique de remplacement sur un composant séparément des autres composants du système, et que l'optimalité de toutes les politiques effectuées sur les composants garantit forcément l'optimalité de celle effectuée sur tout le système (*la somme d'optimums locaux est égale à un optimum global*). En réalité, cette hypothèse d'indépendance n'est pas toujours vérifiée puisque les composants interagissent entre eux et sont par conséquent *dépendants*. Nous distinguons trois types d'interaction ou de dépendance entre composants : (i) Dépendance stochastique (ii) Dépendance économique (iii) Dépendance structurelle.

L'existence donc de ces dépendances rend impossible la généralisation des politiques de remplacement sur des systèmes mono-composant à des systèmes multi-composants. Nous

entendons bien évidement cette impossibilité dans le sens de l'optimalité. Notre revue de la littérature sur les politiques de remplacements des systèmes multi-composants fait ressortir les deux remarques suivantes:

- La grande majorité des travaux s'intéresse au cas de la dépendance économique, peu de travaux ont été dédiés à la dépendance stochastique et une quasi-absence du cas de la dépendance structurelle,
- Les modèles proposés ne traitent qu'une seule dépendance à la fois.

Nous proposons ainsi dans cette thèse, le développement de nouvelles politiques de remplacement pour des systèmes multi-composants en tenant compte des différentes interactions ou dépendances considérées.

Cette thèse est rédigée selon le principe d'insertion d'articles. Après une revue de la littérature des différents modèles de remplacement des systèmes mono-composants et multi-composants, les contributions de cette thèse s'articulent autour de trois articles qui sont publiés ou encours d'évaluation. La première contribution traite le cas de la dépendance stochastique et a fait l'objet d'un papier intitulé : *Age replacement policies for two-component systems with stochastic dependence*. Cet article a été cosigné avec Pr. D. Ait-Kadi et Pr. M-S. Ouali et a été publié au Journal of Quality in Maintenance Engineering, Vol. 21 Iss 3 pp. 346 – 357 (2015). Cette contribution a reçu le prix du deuxième meilleur papier lors de la cinquième IEEE International Conference on Industrial Engineering and Systems Management (IESM) tenue en octobre 2013 à Rabat – Maroc.

La deuxième contribution propose de tenir compte des deux critères d'optimisation à la fois, à savoir le coût du remplacement et la disponibilité du système dans un modèle de remplacement préventif d'un système parallèle en dépendance stochastique. Le modèle proposé est basé sur l'aide multicritère à la décision. L'approche de résolution utilise la fonction d'utilité multi-attributs. Le papier est intitulé : Multicriteria Decision Analysis Framework for Preventive Replacement Policy. Cette contribution est en cours d'évaluation à l'International Journal of Production Economics (IJPE) sous la référence IJPE-D-17-00007. Elle est cosignée avec Pr. D. Ait-Kadi et Pr. L. Benabbou.

La troisième contribution est liée au cas de la dépendance économique. Nous avons traité dans cette contribution le problème de conception d'un système série-parallèle sujet à une politique de remplacement de type *m*-pannes. L'article intitulé: *''Redundancy allocation problem for series-parallel system subject to a preventive replacement policy''* est en cours d'évaluation au journal *Reliability*

Engineering and System Safety (RESS) sous la référence RESS_2016_272. Il est cosigné avec le Pr. D. Ait-Kadi et Pr. N. Nahas.

Dans l'ensemble de ces contributions, la démarche adoptée consiste à définir la politique de remplacement préventif sur le système étudié. Ceci implique directement l'introduction de variables de décision (âge du système, nombre de pannes, …etc). Des hypothèses ont été considérées pour pouvoir développer les modèles et bien délimiter leur périmètre. Ces hypothèses consistaient généralement à définir et fixer : la structure du système étudié, la loi de sa dégradation, l'horizon de planification, la structure des coûts et la disponibilité des ressources. Le modèle mathématique consiste à établir et calculer le critère d'optimisation en fonction des variables de décision et les autres paramètres du modèle. Le modèle développé permet aussi de spécifier les conditions d'existence et d'unicité d'une solution optimale. La résolution se fait en dernier lieu soit d'une manière numérique ou par le recours à des heuristiques.

Pour chacune de ces trois contributions, j'ai agi comme auteur principal. J'ai ainsi développé les modèles de remplacement préventif des systèmes considérés. J'ai également proposé les approches de résolution et d'optimisation. J'ai aussi analysé, traité et interprété les résultats obtenus. En fin, je me suis chargé de la rédaction des articles ainsi que le suivi des révisions jusqu'à l'acceptation des articles dans les différents journaux ou revues.

Chapitre I : Introduction générale

Lors de la 4ème conférence on *Mathematical Methods in Reliability* (MMR) à Santa-Fe aux États-Unis en juin 2004, le Pr. Nozer Singpurwalla de George Washington University a donné une conférence intitulée : «*Is Reliability Theory still alive*? » (Ushakov, 2012). Dans son analyse, le Pr. Singpurwalla discute la ressemblance entre l'ingénierie de la fiabilité et la médecine. La différence est dans les objets d'application, des systèmes pour l'une et des humains pour l'autre. Pouvons-nous imaginer un jour que la médecine soit ‘*'fatiguée"* ou encore ‘*'épuisée".*

Dans Ushakov (2012), la réponse à cette question est évidement positive, la théorie de la fiabilité est toujours vivante, mais la bonne question à poser est : « *Is Reliability Theory still developped* ? ». La réponse est aussi affirmative car le développement de nouvelles méthodes et de nouveaux outils de modélisation et de résolution permet à la fois de comprendre et de répondre à des problématiques de plus en plus complexes.

Dans une autre analyse critique des modèles de maintenance, le Pr. Frank Beichelt (2012) écrivait :

> The models analyzed have become more and more artificial, and the majority of them have no real chance of ever being applied; since they lack a genuine connection to the industrial reality. The reason for this situation is that maintenance policies just as many other mathematical models of operations research need to be tailored to the specific practical situation. For that purpose, however, general but simply structured theoretical models classes in maintenance theory have proved to be very helpful.

En effet, cette critique s'explique qu'au début du développement de la théorie de la fiabilité, cette dernière était traitée principalement par les mathématiciens et les statisticiens. Ces derniers utilisaient principalement la théorie des files d'attente ou les probabilités pour traiter les problèmes de la fiabilité. Ce n'est qu'à partir de 1961 que la fiabilité a été considérée comme une discipline à part. Cette date correspond à la publication de l'article de Birnbaum et *al* (1961) : *Multi-component systems and their structures and their reliability.*

La relation entre la maintenance et la fiabilité est très étroite. En effet, la définition et la mise en application d'une politique de remplacement d'un composant ou d'un ensemble de composants nécessitent absolument la connaissance de sa loi de dégradation. Sur le plan

théorique et comme dans la théorie de la fiabilité, les modèles analytiques de remplacements préventifs nous aident à décrire et à comprendre certains aspects de la réalité complexe. De surcroit, cette complexité augmente si l'on veut dépeindre la réalité d'une manière plus précise. Une fois ces modèles formulés, nous appliquons des outils de résolution pour trouver des solutions, de cette façon nous visons, même d'une façon théorique, à augmenter l'efficacité de la maintenance.

Selon la norme AFNOR (NFX 60-010) (1994): « *la maintenance vise à maintenir ou à rétablir un bien dans un état spécifié afin que celui-ci soit en mesure d'assurer un service déterminé »*. Elle joue donc un double rôle qui est: la prévention (*maintenir*) et la correction (*rétablir*). La maintenance comprend deux types d'activités techniques et administratives. D'un côté, les activités *techniques* comprennent la réparation, le dépannage, le diagnostic ou l'inspection. D'un autre côté les activités administratives concernent : la gestion des ressources, la gestion des budgets, la gestion des pièces de rechange ou la gestion de l'information et de la documentation. La dernière norme NF EN 13306 X 60-319 (2001) conserve la même définition de la maintenance mais rajoute deux type d'activités: celles du *Management* et de la *Supervision*.

En général, la maintenance est organisée selon deux types d'actions: La *maintenance corrective* et la *maintenance préventive*. *La maintenance corrective* consiste à intervenir sur un équipement une fois que celui-ci est défaillant. La maintenance corrective regroupe aussi deux sous-catégories: (i) *La maintenance palliative qui* consiste à une action de dépannage pour permettre au système d'assurer totalement ou partiellement sa fonction requise. Elle relève d'un caractère provisoire. (ii) *La maintenance curative* qui est une réparation consistant en une remise en l'état initial de l'équipement. C'est une action durable.

Contrairement à la maintenance corrective, la maintenance préventive consiste à intervenir sur un équipement avant que celui-ci ne soit en état de non-fonctionnement ou hors d'usage. Elle peut aussi être subdivisée en deux sous-catégories: (i) *La maintenance systématique*: les actions liées à ce type de maintenance sont exécutées selon un calendrier établi sur la base d'un nombre prédéterminé d'unités d'usage (nombre d'heures, nombres de pièces produites, nombres de mouvements effectués,…etc). (ii) *La maintenance conditionnelle*: c'est une

maintenance réalisée à la suite de relevés, de mesures, de contrôles révélateurs de l'état de dégradation de l'équipement (l'analyse de vibration, l'analyse d'huile ou de pression,…etc.).

Pendant longtemps, la maintenance a été souvent peu lisible, souvent méconnue des décideurs et n'apparaissant pas directement dans la valeur ajoutée des bien produits par une entreprise. La maintenance a été souvent considérée comme un soutien à la production, *son principal client*, agissant ainsi comme un prestataire de service interne.

Actuellement, le monde de l'entreprise est en évolution constante. Cette évolution est caractérisée par un progrès technologique accéléré et des clients de plus en plus exigeants en termes de qualité, de prix et de service. Aussi, les entreprises d'aujourd'hui sont soumises à des contraintes de rentabilité de court terme et doivent faire face à une concurrence de plus en plus accrue. Pour rester compétitives, les entreprises doivent absolument maitriser des facteurs dits *techniques* et *économiques*. Disposer d'un outil de production fiable et performant est l'un des facteurs techniques les plus importants. Du point de vue économique, la maîtrise des coûts tout au long du cycle de vie des produits contribue significativement à l'amélioration de la rentabilité de l'entreprise.

C'est dans ce contexte que la maintenance prend toute son ampleur et se fait une place dans l'organisation des entreprises. En effet, il ne faut pas se limiter au rôle strict des services de la maintenance dans le dépannage (par exemple), mais aux coûts directs et indirects de la maintenance dans le calcul du coût du cycle de vie (Life Cycle Cost). Les conséquences d'une panne majeure peuvent engendrer des coûts excessifs pour l'entreprise comme : les coûts de perte de production, la dégradation de l'image de l'entreprise, les coûts de non-qualité, ou bien encore l'impact sur les conditions de travail. La maintenance est placée maintenant au cœur de l'outil de production au service de la productivité et de la qualité, et la performance industrielle passe aujourd'hui par une convergence d'objectif entre la production et la maintenance.

1.1 Classification des politiques de remplacement

Le nombre de publications dans les domaines de la fiabilité et de la maintenance a connu une croissance significative durant les quarante dernières années. Dans Özekici [43], le nombre enregistré entre 1972 et 1994 se présente dans la table 1.1.

Depuis lors, le nombre d'articles publiés n'a cessé d'augmenter, le nombre de sujets traités a aussi connu une diversification remarquable. Actuellement, ce nombre dépasse un million et demi de publications. Ceci démontre d'un côté l'importance acquise par ces deux domaines de recherche et d'un autre côté, la difficulté de donner une revue complète de tous les travaux réalisés y compris les plus récents.

Table 1. 1: Nombre de publications entre 1972 et 1994 dans les domaines de la fiabilité et la maintenance

Domaine	*Nombre de publications (1972 -1994)*
Fiabilité	**8 352**
Fiabilité / Statistiques	**3 769**
Maintenance	**1 909**

La maintenance est un sujet très vaste car elle englobe comme nous l'avons décrit avant plusieurs composantes : techniques, administratives et managériales. Dans cette thèse, nous nous focalisons sur les politiques de remplacement préventif qui est, à notre avis, l'aspect le plus important dans la composante technique de la maintenance. Notons aussi que nous avons choisi le terme *Politique* (au lieu du terme *Stratégie* qui est aussi couramment utilisé), nous utiliserons aussi le terme spécifique *Remplacement* au lieu du terme *Maintenance*.

Plusieurs travaux de la littérature avaient pour objectif de recenser les modèles développés et de les regrouper dans différentes catégories. Cette classification sert comme guide, à la fois pour les praticiens et les théoriciens pour reconnaître les modèles qui s'ajustent au mieux à leurs problèmes. Mais indépendamment de la classe de chaque politique de remplacement, plusieurs facteurs contribuent dans la définition de la politique et la modélisation du problème. Wang [69] reprend neuf facteurs principaux représentés dans la figure 1.1.

L'horizon de la planification est un facteur important dans la définition d'une politique de remplacement. Un horizon infini, ou stationnaire implique que les changements de politiques et de procédures sur cet horizon demeurent invariants. Autrement, toute information de court terme ne peut être incorporée dans la prise de décision. Cette information est relative, par exemple, à l'apparition d'une nouvelle technologie, à la fluctuation des coûts, et la disponibilité

des ressources. L'hypothèse de stationnarité facilite l'analyse mathématique de ces modèles. Il est souvent possible de dériver des expressions analytiques pour obtenir une politique optimale. Cependant, les modèles dynamiques sont aussi utilisés dans les modèles de remplacements de groupe que les politiques de remplacement opportunistes où des informations qui surviennent soudainement sont prises en considération (Wildeman and Dekker [71], Do Van et al [15], Zhou et al [75]). L'horizon de planification des modèles dynamiques est ainsi fini. La résolution de ces modèles exige des techniques plus élaborées que les modèles stationnaires.

La plupart des modèles rencontrés dans la littérature supposent que l'information est complète et certaine. Or en pratique, cette hypothèse n'est pas toujours respectée, par exemple : la structure des coûts et la distribution des durées de vie. En plus, certaines informations sont difficiles à obtenir. L'hypothèse que les remplacements sont effectués d'une manière parfaite et l'absence du phénomène d'attente est très idéaliste, car ceci suppose que les compétences du personnel de la maintenance sont toujours maintenues à leur niveau maximal, et que les pièces de rechange sont disponibles en tout moment. En réalité, ceci est loin d'être respecté. Les remplacements ne sont pas toujours parfaits, à cause par exemple du : manque de la qualification du personnel, le manque d'outillage, ou simplement une erreur humaine.

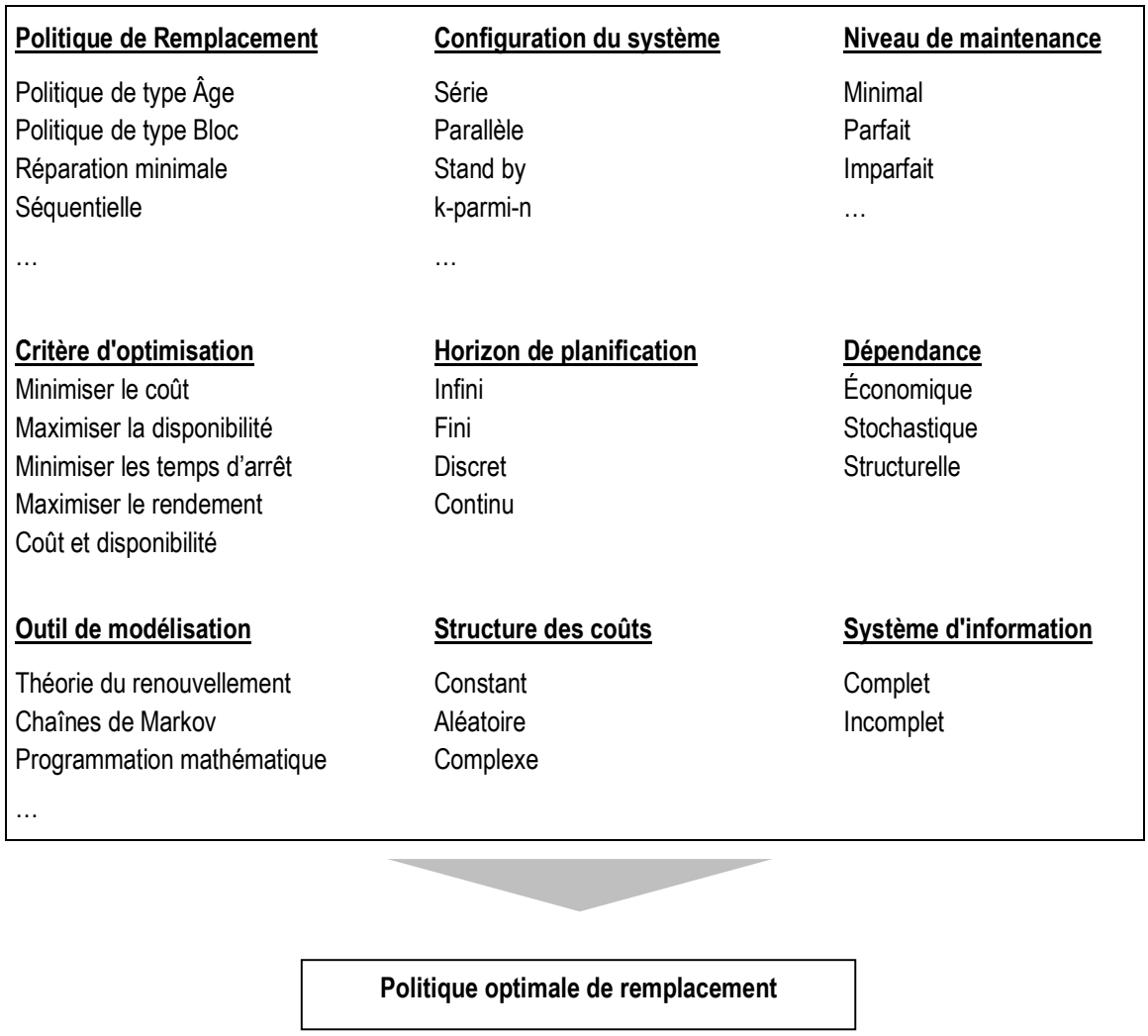


Figure 1. 1: Différents facteurs à prendre en compte dans la définition d'une politique de remplacement

Le critère d'optimisation ou la fonction objectif à optimiser est un autre facteur à considérer. À cause de l'importance de la minimisation des coûts, la grande majorité des modèles traitent la minimisation du coût moyen ou total des opérations de remplacement sur l'horizon considéré. Les modèles qui traitent la maximisation de la disponibilité sont souvent limités aux systèmes à un seul composant.

Une des références récentes dans le domaine de la fiabilité et de la maintenance est sans doute le livre de Nakagawa [33] : *Maintenance Theory of Reliability*. L'auteur propose la classification suivante des politiques de remplacement:

- La maintenance corrective,
- Le remplacement de type Âge,
- Le remplacement périodique,
- Le remplacement de type Block,
- La maintenance préventive,
- La maintenance préventive imparfaite,
- Les politiques d'inspection.

McCall [30] distingue deux catégories de modèles basés sur la connaissance de l'état du système. Les modèles de remplacement préventif supposent la connaissance parfaite de l'état du système, donc la disponibilité de l'information parfaite. Barlow et Proschan [3] et Pierskalla et Voelker [48] ont introduit une classification basée sur la continuité ou la discrétisation du temps. Valdez-Flores et Feldman [67] ont utilisé la classification suivante pour les systèmes mono-composants: les modèles d'inspection, les modèles de réparation minimale, les modèles de choc et autres modèles de remplacement.

Sherif et Smith [56] ont distingué entre les modèles déterministes et les modèles stochastiques. Dans les modèles stochastiques, ils ont fait la différence entre les modèles avec risque et les modèles avec incertitude. Cho et Parlar [11] subdivisent les modèles en cinq catégories : les modèles de réparation/ interférence machine, les modèles groupe/ bloc/ cannibalisation/ opportunisme, les modèles de gestion d'inventaire, les modèles d'inspection et autres modèles de maintenance. Enfin, Dekker et al [12] ont regroupé les modèles de maintenance en se basant sur la dépendance économique. Récemment, Sarkar et al [52] ont recensé tout l'historique des politiques de maintenance durant les cinquante dernières années, près de 180 références ont été citées dans cet article. Les auteurs ont catégorisé les modèles selon la nature du système étudié : système mono-composant et système multi-composants.

Ainsi, pour les systèmes mono-composants six classes ont été proposées :

- Le remplacement de type Âge,
- Le remplacement périodique,
- La politique de limite de défaillance (Failure limit policy),
- Le remplacement séquentiel,
- La politique de limite de réparation (Repair limit policy),

- Le comptage du nombre de réparations (Repair number counting).

Pour les systèmes multi-composants, les modèles de remplacement sont répartis comme suit :

- Les politiques de remplacement *de groupe*,
- Les politiques de remplacement *opportuniste*.

Dans la suite de cette section, nous passerons en revue les principales politiques développées dans les cas mono-composant et multi-composants. L'objectif est de mettre en évidence les principales caractéristiques de ces politiques, ses avantages et ses inconvénients.

1.2 Politiques de remplacement des systèmes mono-composant

1.2.1 Politique de remplacement de type Âge

La politique de remplacement de type Âge fut développée par Barlow and Hunter [2] et consiste à remplacer le système à la panne ou à l'instant T sans panne. Dans la majorité des cas étudiés de cette politique, les hypothèses suivantes sont considérées :

- Le système étudié ne peut occuper que deux états (en opération ou en panne),
- Les remplacements sont effectués d'une manière parfaite,
- Le système est remplacé par du neuf,
- Les pannes sont détectées instantanément (il n'y a pas d'inspection),
- Les phénomènes d'attente ne sont pas pris en compte,
- Les coûts liés aux remplacements sont supposés connus et constants,
- Le coût du remplacement à la panne est supérieur au coût de remplacement préventif.

Le critère d'optimisation souvent utilisé est le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Ce modèle est difficile à résoudre analytiquement, il est résolu numériquement. Barlow and Proschan [3] démontrent qu'une politique optimale de remplacement finie T^* n'existe que dans le cas où le taux de panne du système $r(t)$ est une fonction strictement croissante.

Plusieurs développements et extensions ont été introduits à la politique de type Âge et que nous résumons dans la table 1.2.

Nakagawa [34] a proposé une extension de cette politique qui consiste à remplacer le système à l'instant T ou après N défaillances. Entre les deux, le système subit une réparation minimale. Les variables de décision sont donc T et N. Si $N = 1$, cette extension se réduit à une politique de type âge.

Tahara et Nishida [63] ont proposé une autre extension qui consiste à remplacer le système si la première panne survient après t_0 ou si le système fonctionne sans panne jusqu'à l'instant $(0 \leq t_0 \leq T)$. Entre l'instant 0 et t_0, le système subit une réparation minimale. Si $t_0 = 0$, alors cette politique devient de type âge et si $t_0 = T$ elle devient une politique de remplacement périodique avec réparation minimale.

Table 1. 2: Politique de type Âge et quelques extensions

Politique	*Référence de base*	*Fréquence*	*Variable de décision*
Âge	Barlow et Hunter [2]	Instant fixe T	T
T, N	Nakagawa [34]	Instant fixe T ou à un nombre de défaillances N	T, N
T, t	Sheu et al [58]	Instant fixe T ou temps t	T, t
t_0, T	Tahara et Nishida [63]	Instant fixe T	t_0, T
Âge mixte	Pham et Wang [47]	Instant fixe T	T, n

Pham et Wang [47] ont introduit la politique dite Âge mixte. Le système subit deux types de panne, une panne totale (type 1) avec une probabilité $p(t)$ et une panne moins grave (type 2) avec une probabilité $q(t) = 1 - p(t)$ Après n réparations imparfaites, le système est remplacé à l'âge T ou à la première panne de type 1. Les variables de décision de cette politique sont n et T. Si $n = 0$ et $p(t) = 0$ alors cette politique se réduit au remplacement périodique avec réparation minimale. Si $n = 0$ et $p(t) = 1$ alors cette politique devient une politique de type âge.

1.2.2 Politique de remplacement périodique

La politique de remplacement périodique consiste à remplacer le système à la panne et à des instants prédéfinis kT (k = 1,2,…) et ce indépendamment de son état et de son âge. Sous la

politique de remplacement de type Bloc, le système est remplacé à la panne et aux instants prédéfinis kT (k =1,2,...). Elle tire son nom d'un bloc ou groupe de composants qui sont remplacés à la panne et aux instants kT (k = 1,2,...). Cette politique est plus coûteuse que la politique de type Âge (Barlow and Proschan [4]), mais elle est plus facile à mettre en place car les remplacements se font à des instants réguliers. La politique de type Âge nécessite un suivi continu de l'âge de l'équipement.

Plusieurs extensions ont été aussi développées pour cette politique. Ainsi, Berg et Epstein [8] l'ont modifiée en introduisant une limite d'âge. Les composants en panne sont remplacés par du neuf et les composants qui fonctionnent encore seront remplacés aux instants T, $2T$, $3T$, ... si leur âge ne dépasse la valeur t_0. Si $t_0 = T$ elle devient une politique de remplacement de type bloc. Nakagawa [35] a proposé trois extensions de la politique de remplacement périodique avec réparation minimale, ces trois politiques font appel à deux variables de décisions t_0 et T. Si la panne survient avant t_0 alors la réparation minimale est effectuée, si l'équipement fonctionne jusqu'à l'instant T il est remplacé à l'instant T. Mais si la panne survient entre t_0 et T alors:

- Politique 1 : l'équipement est laissé en état de panne jusqu'à son remplacement à l'instant T.
- Politique 2 : l'équipement est remplacé par un équipement de rechange jusqu'à l'instant T.
- Politique 3 : l'équipement est remplacé par du neuf.

Il est clair que si $t_0 = T$ ces trois politiques deviennent des politiques de remplacement périodiques avec réparation minimale.

Une autre extension a été proposée par Nakagawa [36] sur la politique de remplacement périodique avec réparation minimale en introduisant une autre variable de décision qui mesure le nombre total de pannes n. Si le nombre de pannes enregistrées est supérieur à n, le remplacement se fera au prochain instant planifié T. Si $n = \infty$ cette politique redevient une politique de remplacement périodique avec réparation minimale. La table 1.3 résume les différentes extensions développées pour cette politique.

Table 1. 3: Politique de remplacement périodique et quelques extensions

Politique	*Référence de base*	*Fréquence de remplacement*
Block	Barlow et Hunter [2]	Périodique
Remplacement périodique avec réparation minimale	Barlow et Hunter [2]	Périodique
Révision avec réparation minimale	Liu et al [23]	Périodique et ses multiples
(t_0, T) - politique 1	Nakagawa [35]	Périodique
(t_0, T) - politique 2	Nakagawa [35]	Périodique
(t_0, T) - politique 3	Nakagawa [35]	Périodique
(n, T)	Nakagawa [35]	Périodique
(r, T)	Tango [64]	Périodique
(N, T)	Pham et Wang [47]	Périodique
(t_0, T)	Berg et Epstein [8]	Périodique

1.2.3 Politique de type limite de défaillance (Failure limit policy)

Dans cette politique, le système est remplacé quand son taux de panne (ou un autre indice de fiabilité) atteigne un niveau prédéterminé. Elle permet de maintenir un niveau de fiabilité acceptable. Lie et Chun [22] ont proposé une politique qui consiste à remplacer le système si son taux de panne arrive à une valeur maximale prédéterminée et les pannes sont corrigées par des réparations minimales. Bergman [9] a examiné ce type de politique basée sur la mesure de certaines variables d'état croissantes comme l'usure, les dommages et le stress. Il a été montré que la politique optimale est celle de remplacer le système à la panne ou si l'une des variables d'état atteigne une certaine valeur seuil. D'autres recherche relatives à cette politique de remplacement ont été étudiées par : Malik [26], Canfield [10], Jayabalan and Chaudhuri [20]. Le principal inconvénient de cette politique est qu'elle nécessite beaucoup d'effort de calcul. La table 1.4 résume l'essentiel de ces contributions.

Table 1. 4: Politique de remplacement de type limite de défaillance

Référence	*Indice suivi*	*Critère d'optimisation*	*Horizon*
Bergman [9]	Taux de panne / usure / stress	Coût par unité de temps	Infini
Malik [26]	Fiabilité	Fiabilité	Infini
Lie et Chun [22]	Taux de panne	Coût par unité de temps	Infini
Jayabalan et Chaudhuri [20]	Taux de panne	Coût total	Fini
Jayabalan et Chaudhuri [20]	Age	Coût par unité de temps	Infini

1.2.4 Politique de remplacement séquentiel

Contrairement à la politique de remplacement périodique, le remplacement séquentiel se fait dans des intervalles qui n'ont pas nécessairement la même longueur. Nguyen et Murthy [39] ont considéré un système qui a subit $(i-1)$ réparations et peut fonctionner jusqu'à l'âge t_i. La politique proposée consiste à réparer le système après $(k-1)$ réparations soit à la panne ou à l'instant t_i. Les variables de décision sont t_i et k. Si $k=1$ alors cette politique devient celle de type âge. Nakagawa [36] a examiné le cas où la longueur des intervalles étant fixe x_k $(k=1,2,\dots N)$. Le système reçoit des réparations minimales lors des $N-1$ premières pannes et est remplacé à la $N^{\text{ème}}$ panne. Les variables de décision sont N et les x_k. Nakagawa [36] a démontré qu'une politique optimale existe dans le cas où $x_k \leq x_{k-1}$. Si $N=1$ alors cette politique devient de type périodique avec réparation minimale.

1.2.5 Politique de type limite de réparation (Repair limit policy)

Cette politique prend en considération soit le coût ou soit la durée des réparations d'un système. Si le coût estimé de la réparation est supérieur à un seuil déterminé, alors le système est totalement remplacé. Cette politique a été introduite par Gardent et Nonant [17], et Drinkwater et Hastings [16]. Beichelt [6] a utilisé le coût espéré par unité de temps comme critère de décision. Yun et Bai [73] ont proposé de faire des réparations imparfaites tant que le coût estimé reste inférieur à un seuil L, sinon le système doit être remplacé.

La politique qui considère les durées de réparations (Time limit policy) a été introduite par Nakagawa et Osaki [37] dans laquelle le composant est réparé à la panne, si la durée de réparation est supérieure à un seuil T, alors le composant est remplacé sinon il est remis dans les conditions d'opération. Murthy et Nguyen [40] ont étudié la politique dans laquelle deux

type de réparations sont considérées : une réparation locale et imparfaite dont la durée est courte, et une réparation centrale et parfaite dont la durée est longue. Enfin, Dohi et al [14] ont traité le problème général d'une politique avec limite de durée de réparation. Ils ont proposé plusieurs approches pour calculer la politique optimale : résolution graphique, approche non-paramétrique et la transformation de Lorenz La table 1.5 suivant résume l'essentiel de ces contributions.

Table 1. 5: Politique de remplacement de type limite de réparation

Référence	*Limite*	*Critère d'optimisation*
Drinkwater et Hastings [16]	Coût de réparation	Coût par unité de temps
Beichelt [6]	Coût par unité de temps	Coût par unité de temps
Yun et Bai [73]	Coût de réparation	Coût par unité de temps
Nakagawa et Osaki [37]	Durée de réparation	Coût par unité de temps
Murthy et Nguyen [40]	Durée de réparation	Coût par unité de temps
Dohi et al [14]	Durée de réparation	Coût par unité de temps

1.2.6 Politique basée sur le comptage du nombre de réparations

Cette politique de remplacement a été introduite par Makabe et Morimura [27]. Le système est remplacé à la $k^{ème}$ panne tandis que les $k-1$ pannes précédentes sont corrigées par une réparation minimale. La variable de décision étant k. Morimura [31] a généralisé cette politique en introduisant une autre variable T. Sous cette politique, toutes les premières $k-1$ pannes sont corrigées seulement par une réparation minimale et si la $k^{ème}$ panne survient avant un temps de fonctionnement T alors une réparation minimale est appliquée et la prochaine panne implique un remplacement. Et si la $k^{ème}$ panne survient après T alors le système est remplacé.

D'autres modèles similaires ont été développés notamment par Park [45], Stadje et Zuckerman [60] et Makis et Jardine [28].

En résumé, la politique de remplacement de type âge est plus économique mais le remplacement périodique est plus facile à mettre en place. Les politiques de remplacement séquentiel, de limite de défaillance et de limite de réparation sont plus pratiques mais elles ont reçu moins d'attention dans les différents travaux de recherche. La politique de remplacement de type limite de défaillance est la plus proche aux objectifs de la maintenance : améliorer la

fiabilité des systèmes et diminuer la fréquence des pannes. L'un des inconvénients du remplacement séquentiel et de la politique de limite de défaillance est que les intervalles de remplacement ne sont pas égaux, ceci complique l'implémentation de ces deux politiques.

1.3 Politiques de remplacement des systèmes multi-composants

Nous développons cette revue en fonction de la nature de l'interaction ou de dépendance qui peut exister entre les différents composants du système, en l'occurrence : la dépendance stochastique, la dépendance économique et enfin la dépendance structurelle.

1.3.1 Le cas de la dépendance stochastique

En l'absence d'interaction entre les composants d'un système, ces derniers sont dits indépendants, et la maintenance de chacun d'eux peut être exécutée séparément les uns des autres. Quand la défaillance d'un composant influence, au sens probabiliste, l'état des autres composants, on parle de dépendance stochastique, où il peut y avoir propagation de panne.

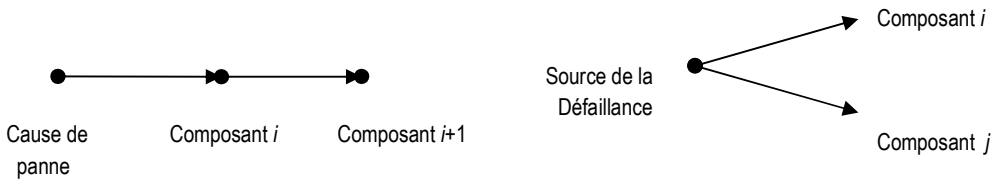
Par définition, il y a dépendance stochastique quand la probabilité de défaillance ne peut être exprimée comme un simple produit des probabilités inconditionnelles des événements individuels qui la causent. Selon Thomas [66], la dépendance stochastique survient dans les trois cas suivants :

- Quand la défaillance soudaine d'une machine cause un choc potentiel aux machines subséquentes. (Downsteram machines)
- Quand la défaillance de quelques machines cause une surcharge sur les autres machines.
- Quand il y a une cause commune de défaillance à partir d'une source externe, et on parle de défaillance par cause commune.

Rakowsky et Schneeweiss [50], ont introduit la notion d'effet domino pour modéliser la dépendance stochastique. Contrairement à la défaillance par cause commune où la défaillance est causée par une source externe, la défaillance par effet domino est causée par la propagation de la panne à l'intérieur du système.

Murthy et Nguyen [32] ont introduit trois types d'interaction pour un système à deux composants :

- Interaction de type I : cette interaction implique que la défaillance du composant (1) peut induire une défaillance du composant (2) avec une probabilité p. Ce type d'interaction a été élargi à des systèmes à plus que deux composants.
- Interaction de type II : la défaillance du composant (2) peut induire la défaillance du composant (1) avec une probabilité q tandis que la défaillance du composant (1) induit un choc sur le composant (2) sans pour autant induire une défaillance instantanée.
- Interaction de type III **:** la défaillance d'un composant affecte le taux de panne de l'autre composant.



(*a*) Effet domino (*b*) Défaillance par cause commune

Figure 1. 2: Effet domino et défaillance par cause commune

Pour l'interaction de type I, Murthy et Nguyen [32] ont défini deux politiques de remplacement. Dans la première tous les composants défaillants sont remplacés par des neufs. Tant que le système continue à fonctionner, seuls les composants défaillants sont remplacés. Sous la seconde politique, tous les composants (y compris ceux en état de fonctionnement) sont remplacés par des neufs. Tant que le système continue à fonctionner, les composants défaillants subissent une réparation minimale.

Sheu and Liou [59] ont étudié un système dont la configuration est k-parmi-n subissant un choc qui arrive selon un processus de Poisson non homogène. Le système est remplacé préventivement s'il atteigne l'âge T avec un coût fixe c_0. Si le système subit m chocs à l'instant $S_m < T$ ceci va provoquer la défaillance de j composants en même moment avec une probabilité $p_j(S_m)$ ou $\sum_{j=0}^{n} p_j(S_m) = 1$. Si $j \geq k$ alors le système k-parmi-n est remplacé par du neuf. Si $0 \leq j \leq k$ alors le système subit une réparation minimale.

Pour un système à deux composants (1 et 2), Scarf et Deara [55] ont proposé plusieurs politiques de remplacements préventifs qu'on peut résumer comme suit :

- **Politique 1** : Remplacement indépendant de type Bloc

  A la panne du système, les composants défaillants sont remplacés. Les composants 1 et 2 sont remplacés préventivement à des intervalles fixes d'une manière indépendante.
- **Politique 2** : Remplacement groupé de type Bloc

  A la panne du système, les composants défaillants sont remplacés. Les composants 1 et 2 sont remplacés préventivement à des intervalles fixes simultanément.
- **Politique 3** : Remplacement combiné de type Bloc

  A la panne du système, les deux composants sont remplacés (qu'ils soient en panne ou non). Les composants 1 et 2 sont remplacés préventivement à des intervalles fixes simultanément.
- **Politique 4** : Remplacement indépendant et modifié de type Bloc

  A la panne du système, les composants défaillants sont remplacés. A des intervalles fixes, le composant 1 est remplacé si son âge dépasse la limite d'âge de remplacement. Aussi, à des intervalles fixes, le composant 2 est remplacé si son âge dépasse la limite d'âge de remplacement.
- **Politique 5** : Remplacement groupé et modifié de type Bloc

  A la panne du système, les composants défaillants sont remplacés. A des intervalles fixes, les composants 1 et 2 sont remplacés si leur âge dépasse la limite d'âge de remplacement.
- **Politique 6** : Remplacement combiné et modifié de type Bloc

  A la panne du système, les deux composants 1 et 2 sont remplacés simultanément (qu'ils soient en panne ou non). A des intervalles fixes, les composants 1 et 2 sont remplacés simultanément si l'âge du système dépasse la limite de remplacement.
- **Politique 7** : Remplacement opportuniste indépendant et modifié de type Bloc

  A la panne du système, soit (i) les deux composants défaillants sont remplacés soit (ii) l'un est défaillant et est remplacé et l'autre est en fonctionnement mais remplacé si son âge dépasse la limite de remplacement. A des intervalles fixes, le composant 1 est remplacé si son âge dépasse la limite de remplacement et le composant 2 est aussi remplacé simultanément si son âge dépasse la limite d'âge opportun de remplacement. Ceci est vrai aussi si on inverse le composant 1 par 2.
- **Politique 8** : Remplacement opportuniste groupé et modifié de type Bloc

Cette politique est la même que la politique 7. Elle considère un remplacement groupé des composants 1 et 2 (ils ont les mêmes intervalles fixes).

Toutes ces différentes politiques ont été évaluées et comparées en considérant le coût, la fiabilité du système et la facilité de son implémentation. Selon les résultats obtenus, Scarf et Deara [55] concluent que la mise en place de ces politiques permet de sauver des coûts comparativement à des politiques de remplacement correctif. L'implémentation de certaines de ces politiques requiert un niveau de reporting et de contrôle; les politiques 7 et 8 impliquent l'utilisation d'un système d'information qui permet la planification des blocs et l'enregistrement des dates de remplacement des composants. En général, le groupement des composants ou des blocs à remplacer améliore la fiabilité du système mais augmente le coût par unité de temps des remplacements.

Pour l'interaction de type II, Satow et Osaki [54] ont considéré un système parallèle à deux composants. La défaillance du composant (1) survient selon un processus de Poisson non homogène et provoque un dommage sur le composant (2). Le système est remplacé à la panne et préventivement à l'instant T ou si le dommage total du composant (2) dépasse un niveau k.

Lai et Chen [25] ont considéré le même cas sauf que la défaillance du composant (1) induit une augmentation du taux de panne du composant (2). Ces auteurs ont proposé une politique de remplacement de type âge. Barros et al [5] ont enrichi le même cas en rajoutant un effet de choc indépendant sur le système (défaillance par cause commune).

Nakagawa et Murthy [38] ont combiné les interactions de type I et de type II et ont considéré le cas d'un système à deux composants 1 et 2. La défaillance du composant 1 induit la défaillance du composant 2 avec une certaine probabilité. Le système est remplacé à la panne du composant 2 ou à la $N^{ème}$ panne du composant 1. Les auteurs ont calculé le coût espéré par unité de temps du remplacement en fonction de N et ont caractérisé le N^* qui minimise ce coût.

Jhang et Sheu [21] ont aussi considéré le cas des interactions de type I et de type II. Ils ont généralisé les politiques de remplacement de type âge et bloc pour un système à N composants. Leur contribution était de pouvoir exprimer les coûts espérés par unité de temps de ces deux politiques.

Un autre type d'interaction entre les composants d'un système a été étudié. Özekici [44] a modélisé l'état d'un système à *n* composants en dépendance stochastique par une chaine de Markov $X = \{X_t, t > 0\}$. Le problème du remplacement du système a été formulé comme un processus de décision markovien.

Lai et Yan [25] ont considéré le cas discret d'un système à deux composants (1) et (2). La défaillance du composant (1) cause une augmentation du taux de panne du composant (2) alors que la défaillance du composant (2) provoque la défaillance immédiate du composant (1). Si le composant (1) est en panne et le coût des réparations jusqu'à cette panne n'excède pas une valeur L, alors il est juste réparé. Si le composant (1) est en panne et le coût cumulatif des réparations excède la valeur L ou le nombre de pannes est égale à n alors tout le système est préventivement remplacé. Le coût espéré par unité de temps du remplacement $C(n)$ est exprimé en fonction n. Ce modèle a été généralisé par Sung et al [62] en rajoutant une périodicité de remplacement T. Le coût espéré par unité de temps du remplacement $C(n, T)$ s'exprime en fonction de n et T. Wang et Zhang [68] ont étudié le même système. Ils ont supposé que le temps de réparation du composant (2) suit une loi géométrique. Le système est remplacé après n pannes du composant (2).

1.3.2 Le cas de la dépendance économique

La dépendance économique est le type d'interaction qui a reçu le plus d'intérêt. Cette dépendance fait souvent référence aux économies d'échelles réalisées sur les actions groupées ou combinées de maintenance comparativement à des actions séparées. Ce terme veut dire aussi que les coûts de maintenance baissent quand le nombre de composants à maintenir augmente. Ainsi, certains auteurs ont bien voulu nuancer entre la dépendance économique positive et la dépendance économique négative. La dépendance positive traduit le fait que le coût des remplacements simultanés de plusieurs composants est inférieur au coût des remplacements de ces mêmes composants effectués d'une manière séparée. Les économies réalisées s'expliquent par deux facteurs :

- Les coûts des réglages : ils englobent en général le temps d'immobilisation des équipements et le coût des matières premières gâchées,
- Les temps d'arrêt : le remplacement correctif lors de la défaillance d'un composant ou de plusieurs composants peut donner l'opportunité de remplacer préventivement en même

temps d'autres composants qui sont encore en état de fonctionnement. Ainsi, des coûts peuvent être sauvés grâce à cette combinaison de remplacement correctif et préventif.

Inversement, la dépendance négative survient quand le remplacement simultané de plusieurs composants coûte plus cher que leur remplacement d'une manière séparée. Plusieurs facteurs peuvent expliquer cette dépendance :

- Les restrictions sur la main-d'œuvre : le groupement des actions de remplacements nécessite des besoins supplémentaires en main-d'œuvre. Ceci peut éventuellement augmenter les coûts associés au remplacement.
- Les exigences de sécurité : elles imposent parfois des restrictions sur l'utilisation des équipements en cas ou l'intervention sur plusieurs composants présente un risque.
- Les pertes de production : le remplacement simultané de plusieurs composants (y compris ceux en état de fonctionnement) peut causer des pertes de production dont le coût fait augmenter le coût du remplacement.

Les politiques de remplacement en cas de dépendance économique ont été classifiées en deux catégories : les remplacements opportunistes et les remplacements de groupe.

1.3.2.1. Les politiques de remplacement opportuniste

Comme nous l'avons évoqué précédemment, les temps d'arrêt lors des remplacements correctifs donnent l'opportunité d'effectuer des remplacements préventifs à coûts raisonnables sur d'autres composants en état de fonctionnement. Il est parfois impossible de combiner un remplacement correctif avec un remplacement préventif en raison du caractère imprévu du premier et du caractère planifiable du deuxième. Malgré ceci, la combinaison peut se dérouler de deux manières différentes : le remplacement préventif peut être avancé avant l'arrivée de la panne dont la réparation ne peut être retardée. Ou encore, le remplacement correctif peut être retardé dans la mesure où les composants défaillants peuvent être maintenus sans remplacement jusqu'au prochain remplacement préventif.

Les premières politiques développées dans ce sens étaient des politiques bidimensionnelles de limite de contrôle de type (n, N) ou (n_i, N).

La politique (n, N) s'applique au cas simple de deux composants 0 et 1. Radner et Jorgenson [49] ont étudié ce problème de remplacement opportuniste sous les hypothèses suivantes:

- Le système fonctionne en série, et les deux composants sont stochastiquement indépendants,
- Le composant 1 est continuellement inspecté et est remplacé à la panne, alors que le composant 0 n'est inspecté qu'au moment de son remplacement,
- Le composant 1 a un taux de panne constant,
- Les remplacements sont instantanés.

La politique de remplacement (n, N) est caractérisée par les deux nombres critiques n et N tels que $n < N$ et est définie comme suit :

- si le composant 1 tombe en panne dans l'intervalle $0 \leq t < n$, alors on remplace le composant 1 seulement,
- si le composant 1 tombe en panne dans l'intervalle $n \leq t < N$, alors on remplace les deux composants ensemble,
- si le composant 0 n'est pas remplacé dans l'intervalle $0 \leq t < N$, alors on le remplace quand$t = N$. t est l'âge du composant 0 depuis son dernier remplacement.

McCall [29] souligne que cette politique de remplacement est très similaire au modèle de gestion de stock (s, S). Grâce à la programmation dynamique, Radner et Jorgenson [49] ont prouvé l'optimalité de cette politique de remplacement.

La politique (n_i, N) est une généralisation de la politique (n, N) pour un système série de $M + 1$ composants. Soit un composant 0 non inspecté en présence de M composants surveillés avec un taux de panne constant. (n_i, N) est une politique de limite de contrôle et est définie comme suit :

Ils existent $M + 1$ nombres : $n_1, n_2, \ldots . n_{M,}\ N$ avec $0 \leq n_i \leq N$ tels que :

- si le composant i $(i = 1,\ldots,\ M)$ tombe en panne dans l'intervalle $0 \leq t < n_i$, alors on remplace le composant i seulement,
- si le composant i $(i = 1,\ldots,\ M)$ tombe en panne dans l'intervalle $n_i \leq t < N$, alors on remplace les composants 0 et i ensemble,

- si le composant 0 n'est pas remplacé dans l'intervalle$0 \leq t < N$, alors on le remplace quand $t = N$. t est l'âge du composant 0 depuis son dernier remplacement.

La politique(n_i, N) s'avère plus complexe que la politique (n, N), car le remplacement du composant 0 va dépendre non seulement de l'état d'un seul composant, mais de plusieurs autres composants à la fois. Cette complexité augmente si le nombre M de composants est grand.

Berg [7] a étudié le cas d'un système à deux composants identiques avec une durée de vie distribuée exponentiellement. Quand l'un des deux tombe en panne, il est remplacé par du neuf, et l'autre composant est aussi remplacé d'une manière préventive si son âge dépasse une limite de contrôle L. Tatsuno, Ohi et Nishida [65] ont généralisé ce cas pour un système à deux composants. Seul le premier a une distribution de durée de vie exponentielle et est continuellement surveillé. Quand le deuxième composant tombe en panne, il reste dans son état non surveillé jusqu'à la prochaine inspection. A la panne du premier composant, la politique de remplacement consiste à :

i. remplacer ce composant défaillant ou
ii. remplacer ce composant et faire une inspection sur le deuxième suivie d'une réparation minimale si une panne est détectée ou
iii. remplacer les deux composants à la fois sans inspections

Les auteurs ont montré que sous l'hypothèse d'un taux de panne croissant, la politique optimale possède une structure de type limite de contrôle.

Gertsbakh [18] a étudié un système à n composants identiques et a proposé une politique caractérisé par deux limites de contrôle t et T $(t < T)$. Durant la période $(0, t)$, chaque composant qui tombe en panne est remplacé au coût $s_1 + s_2$ (s_1 est le coût de localisation de panne et s_2 est le coût de remplacement correctif). A la première panne qui survient durant la période (t, T), le composant défaillant est remplacé conjointement avec tous les autres composants au coût $s_1 + n\alpha s_2$ $(\alpha < 1)$ est un coefficient qui reflète les économies dues aux remplacements joints. Si aucune panne ne survient durant la période (t, T), alors tout le système est remplacé préventivement à l'instant T au coût$n\alpha s_2$. Le modèle a été formulé comme un processus semi-markovien dont l'optimisation est assez compliquée.

Zheng et Fard [74] ont examiné une politique basée sur le niveau de tolérance du taux de panne d'un système ayant k types de composants. Chaque composant est remplacé si son taux de panne atteigne la valeur L ou à la panne avec un taux de panne compris entre $L - u$ et L.

Pham et Wang [46] ont étudié le cas d'un système k-parmi-n et ont proposé une politique de remplacement opportuniste de type (τ, T). Sous cette politique, les composants défaillants subissent une réparation minimale avant τ. Après τ, une combinaison de remplacement correctif des composants défaillants et de remplacement préventif des composants en fonctionnement est appliquée. A l'instant T, le système subit un remplacement préventif si ce remplacement n'a pas été effectué avant $T > \tau$.

Zhou et al [75] ont considéré un système série de n-composants. La politique de remplacement opportuniste proposée consiste à remplacer préventivement chaque composant si sa fiabilité atteigne un certain seuil prédéterminé. Le modèle maximise les économies de coûts réalisées et utilise la programmation dynamique comme approche de résolution.

1.3.2.2. Les politiques de remplacement de groupe

Les politiques de remplacement de groupe ont été largement étudiées dans la littérature. Une première classification de ce type de politique prend en considération l'aspect stationnaire ou dynamique de la planification. Les modèles stationnaires supposent un horizon de planification infini dans lequel l'information requise est bien connue et ne change pas. Dans cette catégorie, nous trouvons les remplacements correctifs et les remplacements préventifs de groupe. Les modèles dynamiques peuvent générer des décisions dynamiques qui peuvent changer durant l'horizon de planification. Dans cette catégorie, nous trouvons des modèles à horizon fini et des modèles à horizon déroulant.

Dans la suite de cette section nous passons en revue les principales contributions dans chacune des quatre catégories précitées.

Modèle stationnaire du remplacement correctif

Le remplacement correctif groupé d'un ensemble de composants est motivé par les économies réalisées sur les coûts. Il ne peut être possible que pour des systèmes redondants

pour lesquels il est tolérable de laisser certains équipements en état de panne pendant une certaine période en dépit d'un fonctionnement au ralenti ou des pertes de production.

Considérons un système parallèle à n composants indépendants et identiquement distribués. La défaillance de k-composants peut causer une perte de production de $C_1(k)$ par unité de temps. A chaque moment, nous pouvons décider de commencer la réparation ou le remplacement des k-composants défaillants au coût $C_2(k)$ Okumoto et Elsayed [42] ont considéré que les réparations sont instantanées et que les coûts $C_1(k)$ et $C_2(k)$ sont des fonctions linéaires en k. Les auteurs se sont intéressés à la variable qui indique le moment de commencer la réparation simultanée des k-composants défaillants. Ils ont prouvé sous l'hypothèse d'un taux de panne croissant qu'il existe un temps de réparation optimal, déterministe, fini et unique.

Assaf et Shanthikumar [1] ont considéré le même cas et ont supposé que les n-composants sont identiques et possèdent une distribution de durée de vie exponentielle. Ils ont prouvé l'optimalité d'une politique de remplacement de type limite de contrôle qui consiste à remplacer tous les k-composants défaillants si leur nombre atteigne une certaine valeur seuil. Assaf et Shanthikumar [1] ont aussi examiné le cas où la défaillance d'un composant ne peut être détectée qu'après inspection. Si l'inspection relève la défaillance de k-composants $(k < m)$ alors il faut attendre t_k unités de temps pour inspecter une autre fois. Si le nombre de composants défaillants trouvés $k > m$ alors la réparation de tous les composants défaillants doit être effectuée et la prochaine inspection doit se faire après t_0 unités de temps. Les variables de décision de cette politique sont $(m, t_0, t_1, \dots, t_m)$ avec $t_0 \geq t_1 \geq \cdots \geq t_m$.

Modèle stationnaire du remplacement préventif

L'avantage des politiques de remplacements préventifs est qu'ils sont planifiés à l'avance. Ceci facilite l'approvisionnement en pièces de rechanges ou bien la mise en place de la main-d'œuvre nécessaire.

Lorsque le groupe de composants à maintenir est connu à l'avance, la politique de remplacement de type bloc s'avère plus appropriée (Dekker et Wildeman [12]). Sous cette politique, un composant est remplacé à des intervalles fixes avec un coût moyen $c(t) = \left(c_p + M(t)\right)/t$ ou c_p est le coût de remplacement préventif et $M(t)$ représente le coût

moyen correctif des réparations et les coûts opérationnels sur l'intervalle de temps considéré. Si n-composants ayant le même intervalle, alors la politique de type bloc peut être appliquée sur le groupe de ces *n*-composants avec un coût moyen de groupe $c_G(t) = \left(c_{pG} + \sum_{i=0}^{n} M_i(t)\right)/t$.

D'autres auteurs ont relaxé l'hypothèse selon laquelle les composants possèdent tous le même intervalle de remplacement. Dekker et Roelvink [13] ont considéré le cas d'un groupe ou seuls les composants défaillants sont remplacés. Cette politique ayant une structure complexe, les auteurs ont pris le coût marginal comme critère d'optimisation et ont utilisé une approche markovienne pour la résolution dans le cas d'un système à deux composants.

Goyal et Kusy [19] se sont inspirés du modèle du contrôle d'inventaire multi-item pour proposer une politique dite $(T, k_1, \ldots, k_n)$, qui consiste à faire du remplacement préventif sur le composant j chaque $k_j T$ unités de temps.

Ritchken et Wilson [51] ont combiné les deux politiques T-âge et m-panne pour proposer une politique dite (m, T). Elle consiste à remplacer le système à n-composants indépendants si son âge atteigne la valeur T ou après m pannes. Ce modèle a été à son tour généralisé par Sheu et Jhang [57]. Ils introduisent deux intervalles de temps $[0,\ T]$, $[T,\ T + W]$ et font la distinction entre deux types de pannes : les pannes mineures qui nécessitent une réparation minimale dans les deux intervalles de temps, et les pannes majeures qui nécessitent du remplacement dans le premier intervalle $[0, T]$ ou laissées inactives dans l'intervalle $[T,\ T + W]$. La politique optimale consiste à trouver les m^*, T^* et W^* qui minimisent le coût espéré du remplacement par unité de temps sur un horizon infini.

Modèle dynamique avec horizon fini

Dans un modèle dynamique avec horizon fini, le système n'est considéré que dans cet horizon. Ceci suppose implicitement que le système ne sera pas utilisé après. Pour simplifier ce type de modèle, la variable temps a été considérée discrète.

tinson et Khumawala [61] ont étudié le problème de la planification de la maintenance sur un système de production en série. La décision consiste à déterminer les périodes d'arrêt pour permettre d'effectuer les actions de maintenance ainsi qu'identifier les composants qui doivent être inclus dans ces actions. Le problème a été formulé sous forme d'un programme

mathématique mixte en nombres entiers et non linéaire et a été résolu par une approche heuristique.

Worm et Van Harten [72] ont étudié aussi le cas de la maintenance des routes. Ils ont modélisé le problème sous forme de problème mathématique multi-périodes qui minimise les coûts de maintenance sous contraintes de budget et de qualité. Les auteurs ont montré que le groupement des actions de maintenance sur des morceaux de routes procure des économies significatives des coûts.

Modèle dynamique avec horizon déroulant

Les modèles avec horizon déroulant utilisent aussi des horizons finis d'une manière répétitive. Lorsqu'il y a un changement durant un horizon donné, il est pris en compte et une autre planification est adaptée en fonction de ce changement. Ces modèles font combiner des horizons finis avec des horizons infinis et essayent de tirer les avantages de chacun d'eux. Les solutions obtenues sont stables et les décisions sont plus interactives.

Dekker et al [12] ont considéré un système à plusieurs composants. La maintenance de chaque composant est planifiée individuellement sur un horizon fini. Il est possible de changer la périodicité des remplacements à l'intérieur de cet horizon pour permettre le groupement des actions de maintenance sur plusieurs composants, ce qui génère des économies de coûts. Les auteurs ont défini pour chaque composant une fonction de pénalité qui exprime le coût de déviation ou d'écart par rapport à la planification individuelle. L'objectif est de déterminer la partition des activités de maintenance qui minimise les coûts totaux sur un horizon fini. Le problème a été formulé comme un problème de partitionnement dont l'effort de calcul est élevé. Les auteurs ont traité des problèmes dont la taille ne dépasse par dix activités.

Pour ce même problème de partitionnement, Wildeman [70] et Wildeman et al [71] ont proposé la programmation dynamique comme approche de résolution. Cette approche a l'avantage de donner une solution optimale dans un temps de calcul raisonnable (complexité quadratique). Elle permet aussi d'intégrer des événements imprévus (remplacements correctifs dus aux pannes) ou bien des changements sur les composants comme leurs taux d'utilisation ou leurs dégradations.

1.3.3 Le cas de la dépendance structurelle

La dépendance structurelle signifie que la réparation ou le remplacement de certains composants entraine le remplacement ou le démontage d'autres composants avoisinants. En d'autres termes, les remplacements des composants structurellement dépendants doivent se faire jointement.

Le nombre de travaux qui ont traité la dépendance structurelle est très limité. Da leur revue des politiques de remplacement des systèmes multi-composants, Nicolai et Dekker [41] ont fait référence à un seul article de Sasieni [53] remontant à 1956. L'auteur a traité le cas des machines de fabrication des pneus. Chaque machine est composée de deux presses et les pneus produits passent par les deux presses simultanément. La panne de l'une des presses implique des actions de maintenance sur les deux presses à la fois pour éviter des défauts de fabrication sur les pneus. Deux politiques de remplacement ont été analysées, la première étant préventive consiste à remplacer les deux presses à la fois après la production de m pneus sans panne. La deuxième est une politique opportuniste, elle consiste à profiter de l'arrêt de la machine pour le remplacement de la presse afin de remplacer l'autre presse si elle a produit n pneus ($n < m$).

1.4 Conclusion

Nous avons passé en revue à travers ce chapitre les politiques de remplacement pour les systèmes mono-composants et multi-composants. Cette revue n'est pas exhaustive mais elle reprend les plus importantes contributions dans ce domaine de recherche.

Nous avons choisi la classification des modèles de remplacement selon la nature de la dépendance ou de l'interaction entre les composants. Cette classification a été adoptée par plusieurs auteurs (Nicolai et Dekker [41]). Nous estimons que c'est le critère le plus important qui justifie - sur le plan théorique - le développement de tels modèles car en l'absence de cette dépendance, la généralisation des modèles pour des systèmes mono-composants à des systèmes multi-composants devient triviale.

Chapitre 2: Age Replacement Policies for Two-component Systems with Stochastic Dependence

Zouheir Malki Daoud Ait-Kadi Mohamed-Salah Ouali , "Age replacement policies for two-component systems with stochastic dependence", Publié en 2015 dans Journal of Quality in Maintenance Engineering, Vol. 21 Iss 3 pp. 346 - 357

Résumé de l'article :

Nous présentons dans cette contribution deux politiques de remplacement préventif pour un système parallèle à deux composants en dépendance stochastique. Cette dépendance est modélisée par l'effet domino : quand le composant (1) du système tombe en panne à l'instant t alors le composant (2) risque aussi de tomber en panne à l'instant $t+\tau$ et avec une probabilité $p_{1\to 2}$. La variable aléatoire τ est un retard dont la densité de distribution est connue $h_{p_{1\to 2}}(.)$. Les deux politiques proposées consistent à remplacer tout le système à la panne ou à l'âge T. Si dans la première politique, les coûts et les durées associés aux remplacements correctifs et préventifs sont supposés constants, alors dans la deuxième politique le coût du remplacement préventif dépend de l'état et de l'âge du système. Dans les deux cas, le coût espéré par unité de temps de chaque politique $C(T)$ est exprimé en fonction de la variable de décision T. Un exemple illustratif est donné et les résultats sont analysés.

Abstract

In this paper, two age replacement policies for two-component parallel systems with stochastic dependence are investigated. The stochastic dependence considered is modeled by a one-sided domino effect. The failure of component (1) at instant t may induce the failure of component (2) at instant $t + \tau$ with probability $p_{1\to2}$. The time delay τ is a random variable with known probability density function $h_{p_{1\to2}}(.)$. The system is considered in a failed state when both components have failed. The proposed replacement policies suggest replacing the system upon failure or at age T whichever occurs first. In the first policy, costs and durations associated with maintenance activities are supposed to be constant. In the second replacement policy, the preventive replacement cost depends on the system's state and age. The expected cost per unit of time over an infinite time span is derived and numerical examples are presented. The mathematical model can be used to analyze the stochastic dependence on the performance of the system.

2.1 Introduction

In theory, components in a system are said to be stochastically dependent if the probability of failure cannot be expressed as the simple product of unconditional probabilities of the individual events which have caused it (Rakowsky and Schneeweiss [20]). In practice, components are stochastically dependents when (Thomas [24]):

- the failure of any component may induce shock or failure of other components of the system,
- the failure of a component causes an increased load to be borne by the working components,
- there are causes outside the system which bring simultaneous failures (so-called common-cause failure).

For multi-component systems, technical dispositions are usually adopted in order to avoid the stochastic dependence between components. Due to some technical and economical considerations, it is not always possible to protect each component or subsystem against the potential failure effects of other components of the system. To simplify the mathematical modeling process for system's performance evaluation in terms of reliability, availability and expected total cost, it is usually assumed that the components are s-independent.

2.1.1 Stochastic Dependence Modeling

The stochastic dependence has been the subject of several investigations. Their number is, however, still low compared to the economic dependence. Marshall and Olkin [14] used Multivariate Exponential Distribution to describe the dependence between lifetimes of the system components. They introduced shock model with independent Poisson processes. They showed that in the case of a series configuration, system reliability is greatest in the case of dependence. On the other hand, in the case of a parallel configuration, system reliability is greatest in the case of independence.

Freund [6] considered a two-component parallel system with constant failure rates. A failure of one of the components changes the failure rate of the surviving one. Weinman [25] generalized for the case of *n* components (*n* > 3), under exponential distribution. Filus [5] extended this model for Weilbull distribution and *k*-out-of *n* structure case. He gave the calculation of the reliability of the system with the identical and non-identical components. Apostolakis and Moieni [2] restricted attention to the common-cause failure; they classify a variety of models and develop their theoretical foundations. They examined three models: Basic Parameter (BP) model, the Multiple Greek Letter (MGL) model, and the Multinomial Failure Rate (MFR) model and for each model they explain how to calculate system's reliability parameters mainly the failure rate. Greig [7] used the second moment method based on graph-theoretic approach in order to obtain reliability estimates for series systems with dependent failures. He extended the model also for redundant systems. Nakagawa and Murthy [17] defined two types of failures for a two-component system:

- Induced failure: component (2) fails with probability α_j at the j^{th} failure of component (1),
- Shock damage: component (1) causes damage with distribution $\mathrm{G(z)}$ to component (2).

Murthy and Nguyen [15] examined the case of two-component systems, whenever component (1) fails, it induces a failure of component (2) with probability p and has no effect on component (2) with probability $1 - p$. Murthy and Wilson [16] studied also the case of failure interaction in multi-component systems. They used the likelihood function for estimating the parameters of multi-component systems models with several types of failure interactions.

The concept of the domino effect is often used in areas such as risk management and prevention of accidents and it is rarely used in the reliability field. Delvosalle [4] defined domino effect as a primary accident in a primary installation, inducing one (or more) secondary accident(s), concerning secondary installation(s). Lees [10] defined domino effect as a factor to take into account of the hazards that can occur if leakage of a hazardous material can lead to the escalation of the incident. In reliability, Rakowsky and Schneeweiss [20] used domino effect to model the propagation of the failure from a component to another. The estimation of the parameters of domino effect models has been studied in several areas. According to Nguyen et al [18], domino probability might be expressed as a product of four probabilities: 1- Probability of generation, 2- Probability of impact, 3- Probability of failure and 4- Probability of propagation.

Other papers focused primarily on the probability of propagation. Cozzani et al [3] and Pettitt et al [19] proposed the following three different approaches to estimate this probability: 1- vulnerability threshold models, 2- propagation functions based on empirical decay relations for physical effects and 3- propagation functions based on specific probabilistic models. In chemical installations, Kourniotis et al [9] used Bayesian inference to analyze patterns in terms of fatalities caused by domino effect.

2.1.2 Replacement Policies

From replacement policies point of view, a limited number of preventive maintenance policies for systems with stochastic dependence have been published. Most of the proposed policies consider systems with no more than three components.

The work of Scarf and Deara [22] should be highlighted. In this paper, the authors proposed eight different replacement policies for two-component system with stochastic dependence. These policies are: Independent block replacement, Grouped block replacement, Combined block replacement, Independent modified block replacement, Grouped modified block replacement, Combined modified block replacement, Opportunistic independent modified block replacement, Opportunistic grouped modified block replacement.

Nakagawa and Murthy [17] considered the case of the induced failure and suggested replacing the system at the failure of component (2) or at the N^{th} failure of component (1), whichever

occurs first. The expected cost rate $C(N)$ is derived and the optimal replacement number N^* that minimize $C(N)$ is obtained by using the inequality $C(N+1) > C(N)$.

Satow and Osaki [21] suggested replacing the system if it reaches age T or if the cumulative damage exceeds a given threshold z. The objective is to find the pair (T^*, z^*) which minimizes the expected total cost associated with the proposed replacement policy.

Albin and Cho [1] considered a system composed of $N + 1$ components (one independent component and N dependent components). They suggested two classes of replacement policies: failure policies and monitoring policies. In the first one, the independent component is inspected upon failure of the system and replaced if its deterioration equals or exceeds a critical level. In the second policy, the deterioration level of independent component is always known and the component is replaced when its deterioration reaches a critical level. Jhang and Sheu [8] considered a generalized age and block replacement policy for a two-component system with failure interaction. Each component has two types of failure, type I failure (minor failure) is removed by a minimal repair, whereas type II failure (catastrophic failure) induces a total failure of the system and is removed by an unplanned (or unscheduled) replacement of the system. Zequeira and Bérenguer [26] have investigated the inspection policy of a two-component parallel system with failure interaction. Lai and Chain [13] proposed a periodic replacement model for a two-component system with failure rate interaction. The failure of component (1) causes a certain amount of damage to component (2) by increasing the failure rate of component (2) by a certain degree, while the failure of component (2) causes the instantaneous failure of component (1). They introduced relative costs as a criterion of optimality. Lai and Yuan [11] have investigated the case of a parallel system subject to common cause failures. They proposed a periodic replacement policy. Recently, Sung et al [23] presented an extended replacement policy in the case of external shocks. Lai and Yan [12] presented a minimal repair number counting replacement policy for a two-unit system with failure interactions.

This paper addresses two age replacement policies for two-component parallel systems with stochastic dependence. We use the domino effect scheme developed by Rakowsky and Schneeweiss [20] and we give the calculation of the reliability function of the system. On the other hand and unlike most models where preventive replacement costs are supposed to be

known and constants, we consider a non-constant cost structure. This is an original contribution in the replacement policies.

The remainder of this paper is organized as follows. In section 2, we present the age replacement policy I, the notations, the modeling assumptions as well as the expression of total expected cost per unit of time over an infinite span. In section 3, the age replacement policy II is presented. For each replacement policy, a numerical example is given. Concluding remarks are finally given in section 4.

2.2 Age replacement policy I with constant cost structure

According to age replacement policy, the system is replaced upon failure or at age T whichever occurs first. The following notations are used:

- t_i lifetime of component $i = 1, 2$
- $F_i(.)$ probability distribution function (PDF) associated with t_i
- $f_i(.)$ probability density function (PDF) associated with t_i
- $R_i(.)$ reliability of component i
- $F_s(.)$ PDF associated with system failure
- $h_{p_{1\to2}}(.)$ PDF associated with the random delay τ
- $p_{1\to2}$ domino effect probability
- $R_s(.)$ system reliability $R_s(.) = 1 - F_s(.)$
- $r_s(.)$ system failure rate
- C_p cost suffered for each system replacement
- C_c cost suffered for each failure replacement
- T_p time duration to perform each preventive replacement
- T_c time duration associated with each failure replacement
- T preventive replacement age
- $C(.)$ expected total cost per unit of time over an infinite horizon

For policy I, the mathematical model is based on the following assumptions:

- Costs and durations associated with preventive and corrective actions are known and constant,

- All replacement actions are perfectly performed and only new components are used,
- Failures are detected instantaneously,
- The whole system is replaced, no component is replaced alone.
- All required resources are available when needed, which means that there is no waiting time.

The expected total cost per unit of time over an infinite horizon is given by:

$$C(T) = \frac{E[total\ cost]}{E[cycle]} \quad (1)$$

Where $E[total\ cost]$ is the expected total cost and $E[cycle]$ is the expected replacement cycle duration. That is:

$$E[total\ cost] = C_c F_s(T) + C_p R_s(T) \quad (2)$$

and

$$E[cycle] = \int_0^T R_s(u)du + T_c F_s(T) + T_p R_s(T) \quad (3)$$

Where $R_s(T) = 1 - F_s(T)$. Then:

$$C(T) = \frac{C_c F_s(T) + C_p R_s(T)}{\int_0^T R_s(u)du + T_c F_s(T) + T_p R_s(T)} \quad (4)$$

Let us now establish the expression of $F_s(T)$ when components (1) and (2) are stochastically dependent and the failure is characterized by one-sided domino effect. This mean that, the failure of component (1) at instant t may induce the failure of component (2) with probability $p_{1\to2}$ after some random delay τ. Let $h_{p_{1\to2}}(.)$ be the pdf associated with the random variable τ. According to one-sided domino effect, the failure of component (2) has no impact on the behavior of component (1). The system will be in a failed state when both components fail. This failure can happen when one of the three independent and mutually exclusive events S_1, S_2 and S_3 occurs. Let $P\big(S_i(t)\big)\ i = 1,2,3$ be the probability that event S_i occurs at time t, then:

$$F_s(t) = P\big(S_1(t)\big) + P\big(S_2(t)\big) + P\big(S_3(t)\big) \quad (5)$$

Where

S_1: the failure of (1) induces the failure of (2) with domino effect.

S_2:the failure of (1) is followed by the failure of (2) with no domino effect.

S_3: the failure of (2) is followed by the failure of (1).

The expression of each probability is given by:

$$P\big(S_1(t)\big) = p_{1\to2}\int_0^t\int_0^\tau f_1(u)h_{p_{1\to2}}(\tau-u)\big(F_2(t)-F_2(u)\big)du\,d\tau \quad (6)$$

$$P\big(S_2(t)\big) = (1-p_{1\to2})\int_0^t f_1(\tau)\big(F_2(t)-F_2(\tau)\big)d\tau \quad (7)$$

$$P\big(S_3(t)\big) = \int_0^t f_2(\tau)\big(F_1(t)-F_1(\tau)\big)d\tau \quad (8)$$

In the case of independence $p_{1\to2}=0$, the expression of $F_s(t)$ is reduced to the well-known expression: $F_s(t)=F_1(t)F_2(t)$.

The optimal replacement policy T^* if it exists satisfies necessarily the condition:

$$\frac{dC(T)}{dT}\Big|_{T=T^*}=0 \quad (9)$$

This gives the expression:

$$\frac{r_s(T^*)\left(\int_0^{T^*}R_s(u)du+T_c\right)+R_s(T^*)}{r_s(T^*)\left(\int_0^{T^*}R_s(u)du+T_p\right)-F_s(T^*)}=\frac{C_c}{C_p} \quad (10)$$

Where $r_s(T^*)$ is the system's failure rate:

$$r_s(T^*)=\frac{1}{R_s(t)}\frac{dF_s(t)}{dt} \quad (11)$$

Let $\varphi(t)$ be the left hand side of equation (10). Given that $\varphi(0)=\infty$ then a finite and unique optimal solution T^* exists if $\varphi(t)$ is monotonically decreasing. This condition yields to:

$$\frac{dr_s(t)}{dt}\left(\int_0^t R_s(u)du+T_cF_s(t)+T_pR_s(t)\right)>0 \quad (12)$$

Or $\frac{dr_s(t)}{dt}>0$, a finite and unique optimal replacement policy T^* exists if the system failure rate $r_s(t)$ is monotonically increasing function.

Remark 1

The increasing monotony of the system's failure rate is due to its parallel structure. In the case of independence $p_{1\to2} = 0$ and two components with constant failure rates λ_1 and λ_2, the system's failure rate equals to $\frac{(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 - \lambda_2) e^{-t(\lambda_1+\lambda_2)}}{1-(1-e^{\lambda_1 t})(1-e^{\lambda_2 t})}$. This expression is an increasing function of *t*. For reasons of brevity, we do not give details of calculation of failure rate in the case of $p_{1\to2} \neq 0$.

Example 1

To illustrate the model, we use exponential distribution to model the lifetimes of components (1) and (2): $f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}, i = 1,2$. We assume also that the parameters of domino effect especially time delay τ follows an exponential distribution, i.e. $h_{p_{1\to2}}(t) = \omega_{p_{1\to2}} e^{-\omega_{p_{1\to2}} t}$. $\omega_{p_{1\to2}}$ is an increasing function of $p_{1\to2}$, $\omega_{p_{1\to2}} = \omega p_{1\to2}$. The probability $p_{1\to2}$ is assumed to be known.

For each value of $p_{1\to2}$, and value of the ratios $\frac{C_c}{C_p}$ and $\frac{T_c}{T_p}$, we find the optimal policy T^*, the associated cost $C(T^*)$ and the ratio $\kappa = \frac{C(T^*)}{C(\infty)}$ which represents the contribution of preventive replacement compared to the replacement at failure only $(T \to \infty)$.

In the first case we assume that $\lambda_1 > \lambda_2$, so the failure of the system is mainly caused by the failure of component (1) followed by domino effect.

Case parameters

$\lambda_1 = 9.10^{-3}, \lambda_2 = 6.10^{-4}, \ \omega = 10^{-3}, \ C_P = 100$ and $T_p = 5$.

For the solution of equation (10), the obtained results are presented in Table 2.1. Graphically, this is presented in Figure 2.1.

Table 2. 1 : Results for optimal policy I

C_c/C_p	T_c/T_p	2				5			
		p				p			
		0.5	0.6	0.7	0.9	0.5	0.6	0.7	0.9
10	T^*	2263	1616	1300	966	2278	1625	1306	971
	$C(T^*)$	0.447	0.441	0.435	0.421	0.444	0.439	0.432	0.419
	κ	0.982	0.952	0.922	0.868	0.983	0.953	0.923	0.870
15	T^*	1605	1215	1002	761	1612	1219	1005	764
	$C(T^*)$	0.654	0.636	0.618	0.583	0.650	0.633	0.615	0.580
	κ	0.958	0.915	0.874	0.800	0.959	0.916	0.876	0.803
20	T^*	1338	1037	864	660	1343	1040	866	662
	$C(T^*)$	0.856	0.825	0.795	0.736	0.851	0.821	0.971	0.733
	κ	0.941	0.890	0.843	0.759	0.942	0.891	0.844	0.761

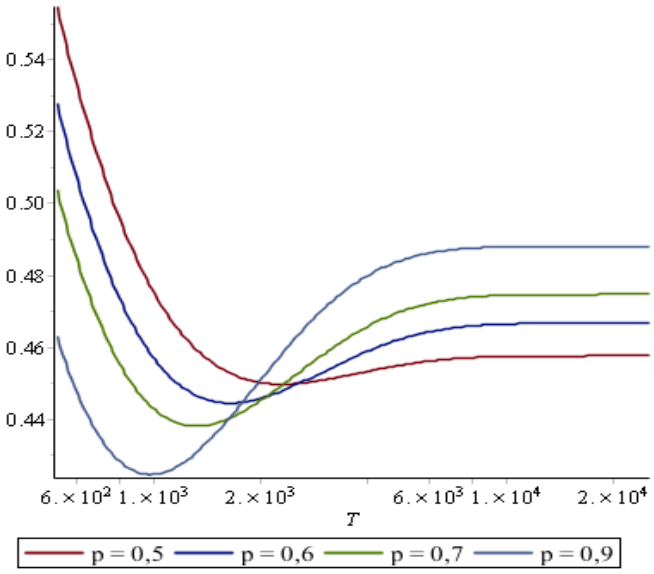


Figure 2. 1 : $C(T)$ graphic curves for multiple values of p

Remark 2

- For constant $\frac{C_c}{C_p}$ and $\frac{T_c}{T_p}$, T^* is a decreasing function with respect to $p_{1\to2}$. This is due to the fact that the system's reliability decreases when $p_{1\to2}$ increases.
- The contribution of the preventive maintenance evaluated by κ becomes increasingly significant as $p_{1\to2}$ and $\frac{C_c}{C_p}$ increase. It can reach up 25%.

We now study the case where $\lambda_1 \leq \lambda_2$. In this case, the system fails when component (2) fails first followed by the failure of component (1). The domino effect does not contribute to the system's failure. The optimal replacement policy does not depend on this. This is confirmed by the solution of equation (10), the optimal policy T^* varies noticeably with $p_{1\to 2}$ (Table 2.2). Figure 2.2 depicts the obtained results.

Table 2. 2 : Optimal solution in the case of λ1 < λ2

C_c/C_p		p = 0.5	0.6	0.7	0.9
30	T^*	171	172	172	172
	$C(T^*)$	1.636	1.592	1.548	1.464
	κ	0.950	0.924	0.899	0.849
40	T^*	122	125	127	131
	$C(T^*)$	1.967	1.190	1.854	1.745
	κ	0.857	0.832	0.807	0.759

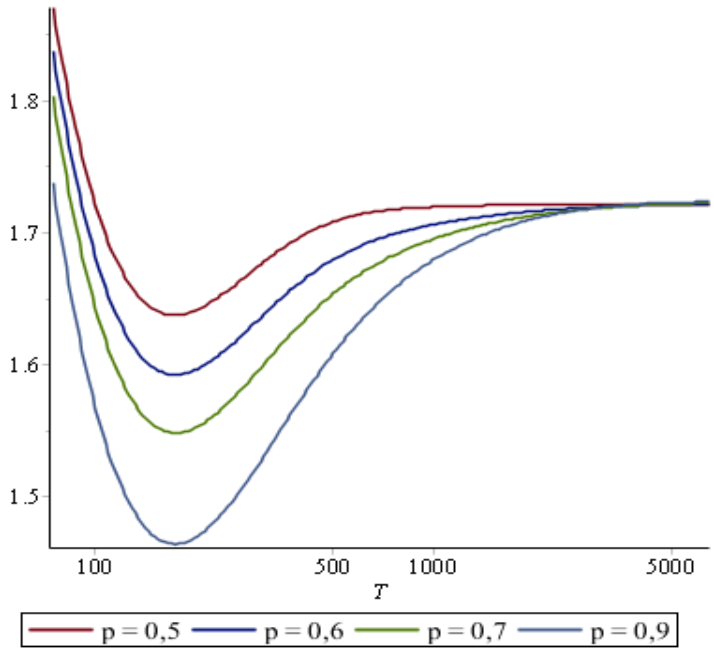


Figure 2. 2: $C(T)$ graphic curves in the case of λ1 < λ2

2.3 Age replacement policy II with no-constant cost structure

For this age replacement policy, we consider that the preventive replacement's cost C_p depends on the system state and its age. That is $C_p = C_p(T)$.

Only for simplicity reasons, we assume that time duration T_p and T_c are negligible. The expected total cost per unit of time over an infinite horizon is given by:

$$C(T) = \frac{C_c F_s(T) + C_p(T) R_s(T)}{\int_0^T R_s(u)du} \tag{13}$$

The expression of $F_s(T)$ is given by (5). Let us establish the expression of $C_p(T)$, which is the expected system's preventive replacement cost. Recall that the system is replaced preventively if its age reaches *T*. At this time, the system will be at one of the three mutually exclusive states: E_{11}, E_{01} and E_{10}. At the state E_{11} both components (1) and (2) are in operating state. E_{10} corresponds to the state where component (1) is in operating state and component (2) is in failed state. E_{01} corresponds to the state where only component (2) is in working state.

Let p_{ij} be the probability that the system will be at state E_{ij} when *t* reaches age *T*:

$$p_{11} = R_1(T)R_2(T) \tag{14}$$

$$p_{01} = \left(\int_0^T f_1(u)\frac{R_2(T-u)}{R_2(u)}du\right)\left(1 - \int_0^T h_{p_{1\to 2}}(T-u)du\right) \tag{15}$$

$$p_{10} = R_1(T)F_2(T) \tag{16}$$

Then, the expect value of preventive replacement cost $C_p(T)$ is given by:

$$C_p(T) = p_{11}C_{p_{11}} + p_{01}C_{p_{01}} + p_{10}C_{p_{10}} \tag{17}$$

Costs $C_{p_{11}}$, $C_{p_{01}}$ and $C_{p_{10}}$ are respectively the costs incurred to replace the system when it is in the state E_{11}, E_{01} and E_{10}.

We assume that $\mathrm{C}_{p_{01}} > \mathrm{C}_{p_{10}} > \mathrm{C}_{p_{11}}$. The optimal replacement policy T^* if it exists, satisfies the necessary condition (9). This is modeled by equation (18).

$$\frac{C_p(T^*)R_S(T^*)-\frac{dC_p(T)}{dT}\left(\int_0^{T^*}R_S(u)du\right)+r_s(T^*)C_p(T^*)\left(\int_0^{T^*}R_S(u)du\right)}{r_s(T^*)\left(\int_0^{T^*}R_S(u)du+T_p\right)-F_S(T^*)}=C_c \qquad (18)$$

The conditions of optimality of the solution still unchanged (i.e: system failure rate $r_s(t)$ is monotonically increasing function and the replacement cost at failure C_c is higher than the preventive replacement cost $C_p(T)$).

Example 2

We used the same numerical parameters as policy I and we choose the following values of costs: $C_{p_{11}}=10, C_{p_{10}}=100,\ C_{p_{01}}=150$. We will compare the case where C_p depends on *T* with the case where C_p is assumed to be constant. Table 2.3 presents the solution of equation (18), as well as the case where C_p is constant. C_p equals 100.

Table 2. 3 : Optimal policy II compared with the case where C_p is constant

	Cc	1000				2000			
		p				p			
		0.5	0.6	0.7	0.9	0.5	0.6	0.7	0.9
Cp constant	T^*	2305	1640	1317	977	1368	1056	879	671
	$C(T^*)$	0.449	0.444	0.438	0.424	0.861	0.832	0.802	0.743
	κ	0.982	0.952	0.922	0.870	0.941	0.891	0.844	0.761
Cp (T)	T^*	1613	1335	1153	920	1274	1047	899	710
	$C(T^*)$	0.422	0.410	0.397	0.373	0.828	0.793	0.759	0.693
	κ	0.924	0.878	0.837	0.765	0.904	0.849	0.799	0.710

Remark 3

- The cost $C(T^*)$ of optimal replacement policy when $C_p(T)$ is variable is always lower than C_p is constant.
- This variation becomes important as $p_{1\to2}$ increases, it can reach 29%.
- Consequently, the ratio κ is more significant if it is considered that the preventive cost C_p depends on *T*.

Graphically, this is presented in Figure 2.3 and Figure 2.4

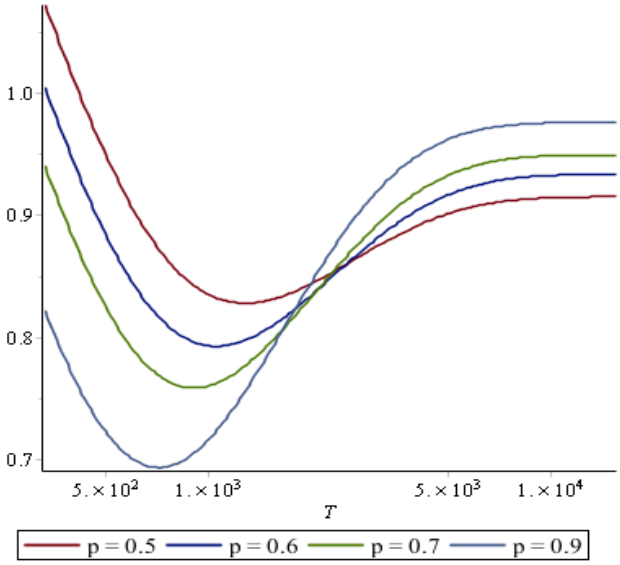


Figure 2. 3 : $C_p(T)$ if C_p depends on T

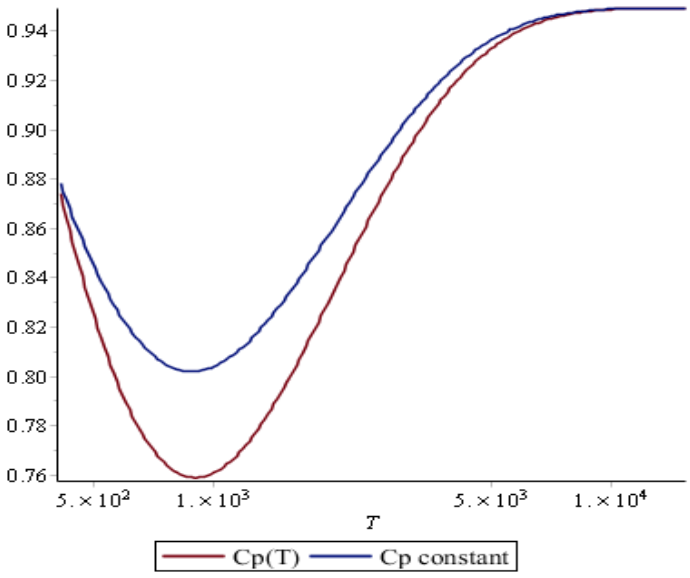


Figure 2. 4 : $C(T)$ if C_p is constant with p=0.7

2.4 Conclusion

Two age replacement policies have been investigated for a system consisting of two parallel components which are stochastically dependent. For the policy I, the costs associated with

maintenance actions are assumed to be constant and the time duration to perform preventive and corrective actions are not negligible. For the policy II, the cost to perform a preventive replacement depends on the age and the state of the system. The performance of each replacement policy is evaluated in term of expected total cost per unit of time over an infinite horizon. It was shown that a unique and finite replacement policy T^* exists if the system's failure rate is an increasing function. Numerical results have been obtained for two different settings. All parameters have been arbitrarily selected. Maple solver has been used to get the optimal policy T^* for the investigated policies. The analytical model developed in this paper can be extended to other situations: bilateral domino effect, more than two component systems or the case of system's availability optimization. Another way could be investigated and is related to the system's design. Knowing that the domino effect is an undesirable event and it is not possible to reduce its impact on system's reliability, we could consider the probability of domino effect (p) as a variable in an optimization problem and we can calculate the optimal value of p that we can tolerate under the constraint of expected reliability level or costs.

References

[1] Albin, S.L. Chao, S. Preventive Replacement in Systems with Dependent Components. IEEE Transactions on reliability, Vol. 41, no 2, 1992.

[2] Apostolakis, G. Moieni, P. The Foundations of Models of Dependence in Probabilistic Safety Assessment. Reliability Engineering , 18, 1987.

[3] Cozzani, V et al. The assessment of risk caused by domino effect in quantitative area risk analysis. Journal of Hazardous Materials, 127, 2005.

[4] Delvosalle, Ch. Domino effects phenomena: Definition, Overview and Classification, European Seminar on Domino Effects. Leuven, Belgium, 1996.

[5] Filus, J. On a Type of Dependency between Weibull Lifetimes of System Components. Reliability Engineering and System Safety, 31, 1991.

[6] Freund, J.E. A Bivariate extension of exponential distribution. Journal of the American Statistical Assiciation, Vol 56, no 296, 1961.

[7] Greig, G.L. Second moment reliability analysis of redundant systems with dependent failures. Reliability Engineering and System Safety, 41, 1993.

[8] Jhang, J.P. Sheu, S.H. Optimal age and block replacement policies for a multi-component system with failure interaction. International Journal of Systems Science, Vol 31, issue 5, 2000.

[9] Kourniotis, S.P, Kiranoudis, C.T, Markatos, N.C. Statistical analysis of domino chemical accidents. Journal of Hazardous Materials , 7, 2000.

[10] Lees, F.P. Loss Prevention in the Process Industries, Vol. 1, Butterworth, Heinemann, 1996.

[11] Lai, M.T. Yuan, J. Periodic Replacement Model for a Parallel System Subject to Independent and Common Cause Shock Failures. Reliability Engineering and System Safety, 31, 1991.

[12] Lai, M.T, Yan, H. Optimal number of minimal repairs with cumulative repair cost limit for a two-unit system with failure rate interactions. International Journal of Systems Science, Feb 2014

[13] Lai, M.T, Chen, Y.C. Optimal periodic replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 29, 2006.

[14] Marshall, A.W. Olkin, I. A Multivariate Exponential Distribution. Journal of the American Statistical Association, 62, 317, 1967.

[15] Murthy, D.N.P. Nguyen, D.G. Study of two-component system with failure interaction. Naval Research Logistics Quarterly, Vol 32, 1985.

[16] Murthy, D. N. P and. Wilson, R. J. Parameter estimation in multi-component systems with failure. Applied Stochastic Models and Data analysis, Vol 10, 1994.

[17] Nakagawa, T. Murthy, D.N.P. Optimal replacement policies for a two-unit system with failure interaction. Recherche opérationnelle/Operatoins Research, Vol 27, no 4, 1993.

[18] Nguyen, Q.B, Mebarki, A, Ami Saada, R,Mercier, F, Reimeringer, M. Integrated probabilistic framework for domino effect and risk analysis. Advances in Engineering Software 40, 2009.

[19] Pettitt, G.N, Schumacher, R.R., Seeley, L.A. Evaluating the probability of major hazardous incidents as a result of escalation events, Journal of Loss Prevention in the Process Industries, 6, 1993.

[20] Rakowsky, U.K. Schneeweiss, W.G. Modelling Dependent Component Failures with Domino E¤ects. In The International Conference On Probabilistic Safety Assessment and Management, Berlin, Germany, 2004.

[21] Satow, T. Osaki, S. Optimal replacement policies for a two-unit system with shock damage interaction. Computers & Mathematics with Applications Volume 46, Issue 7, 2003.

[22] Scarf, P.A. Deara, M. Block replacement policies for a two-component system with failure dependence. Naval Research Logistics, 50, 2003.

[23] Sung, C.K, Sheu, S.H, Hsu, T.S, Chen, Y.C. Extended optimal replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction and external shocks. International Journal of Systems Science Volume 44, Issue 5, 2013.

[24] Thomas, L.C. A survey of Maintenance and replacement Models for Maintainability and Reliability of Multi-Item Systems . Reliability Engineering, 16, 1986.

[25] Weinman, D G. A multivariate extension of the exponential distribution. Ph. D. Thesis, Arizona State University, 1966.

[26] Zequeira, R.I, Berenguer, C. On the inspection policy of a two-component parallel system with failure interaction. Reliability Engineering and System Safety, 88,2005.

Chapitre 3: Multicriteria Decision Analysis Framework for Preventive Replacement Policy

Z. Malki D. Ait-Kadi L. Benabbou: "*Multicriteria Decision Analysis Framework for Preventive Replacement Policy* ". Ce papier est en cours d'évaluation dans International Journal of Production Economics. .

Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle d'analyse multicritère dans un contexte de politique de remplacement préventif. Le système étudié est composé de deux composants connectés en parallèle et sont en dépendance stochastique. La politique de remplacement proposée est de type Age. Le modèle considère les deux critères suivants : le coût espéré par unité de temps du remplacement et la disponibilité du système. L'approche de résolution est basée sur la méthode de la fonction d'utilité multicritère. Cette approche permet à la fois d'agréger les deux critères et de prendre en considération les préférences du décideur.

Abstract

In this work we investigate a preventive replacement model by considering more than one decision criterion. The system studied is consisting of two parallel-components with a stochastic dependence. This dependence is modeled by a one-sided domino effect. The proposed replacement policy suggests replacing the whole system upon failure or at age T whichever occurs first. In the model formulation, cost and availability are derived and expressed in term of the decision variable T. The optimization approach is based on the Multi-attribute utility function. This technique makes it possible both to aggregate the two criterions and to include the preferences of the decision maker.

Keywords: Preventive replacement policy, multi-objective optimization, utility function.

3.1 Introduction

In defining the right replacement policy, professionals' faces a number of objectives which they need to handle. As pointed in Gits [16], the classic selecting approaches based on optimization do not always feet the company's goals. Furthermore many challenged maintenance problems cannot be modeled by those classic approaches with a single objective function. In fact, many conflicting objectives are to be considered in the same time. This awareness of conflicting aspects leads both to Multi-objective optimization and to Multi-criteria Decision Analysis (MCDA). Many multi-objective maintenance models have been published. Abdollahzadeh and al [2] have developed an opportunistic maintenance model of wind farm. The model looks to maximize the expected rate of energy and to minimize the total expected costs of maintenance. The authors have considered the existence of a limited number for maintenance groups and the optimization approach used the particle swarm algorithm. Wang and Liu [27] have investigated the problem of the integration of maintenance activities in the production scheduling of a system using several resources. The model proposed targets both the minimization of the unavailability of resources and the minimization of production makespan. The authors have used the Non-dominated Sorting Genetic Algorithm (NSGA) to solve the problem. Ayoobian and Mohsendokht [6] have focused on the maintenance of nuclear power plant where it is a real critical issue. The model aims to optimize the unavailability of the plant, the cost of maintenance activities and the exposure time. Kamran [19] has studied the case of

manufacturing system subject to a preventive replacement policy. A multi-objective nonlinear mixed-integer program has been used to model the problem and the author has used the goal programming in order to obtain a set of non-dominated solutions. Previously Kralj and Rajakovic [21] have studied a multi-objective maintenance model for thermal generating units. The model aimed simultaneously to maximize the power system reliability, to minimize the fuel costs, and to minimize the constraints violations. The problem has been solved by the Branch and Bound algorithm. Chiu and Lin [10] have considered the problem of reinforced concrete buildings. They have studied the problem with five objectives to optimize, namely: to minimize the life cost cycle, to minimize failure probability, to minimize spalling probability, to maximize rationality and to minimize maintenance times. The problem has been solved by Particle Swarm Optimization method (PSO).

The Multicriteria Decision Analysis has been used in many aspects of maintenance decision making. Keeney and Raifa [20] have used Multi-Attribute Utility Theory (MAUT) for maintenance planning by considering the tradeoff between system performance, quantified by the system interruption time, and the contract cost. Almeida and Souza [5], Almaida and Bohoris [4] and Almeida [3] have applied this model to define maintenance strategy. More recently Cavalcante and Lopes [8] have considered the case of cogeneration system in the sugar industry. They proposed a two-objective maintenance model and solved it by the use of the multi-criteria decision method MAUT.

The Analytic Hierarchy Process (AHP) has been used by Triantaphyllou and al [24] to determine the importance of maintenance criteria such as cost, reparability, and reliability and availability requirements. More recently Goossens and Basten [17] have applied AHP to select maintenance policy for naval ships. Fuzzy AHP has been used by Wang and al [26] to deal with uncertainty of the decision maker preferences for selecting maintenance strategy. To support the decision maker in the choice of preventive maintenance strategy, Chareonsuk and al [9] have used the outranking MCDA method PROMETHEE.

In this work, we propose a two-attribute model for a preventive replacement policy. We highlight the importance of considering more than one criterion. We started by the calculation of the two criterions namely the expected cost of the replacement and the availability of the system. We introduced the partial utility function of each criterion and we used the additive

form to aggregate the two criterions. The model built is meant to help decision maker to choose the right strategy in the situation of conflicting attributes. Numerical example is provided to illustrate the approach proposed.

3.2 Replacement policy model

We consider the age replacement policy that consists of the replacement of the whole system upon failure or at age T whichever occurs first. The system we consider is composed of two parallel-components system with a stochastic dependence. The failure of component (1) at instant t may induce the failure of component (2) at instant $t + \tau$ with probability $p_{1\to2}$. The time delay τ is a random variable with a known probability density function $h_{p_{1\to2}}(.)$ (see Malki et al [22]).

The following notations are used:

- t_i lifetime of component $i = 1, 2$
- $F_i(.)$ probability distribution function associated with t_i
- $f_i(.)$ probability density function associated with t_i
- $R_i(.)$ reliability of component i
- $F_s(.)$ probability distribution function associated with system lifetime
- $h_{p_{1\to2}}(.)$ probability density function associated with the random delay τ
- $p_{1\to2}$ domino effect probability
- $R_s(.)$ system reliability $R_s(.) = 1 - F_s(.)$
- $r_s(.)$ system failure rate
- C_p cost suffered for each system replacement
- C_c cost suffered for each failure replacement
- T_p time duration to perform each preventive replacement
- T_c time duration associated with each failure replacement
- T preventive replacement age
- $C(.)$ expected total cost per unit of time over an infinite horizon
- $A(.)$ the availability of the system
- $u_k(.)$ the partial utility function of the criterion k (k =1,2)

- $U(.)$ the utility function
- w_k the individual weight of the criterion k (k =1,2)

Some assumptions are considered to develop the model:

- After each replacement the system is in as-good-as new condition,
- All costs and durations associated with preventive and corrective actions are known and constant,
- Failures are detected instantaneously,
- All required resources are available when needed.

The model aims to optimize both of expected cost of replacement and the availability of the system. The two attributes are expressed as follow:

$$C(T) = \frac{E[Total\ cost]}{E[Cycle]} \quad (1)$$

and

$$A(T) = \frac{E[Cycle]}{E[Cycle]+E[Downtime]} \quad (2)$$

Where

$E[Total\ cost]$ is the expected total cost of replacement and

$E[Cycle]$ is the expected operation cycle and

$E[Downtime]$ is the expected down time duration.

The expression of each term is given by

$$E[Total\ cost] = C_c F_s(T) + C_p R_s(T) \quad (3)$$

And

$$E[Cycle] = \int_0^T R_s(u)du \quad (4)$$

And

$$E[Downtime] = T_c F_s(T) + T_p R_s(T) \quad (5)$$

That is,

$$C(T) = \frac{C_c F_s(T) + C_p R_s(T)}{\int_0^T R_s(u)du} \quad (6)$$

And

$$A(T) = \frac{\int_0^T R_s(u)du}{\int_0^T R_s(u)du + T_c F_s(T) + T_p R_s(T)} \quad (7)$$

Let us now establish the expression of $F_s(T)$ when components (1) and (2) are stochastically dependent and the failure is characterized by one-sided domino effect. The system will be in a failed state when both components fail. This failure can happen when one of the three independent and mutually exclusive events S_1, S_2 and S_3 occurs. Let $P\big(S_i(t)\big)\ i = 1,2,3$ be the probability that event S_i occurs at time t then:

$$F_s(t) = P\big(S_1(t)\big) + P\big(S_2(t)\big) + P\big(S_3(t)\big) \quad (8)$$

Where

S_1: the failure of (1) induces the failure of (2) with domino effect.

S_2:the failure of (1) is followed by the failure of (2) with no domino effect.

S_3: the failure of (2) is followed by the failure of (1).

The expression of each probability is given by:

$$P\big(S_1(t)\big) = p_{1\to 2} \int_0^t \int_0^\tau f_1(u) h_{p_{1\to 2}}(\tau - t)\big(F_2(t) - F_2(u)\big)du d\tau \quad (9)$$

$$P\big(S_2(t)\big) = (1 - p_{1\to 2}) \int_0^t f_1(\tau)\big(F_2(t) - F_2(\tau)\big)d\tau \quad (10)$$

$$P\big(S_3(t)\big) = \int_0^t f_2(\tau)\big(F_1(t) - F_1(\tau)\big)d\tau \quad (11)$$

In order to derive the expression of the two criteria $C(T)$ and $A(T)$ it is sufficient to replace the expression of $F_s(T)$ or $R_s(T)$ in equations (6) and (7).

The optimal replacement policies T^* if they exist satisfy separately the conditions:

$$\frac{dC(T)}{dT}\Big|_{T=T^*} = 0 \text{ for cost} \quad (12)$$

And

$\frac{dA(T)}{dT}|_{T=T^*} = 0$ for availability (13)

A finite and unique optimal replacement policy T^* exists if the system failure rate $r_s(t)$ is monotonically increasing function. This is also true in the case of maximizing the availability of the system. For a parallel structure the monotony of $r_s(t)$ has already been proven (Malki et al [22]).

3.3 Aggregating attributes with MAUT

Multicriteria Decision Aid methods can be classified in four categories depending on the degree of compensation and the Decision maker preferences structure : (i) Elementary methods, (ii) Single synthesizing criterion (ii) Outranking methods (iv) Mixed methods. Guitouni and Martel [18] have described MAUT as the most used method in the single synthesizing criterion category. In this approach, a global utility function U, is used for modeling at the best the Decision Maker preferences. MAUT assumes that there exists a partial utility function u_j according to each attribute g_j. Attributes can be conflicted, or measured in different scales (qualitative and/or quantitative one). Each partial utility transforms the scale of the consistent attribute into utility term. The global utility function aggregates partial utility functions into a single synthesizing criterion. Hence the evaluations and comparisons between alternatives are straightforward. Many forms are used to assess the global utility function: additive, multiplicative and distributional [18].

To define the form of the Utility function many approaches were developed [11, 12, 13, 14, 15]. In [1], Abbas proposed an exhaustive survey of methods for constructing multi-attribute utility functions. Utility function is built with respect of the four Van Nueman Morgenstane axioms: the preference independence, transitivity, dominance and invariance [7,25].

To define replacement policy, two conflicting attributes are to be handled at the same time: Cost $C(T)$ and availability $A(T)$. As explained before MAUT, is widely used as single criterion synthesizing method. The additive form is often assumed as Multi-attribute utility function U. This form infers an independence condition in preferences between $C(T)$ and $A(T)$. Hence we define $U(T)$ as:

$$U(T) = w_1 u_1\big(C(T)\big) + w_2 u_2\big(A(T)\big) \quad (14)$$

Where w_j are the attributes weights achieving $w_1 + w_2 = 1$ and $u_1(.)$ and $u_2(.)$ are the partial utility functions.

Exponential utility function is generally used for partial utility [3,8,20]. Hence, to take into account the decision maker risk aversion and the optimization direction partial utility functions are assumed as:

$$u_1\big(C(T)\big) = a_1 e^{-b_1 C(T)} \tag{15}$$

and

$$u_2\big(A(T)\big) = a_2 e^{\frac{-b_2}{A(T)}} \tag{16}$$

Where a_1, b_1, a_2 and $b_2$are the parameters of the partial utility functions $u_1(.)$ and $u_2(.)$. The calculation of these parameters is based on the following roles: when the function value $u_1(.)$ is set to 1 the cost is at its minimum value and $u_1(.)$ is at its minimum value when the cost is at its maximum value. By the opposite, when the function value $u_2(.)$ is set to 1 the availability is at its maximum value and $u_2(.)$ is at its minimum value when the availability is at its minimum value.

Once these parameters are determined and the weight of each attribute is given by the decision Maker, the Multi-attribute utility function $U(T)$ is completely defined. The value of replacement policy T^* that optimizes simultaneously the cost and the availability is that maximizes the utility function $U(T)$.

3.4 Illustrative example

To illustrate the model, we use exponential distribution to model the lifetimes of components (1) and (2): $f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}, i = 1,2$. We assume also that the parameters of domino effect especially time delay τ follows an exponential distribution, i.e. $h_{p_{1\to2}}(t) = \omega_{p_{1\to2}} e^{-\omega_{p_{1\to2}} t}$. $\omega_{p_{1\to2}}$ is an increasing function of $p_{1\to2}$, $\omega_{p_{1\to2}} = \omega p_{1\to2}$. The probability $p_{1\to2}$ is assumed to be known.

Case parameters

$\lambda_1 = 9.10^{-3}, \lambda_2 = 6.10^{-4},\ \omega = 10^{-3},\ C_P = 10\ ,\ C_c = 100\ , T_c = 1000, T_P = 70$

Graphically, cost and availability are presented in figures 3.1 and 3.2.

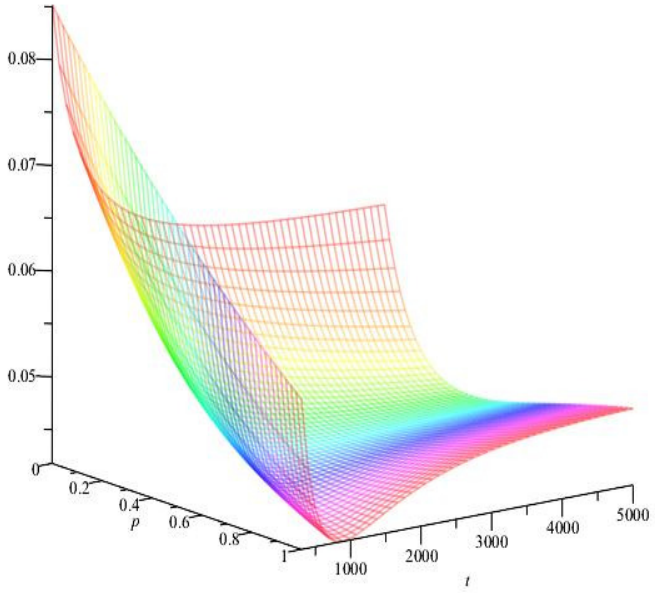


Figure 3. 1: $C(T)$ graphic curve

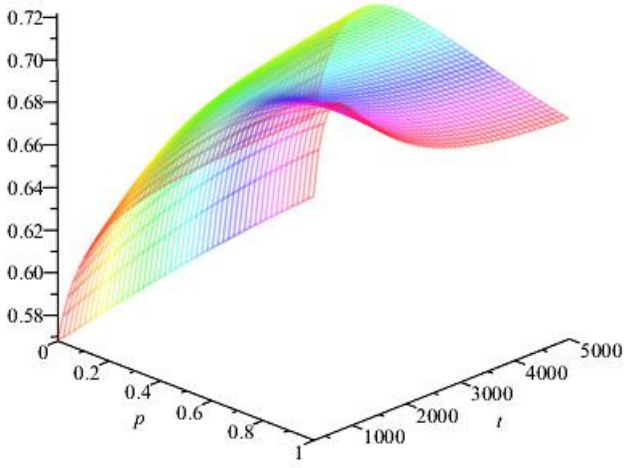


Figure 3. 2 : $A(T)$ graphic curve

For $p = 0{,}8$ the numerical resolution of equations (12) and (13) gives the following values $T^*_{Cost} = 1117$ and $T^*_{Availability} = 897$. These values are optimizing separately the cost of replacement and the availability of the system. The evaluation of the cost and the availability at these values shows the conflicting nature of these attributes since we have $C(T^*_{Cost}) < C\left(T^*_{Availability}\right)$ and $A\left(T^*_{Availability}\right) > A(T^*_{Cost})$.

The resolution of equation (14) allows us to calculate the optimal policy T^* that optimizes simultaneously $C(T)$ and $A(T)$. Thus, for a weight set $w_1 = 0.3$ and $w_2 = 0.7$ the expression of the utility function is given by: $U(T) = 2{,}22\ 10^4\ e^{-259\,C(T)} + 1{,}53\ 10^5 e^{-\frac{8{,}73}{A(T)}}$. The optimal resolution gives the value of $T^* = 1017$.

The result obtained represents a compromise solution between the optimal solutions of equations (12) and (13). The obverse side of the aggregation is the loss of the quality of the solution in terms of cost and availability. Indeed we obtained the following slight gap: $C(T^*) - C(T^*_{Cost}) = 6{,}2\ \ 10^{-5}$ and $A(T^*) - A\left(T^*_{Availability}\right) = -5{,}6\ 10^{-4}$.

In order to make sure that the result obtained reflects completely the decision maker's preferences, we analyzed the sensitivity of the solution obtained depending of the weight set. Table 3.1 shows the results of this analysis.

Table 3. 1: Sensitivity analysis of the model

w_1	w_2	T^*_{Cost}	$T^*_{Availability}$	T^*	Δ_{Cost}	Δ_{Av}
0,2	0,8	1117	897	987	1,10 10-04	-3,26 10-04
0,3	0,7	1117	897	1017	6,20 10-05	-5,58 10-04
0,4	0,6	1117	897	1041	3,49 10-05	-7,74 10-04
0,5	0,5	1117	897	1060	1,91 10-05	-9,67 10-04
0,6	0,4	1117	897	1075	9,89 10-06	-1,14 10-03
0,7	0,3	1117	897	1088	4,59 10-06	-1,28 10-03
0,8	0,2	1117	897	1099	1,71 10-06	-1,42 10-03

It is obvious from this table that the more importance we give to the cost (high values of w_1) the more the value of T^* is approaching T^*_{Cost} and the difference between the corresponding costs is subsequently reducing. The same is inversely true for availability attribute.

3.5 Conclusion

In this paper we have proposed a framework for a decision making problem. We have considered the problem of preventive replacement policy which is regularly experienced in the real life. The prime difficulty for the decision maker is to deal with more than one optimization criterion. These criterions are generally conflicting, incommensurable and measured on different and various scales. The use of Multi-criteria Decision Analysis is completely justified and reasonable. The choice of the utility function to aggregate two criterions offers the advantage to be simple, easy to use and to understand by the decision maker. Moreover we have checked the consistency of the model at the partial utility level. In effect, the values that optimize separately the cost and the availability are the same values that optimize the corresponding partial utility functions. This framework could be extended to other replacement policies by adding more criterions or by using other aggregation forms.

References

[1] Abbas, A.E. Constructing Multiattribute Utility Functions for Decision Analysis. Tutorials on operations research, INFORMS, 2010.

[2] Abdollahzadeh, H. Atashgar, K. Abbasi, M. Multi-objective opportunistic maintenance optimization of a wind farm considering limited number of maintenance groups. Renewable Energy, Volume 88, 2016.

[3] Almeida de, A.T. Multicriteria decision making on maintenance: Spares and contracts planning. European Journal of Operational Research, 129, 2001.

[4] Almeida de, A.T. Bohoris, G.A. Decision theory in maintenance decision theory. Journal of Quality in Maintenance Engineering, 1 (1), 1995.

[5] Almeida de, A.T. Souza, F.M.C. Decision theory in maintenance strategy for a two-unit redundant standby system. IEEE Transactions on Reliability, 42 (3), 1993.

[6] Ayoobian, N. Mohsendokht, M. Multi-objective optimization of maintenance programs In nuclear power plants using Genetic Algorithm and Sensitivity Index decision making. Annals of Nuclear Energy, Volume 88, 2016.

[7] Berger, J.O. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer, New York, 1985.

[8] Cavalcante, C. Lopes, R.S. Multi-criteria model to support the definition of opportunistic maintenance policy: A study in a cogeneration system. Energy, 80, 2015.

[9] Chareonsuk, C. Nagarura, N. Tabucanona, M. T. A multicriteria approach to the selection of preventive maintenance intervals. International Journal of Production Economics, Vol. 49, No. 1, 1997.

[10] Chiu, C.K. Lin, Y.F. Multi-objective decision-making supporting system of maintenance strategies for deteriorating reinforced concrete buildings. Automation in Construction, Volume 39, 2014.

[11] Farquahar, P.H. Utility assessment methods, Management Science, 30 (11), 1984.

[12] Fishburn, P.C. Methods of estimating additive utilities, Management Science, 13 (7), 1967.

[13] Fishburn, P.C. Semiorders and choice functions, Econometrica, 43, 1975.

[14] Fishburn, P.C. Utility independence on subsets of product sets, Operations Research, 124, 1976.

[15] Fishburn, P.C. A survey of multiattribute/multicriterion evaluation theories, in: S. Zionts (Ed.), Multiple Criterion Problem Solving, Springer, Heidelberg, 1978.

[16] Gits, C. Design of maintenance concepts. International Journal of Production Economics, Vol. 24, No. 3, 1992.

[17] Goossens, A. J. M. Basten, R. J. I. Exploring maintenance policy selection using the Analytic Hierarchy Process; An application for naval ships. Reliability Engineering and System Safety, 142, 2015.

[18] Guitouni, A. Martel, J. M. Tentative guidelines to help choosing an appropriate MCDA Method. European Journal of Operational Research, 109, 1998.

[19] Kamran S. Moghaddam. Multi-objective preventive maintenance and replacement scheduling in a manufacturing system using goal programming. International Journal of Production Economics, Volume 146, Issue 2, 2013.

[20] Keeney, R.L. Raifa, H. Decision with Multiple Objectives: Preferences and Value Trade-offs. Wiley, New York, 1976.

[21] Kralj, B. Petrovic, R-A. Multiobjective Optimization Approach To Thermal Generating Units Maintenance Scheduling. European Journal of Operational Research. Vol. 84, No. 2, 1995.
[22] Malki, Z. Ait-Kadi, D. Ouali, M.S. Age replacement policies for two-component systems with stochastic dependence. Journal of Quality in Maintenance Engineering, Vol 21, Issue 3, 2015.
[23] Moghaddam, K.S. Multi-objective preventive maintenance and replacement scheduling in a manufacturing system using goal programming. International Journal of Production Economics, Volume 146, Issue 2, 2013.
[24] Triantaphyllou, E. Kovalerchuk B. Mann, L. Knapp, G-M. Determining the most important criteria in maintenance decision making. Journal of Quality in Maintenance Engineering, 3 (1), 1997.
[25] Von Neumann, J. Morgenstern, O. Theory of games and economic behavior, cited in S. Li, A. Adams (1995), Is there something more important behind framing?, Organizational Behavior and Human Decision Processes 62 (2), 1944.
[26] Wang, L. Chu, J. Wu, J. Selection of optimum maintenance strategies based on a fuzzy analytic hierarchy process. International Journal of Production Economics, 107, 2007.
[27] Wang, S. Liu, M. Multi-objective optimization of parallel machine scheduling integrated with multi-resources preventive maintenance planning. Journal of Manufacturing Systems, Volume 37, Part 1, 2015.

Chapitre 4: Redundancy allocation problem for series-parallel system subject to a preventive replacement policy

Zouheir Malki, Daoud Ait-Kadi, Nabil Nahas ''*Redundancy allocation problem for series-parallel system subject to a preventive replacement policy''* Article en cours d'évaluation au journal *Reliability Engineering and System Safety* (RESS).

Résumé

Ce chapitre traite le problème de l'affectation de la redondance d'un système série-parallèle sujet à une politique de remplacement préventif. Le système étudié est composé de N sous-systèmes en série et chaque sous-système j $(j = 1 \ldots N)$ est composé de n_j composants identiques connectés en parallèle. Pour chaque sous-système j, nous proposons une politique de remplacement de type m-pannes et qui consiste à remplacer tout le sous-système j si m_j pannes apparaissent. Dans le modèle mathématique, cette politique induit un re-calcul de la fiabilité du système ainsi que la prise en compte de son coût dans la contrainte du coût et du budget. Le modèle développé est ainsi comparé au cas où le système n'est sujet à aucune politique de remplacement.

Dans la résolution de ce problème, nous avons opté pour l'algorithme du recuit simulé et les résultats obtenus à partir d'un exemple-test démontrent que l'établissement d'une politique de remplacement préventif permet d'obtenir des structures plus fiables et plus économiques.

Abstract

In this paper we develop a redundancy allocation model for series-parallel system subject to a preventive replacement policy. The system is consisting of N stages in series and each stage j $(j = 1 \ldots N)$ contains n_j identical components connected in parallel. During its operational phase the system will be subject to a preventive replacement policy. Under this policy each stage *j* is completely replaced if m_j failures appeared $(m_j < n_j)$. Expected cost per unit time over an infinite horizon of the replacement is derived and the value of the threshold that minimizes the cost is calculated. In the redundancy allocation formulation, replacement cost is incorporated in the budget constraint and reliability system is calculated considering replacement policy. Simulated Annealing is applied as an optimization technique and numerical results are provided. The results show that the establishment of the replacement policy gets a better reliability system and more economic design.

4.1 Introduction

4.1.1 Problem Description

The improvement in reliability of multi-component system involves the improvement in reliability of its components. This can be done by using efficient technologies or by using a most appropriate structure like a passive or active redundancy. However the feasibility of each of these alternatives could be limited by cost, weight or space constraints. In many industrial systems (e.g. manufacturing systems, telecommunication/electronics systems and power systems), reliability is considered the most important design measure.

For series-parallel structure (Figure 4.1), the system is consisting of N stages in series and each stage j $(j = 1 \ldots N)$ contains n_j components connected in parallel. There are various technologies of components which are proposed by the suppliers on the market.

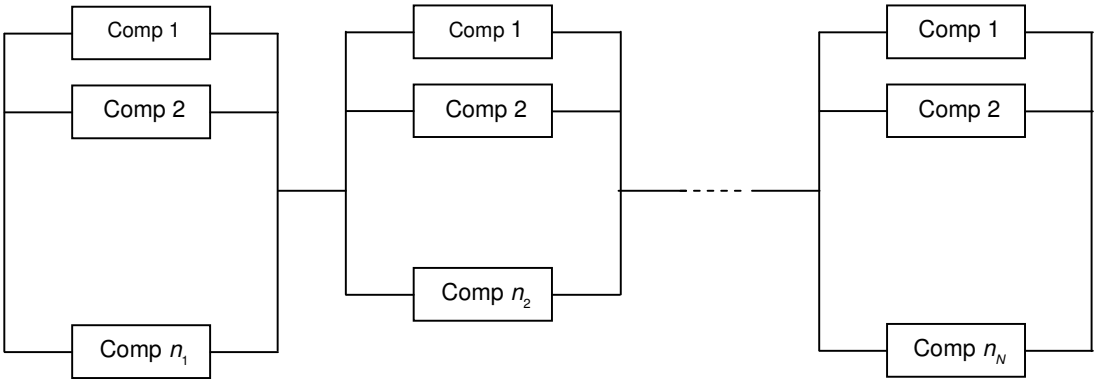


Figure 4. 1: Series-parallel system

The Redundancy Allocation Problem (RAP) can be defined as the selection of the optimal combination of component type and redundancy level in order to achieve a given reliability level with respect to a number of constraints. Components are characterized by their reliability, cost and weight according to their version. The Redundancy Allocation Problem (RAP) is formulated to maximize the overall reliability of series-parallel system R_{sys}. That is:

$$\max \quad R_{sys} = \prod_{j=1}^{N} R_j \tag{1}$$

St

$$\sum_{j=1}^{N} C_j \leq B \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} W_j \leq W \tag{3}$$

Where R_j, $C_j$and W_j are respectively the reliability, total cost and total weight of the stage j $(j = 1..N)$. B and W represent the permissible values of budget and weight. Constraints (2) and (3) represent respectively the budget and the weight constraints.

It has to be noted that for reparable systems the availability is the more appropriate performance measure than the reliability.

4.1.2 Literature review

Overall, the RAP formulation leads to a non-linear and mixed problem whose analytical treatment is rather complex. Optimal solutions have been obtained for systems of 3 to 5 subsystems. The RAP is NP-hard [10] and has previously been solved using many different optimization approaches and for different formulations ([27] [44]). Optimization approaches to determine optimal or good solutions for the RAP include dynamic programming, e.g. ([4] [15]

[36] [45]), mixed-integer and nonlinear programming [32], and integer programming, e.g. ([6] [16] [17] [32]). But these methods are limited to series-parallel structures where the elements used in parallel are identical. Meta-heuristics, in particular, offer flexibility and a practical way to solve large instances of the relaxed RAP where different elements can be placed in parallel. For example, Genetic Algorithm (GA), a well-known meta-heuristic, is used to solve combinatorial reliability optimization problems e.g.([12] [18] [28] [29] [38] [46] [47]). In addition to genetic algorithms, other heuristic or meta-heuristic approaches have also been efficiently used to deal with system reliability problems with limited number of stages. A Tabu search (TS) meta-heuristic [19] has been developed in [26] to efficiently solve the RAP, while the ant colony optimization meta-heuristic [14] is used in [1] and [30] to solve the problem. Particle Swarm Optimization (PSO) has been proposed in [11] [21] to solve this problem and more recently in [24] the (PSO) has been used to solve the problem with strategy choices. In [34] and [50], the authors proposed harmony search algorithm to deal with this problem. Simulated Annealing has been used to solve efficiently the selecting machines and buffers in unreliable series-parallel production lines in [33]. Simulation approach has been also applied to solve the problem with increasing failure rates of components in [21]. In [7] the RAP is transformed into a multiple choice knapsack problem and solved to optimality by using a branch and cut algorithm. In [49] column generation approach has been used for the problem solving. Other techniques are summarized and presented in [28] and [43].

From replacement policies point of view, age replacement policy has been extensively studies by many authors. In [3] the authors introduced a policy of periodic replacement with minimal repair at failure. [5] considered an imperfect repair model in which, upon failure, the system is replaced with probability p and is minimally repaired with probability $1-p$. [39] discussed various treatment methods and optimal maintenance policies of single and multicomponent systems. [8] considered a replacement model with minimal repair based on a cumulative repair-cost limit policy. In [9], the authors presented a replacement model with age-dependent failure type based on a cumulative repair-cost limit policy. [22] proposed an inspection strategy in which the task of quality management is performed under the considerations of related costs for production, sampling, inventory, and warranty. [31] presented an approach of joint redundancy and imperfect maintenance strategy optimization for multi-state systems. They introduced a generalized imperfect repair model to characterize the stochastic behavior of

multi-state elements after repair, and a replacement policy under which a multi-state element is replaced once it reaches the pre-determined number of failures. [35] considered a parallel system of n identical component with constant failure rate. The system is replaced preventively before failure if the total number of failed components is k, $k+1$,..., $n-1$. It is replaced if all the components have failed. The expected cost of this policy $C(k)$ is derived and optimal threshold k^* is given. [42] considered a n-component system with non-identical Weibull-distributed lifetimes. The whole system is replaced as soon as one of the components fails. [41] proposed to replace the whole system when its age reaches T, or when m failures have occurred, whichever occurs first. [2] considered a parallel system with n identical component with constant failure rate. They proposed to replace m ($m < n$) components if m components failed. They characterized the threshold m^* that minimize the expect cost. [13] gave an excellent overview of replacement policies with a focus on economic dependence. [37] considered a parallel system where the number of units is not constant or predetermined. The system is replaced at time T, or at failure, whichever occurs first.

4.1.3 Paper outline

Few works in the literature combined the replacement policy with the optimal design systems. In this paper we are interested to the redundancy allocation problem by considering replacement policy. We propose m-failure policy for each stage and the RAP is formulated with respect to the costs generated by the replacement. Weight and space constraints are not considered. The content of this paper is organized as follow: section 2 presents the RAP formulation considering replacement policy. We put a special focus on the assumptions and the mathematical model governing the replacement policy. Section 3 presents the simulated annealing for solving the problem. In section 4 we give an illustrative example.

4.2 Problem formulation and modeling

Notations

N	Number of stages in the system
n_j	Number of identical components in stage j, $j = 1..N$
k_{jmax}	Maximum number of elements allowed to be in parallel at stage j, $j = 1..N$
λ_{ij}	Failure rate of i^{th} technology chosen for stage j, $j = 1..N$

m_j^*	Repair threshold of stage *j*, $j = 1..\ N$
$R_{sys}(.)$	Reliability of the system
$R_j(.)$	Reliability of the stage *j* taking into account the replacement policy, $j = 1..\ N$
c_{aj}	Acquisition cost of the stage *j*, $j = 1..N$
c_{0j}	Fixed cost associated with the replacement of stage *j*, $j = 1..\ N$
$c_{1,ij}$	Replacement cost of each component of stage *j* using i^{th} technology
$c_{2,ij}$	Loss production cost per unit time for stage *j* using i^{th} technology
$E_c(n_j, m_j)$	Expected replacement cost of stage *j*, $j = 1..\ N$
$E_\tau(n_j, m_j)$	Expected renewal cycle of stage *j*, $j = 1..\ N$
$C(n_j, m_j)$	Expected total replacement cost per unit time
B	Available budget
H	Time horizon

4.2.1 Mathematical model

As mentioned before, the model we would develop combines the replacement policy with the optimal design of the system. The establishment of such policy will generate an associated costs and the reliability of the system and its components will be modified. We choose to evaluate these changes over a time horizon H. Weight constraint is not considered in this case. In view of these modifications the general formulation of the system Redundancy Allocation Problem can be presented as follows:

$$\max \quad R_{sys}(H) = \prod_{j=1}^{N} R_j\,(H) \tag{4}$$

St

$$\sum_{j=1}^{N} C_{aj} + H \sum_{j=1}^{N} C(n_j, m_j) \leq B \tag{5}$$

The objective function to be maximized is the overall system reliability calculated at horizon H (equation 4). In equation (5) replacement cost is incorporated in the budget constraint. It is well understood that the all stages of the system are supposed to be *s*-independent.

Let's now outline the replacement policy and evaluate the associated costs and the new reliability function. This will allow us to give a more detailed formulation of the model.

4.2.2 m-failure replacement policy

We consider a system consisting of N stages connected in series. Each stage contains n_j identical components connected in parallel. Given that the reliability of each component in the system decreases with time and use, we propose to perform a preventive replacement policy for each stage. m-failure replacement policy is proposed and each stage j will be completely replaced if m_j failures appeared $(m_j < n_j)$.

The mathematical model is based on the following assumptions:

- Replacements are perfectly and instantaneously performed. Only new components are used.
- Independent and identical components are used for each stage j with constant failure rate.
- The number of failed components is known at any time.
- Costs c_{0j}, $c_{1,ij}$ and $c_{2,ij}$are assumed constant and known.
- All required resources are available when needed.

According to this policy, the expected total cost replacement per unit time for each stage j $(j = 1..N)$ is given by:

$$C(n_j, m_j) = \frac{E_c(n_j,m_j)}{E_\tau(n_j,m_j)} \quad (6)$$

We assume a fixed cost c_{0j} for all available technologies. The cost $E_c(n_j, m_j)$ is composed of the replacement of n_j components $c_{0j} + n_j c_{1,lj}$ plus the production losses during a time in which there are m_j failed components. l is the technology used for stage$j$. The expected value of this time is $\frac{1}{(n_j - m_j)}$ and the expected losses cost is $\frac{m_j c_{2,lj}}{\lambda_{lj}(n_j - m_j)}$. Summing these terms over all possible m_j we obtain the following expression of $E_c(n_j, m_j)$:

$$E_c(n_j, m_j) = c_{0j} + n_j c_{1,lj} + \frac{c_{2,lj}}{\lambda_{lj}} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{k}{n_j - k} \quad (7)$$

The expected renewal cycle $E_\tau(n_j, m_j)$ is given by:

$$E_\tau(n_j, m_j) = \sum_{k=0}^{m_j-1} \int_0^\infty \binom{n_j}{k} F_j(t)^k R_j(t)^{n_j-k} dt \quad (8)$$

Where $F_j(t)$ is the failure probability of each component in the stage j with technology i, and $R_j(t) = 1 - F_j(t)$. For exponential distribution lifetime: $F_j(t) = 1 - e^{-\lambda_{lj}t}$. The expected renewal cycle is calculated as follows:

$$E_\tau(n_j, m_j) = \frac{1}{\lambda_{lj}} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{1}{n_j-k} \quad (9)$$

So that, the total cost per unit time is:

$$C(n_j, m_j) = \frac{c_{0j} + n_j c_{1,lj} + \frac{c_{2,lj}}{\lambda_{lj}} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{k}{n_j-k}}{\frac{1}{\lambda_{lj}} \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{1}{n_j-k}} \quad (10)$$

We now seek an optimal number m_j^* which minimizes $C(n_j, m_j)$. m_j^* is the smallest integer m_j for which:

$$C(n_j, m_j + 1) \geq C(n_j, m_j) \quad (11)$$

Proposition: m_j^* is the smallest integer m_j for which:

$$\sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{m_j-k}{n_j-k} \geq \frac{\lambda_{lj}}{c_{2,lj}} (c_{0j} + n_j c_{1,lj}) \quad (12)$$

Proof: Let $w = \mathrm{Min}_{0 \leq m_j \leq n_j} C(n_j, m_j)$ and $d(n_j, m_j) = E_c(n_j, m_j) - \mathrm{w}E_\tau(n_j, m_j)$. By definition of w we have $d(n_j, m_j) > 0$ and $\mathrm{Min}_{0 \leq m_j \leq n_j} d(n_j, m_j) > 0$.

m_j^* minimizes $C(n_j, m_j)$ if and only if it minimizes $d(n_j, m_j)$. So that, m_j^* is the smallest integer m_j for which:

$$d(n_j, m_j + 1) \geq d(n_j, m_j) \quad (13)$$

Then:

$$\frac{m_j c_{2,lj} - w}{n_j - m_j} \geq 0 \quad (14)$$

If $n_j = m_j$ the left hand side of (14) is infinite, such an m_j^* minimizes $d(n_j, m_j)$. Since $d(n_j, m_j^*) = 0$. we have :

$$c_{0j} + n_j c_{1,lj} + \frac{c_{2,lj}}{\lambda_{lj}} \sum_{k=0}^{m_j^*-1} \frac{k}{n_j-k} = \frac{w}{\lambda_{lj}} \sum_{k=0}^{m_j^*-1} \frac{1}{n_j-k} \quad (15)$$

From (14) we have

$$c_{2,lj} m_j \geq w \tag{16}$$

Substuting (16) in (15) we get the inequality.

Remark 1: For all fixed $c_{1,ij}$ and $c_{2,ij}$ and for high values of fixed cost $c_{0,j}$, the optimal repair threshold m_j^* tends towards $n_j - 1$. This reflects the economic dependence; fixed replacement costs are then saved. We tolerate a high number of components fails before performing the replacement.

Remark 2: It is shown that the failure rate of each stage (even the failure rate of each component is constant) is strictly increasing function. This fact makes legitimate the application of the preventive replacement policy.

4.2.3 Calculation of reliability function

Each stage *j* is replaced at each $T_j = E_\tau(n_j, m_j)$ unit of time (Figure 4.2), then the reliability $R_j(H)$ of the stage j at time H is given by:

$$R_j(H) = R_j^{wr}\left(H - p_j T_j\right)\left(R_j^{wr}\left(T_j\right)\right)^{p_j} \tag{17}$$

Where p_j is the number of replacement of stage j within the horizon$H$, ie: $p_j = \left[\frac{H}{T_j}\right]$ and $R_j^{wr}(.)$ represents the reliability in the case that there is no replacement policy performed, its expression is as follows:

$$R_j^{wr}(t) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda_{lj} t}\right)^{n_j} \tag{18}$$

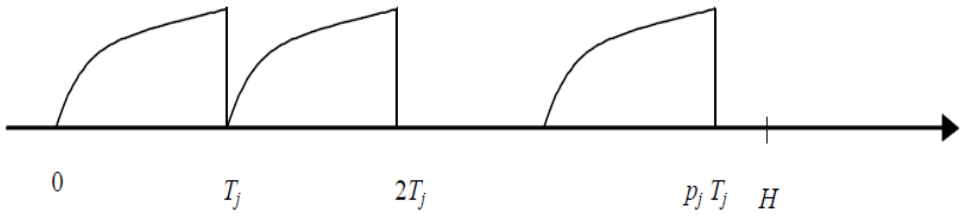


Figure 4. 2: During the horizon H, each stage j will be replaced at T_j, $2T_j$, …, p_jT_j

From (17) and (18), the reliability of the stage *j* can be calculated using the formula:

$$R_j(H) = \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_{lj}\left(H - p_j T_j\right)}\right)^{n_j}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_{lj} H}\right)^{n_j}\right)^{p_j} \quad (19)$$

In order to highlight the impact of the establishment of the replacement policy on system design, we propose to solve either redundancy problems with considering or not the replacement policy. The obtained results allow us to measure the quality of the design in terms of reliability and costs. That is:

Model 1: RAP including replacement policy

$$\max \quad R_{sys}(H) = \prod_{j=1}^{N}\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_{lj}\left(H - p_j T_j\right)}\right)^{n_j}\right)\left(1 - \left(1 - e^{-\lambda_{lj} H}\right)^{n_j}\right)^{p_j}$$

St

$$\sum_{j=1}^{N} C_{aj} + H \sum_{j=1}^{N} C\left(n_j, m_j\right) \leq B \quad (20)$$

And

Model 2: RAP without considering the replacement policy

$$\max \quad R_{sys}(H) = \prod_{j=1}^{N} 1 - \left(1 - e^{-\lambda_{lj} t}\right)^{n_j}$$

St

$$\sum_{j=1}^{N} C_{aj} \leq B \quad (21)$$

Both models (20) and (21) lead to a complicated combinatorial optimization problems. With respect to the reasonable time limitations and to the quality of required solution, the use of meta-heuristics approaches is needed.

4.3 Solving the RAP by using Simulated Annealing

Among a multitude of meta-heuristics, we chose the Simulated Annealing (SA) to solve the two problems that we have already formulated. The choice of the SA is not dictated by any specific

criteria, because the goal is not to compare the performance of meta-heuristics to solve these problems, but to compare two problems solved by the same algorithm.

The simulated annealing exploits the analogy between the way in which a metal cools and freezes into a minimum crystalline energy and the search for a minimum in a more general energy. The connection between this algorithm and mathematical optimization was first noted by [40], but it was [23] who proposed that it forms the basis of optimization technique for combinatorial problems. An overview of different SA applications is given in [25].

The simulated annealing technique is an optimization method suitable for combinatorial problems. A new solution is generated and compared against the current solution. The new solution is accepted as the current solution if the difference in quality does not exceed a dynamically selected threshold. The solutions corresponding to larger increases in cost have a small probability of being accepted. A parameter that regulates the threshold is called temperature and the function that determines the values for the temperature over time is called the cooling scheduling. The temperature decreases over time to decrease the probability of none improve moves.

The simulated annealing proposed for the redundancy allocation problem is given by the following steps:

Step 1: Generate the initial feasible solution S_0, set $S \leftarrow S_0$, and calculate the system reliability $R_{sys}(S)$

Step 2: Set initial temperature θ and cooling rate α ($0 \leq \alpha \leq 1$):

Step 3: Initialize the inner loop step count $u \leftarrow 0$ and success count $v \leftarrow 0$

Step 4: While ($\theta > \theta_{min}$)

- **a)** Create a new solution S' from the neighborhood space.
- **b)** For the chosen solution, determine the optimal replacement policy (i.e. m^* and corresponding renewal cycle) and the corresponding cost $C(S')$ and reliability $R_{sys}(S')$:
- **c)** Set $\Delta S \leftarrow R_{sys}(S') - R_{sys}(S_0)$:
- **d)** If S' is feasible and $\Delta S < 0$, accept the new solution (i.e. $S \leftarrow S'$) and set $v \leftarrow v + 1$,

e) If S' is feasible and $\Delta S \geq 0$, with the probability $\exp\left(-\frac{\Delta S}{\theta}\right)$ and set $v \leftarrow v + 1$, (when accepted).

f) If $v = v_{max}$ then go to step **h)**.

g) Repeat for current temperature. Set $u \leftarrow u + 1$: If $u <$ maximum number of steps, go to step **a)**

h) Decrease the annealing temperature ($\theta \leftarrow \alpha\theta$) and set $u \leftarrow 0$ and $v \leftarrow 0$.

Step 5: End While.

Each iteration of the algorithm is presented as follow (Figure 4.3)

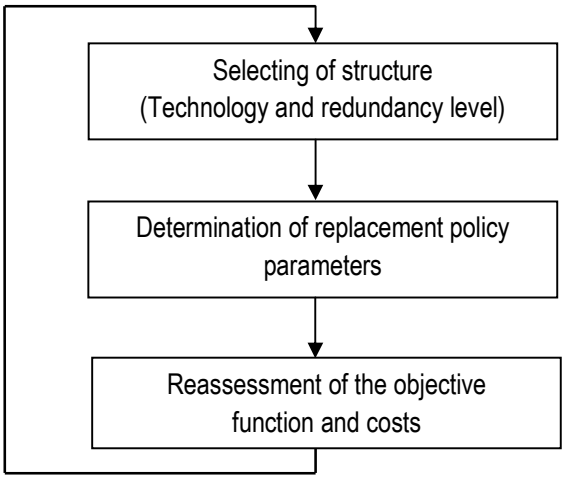


Figure 4. 3: An overview of the algorithm iteration

4.4 Illustrative example

A numerical example is used to illustrate the optimal design in the case where the replacement policy is carried out. We can also compare this case with no replacement case. For simulated annealing, it is necessary to choose a number of parameters to have good performance. Then we take: α = 0,99; θ_{min} = 0,0001 and $u_{\max}$ = 300.

For the example, the system is designed with N = 5 stages. For each stage, there are a_j = 5 available technologies. We choose k_{max} = 8 as maximum number of components in parallel. Table 4.1 shows component parameters used in the example (i.e. failure rates, costs).

Without loss of generality, we assume that the replacement cost is equal to acquisition cost. We assume that the fixed cost c_{0j} and loss production cost $c_{2,ij}$ are constant for each stage. We assume also that for each stage the first technology (*no* 1) is the most reliable and the most expensive.

Table 4. 1: Component parameters

Stage	λ	c_0	c_1	c_2
	0,0078	6	3,8	0,15
	0,0082	6	2,8	0,15
1	0,0083	6	2,0	0,15
	0,0084	6	1,4	0,15
	0,0114	6	0,8	0,15
	0,0061	4	3,0	0,21
	0,0100	4	2,7	0,21
2	0,0102	4	2,0	0,21
	0,0127	4	1,4	0,21
	0,0144	4	1,2	0,21
	0,0078	5	3,4	0,12
	0,0098	5	2,5	0,12
3	0,0107	5	1,6	0,12
	0,0120	5	1,3	0,12
	0,0136	5	1,2	0,12
	0,0062	2	3,2	0,15
	0,0094	2	2,9	0,15
4	0,0121	2	2,0	0,15
	0,0135	2	1,8	0,15
	0,0135	2	0,8	0,15
	0,0077	4	3,1	0,18
	0,0087	4	2,0	0,18
5	0,0099	4	1,3	0,18
	0,0105	4	0,8	0,18
	0,0124	4	0,6	0,18

The Simulated Annealing algorithm is implemented in Matlab environment. Table 3.2 shows the solution of problem as formulated in Model I and Model II for a fixed horizon H = 100.

Table 4. 2: Optimal Design in the both cases Model I and Model II

	Model I				Model II		
B	R^*_{sys}	n	m	Technology	R^*_{sys}	n	Technology
100	0,3557	2 2 3 2 3	1 1 2 1 2	4 1 3 1 4	0,1241	2 1 2 2 2	3 1 1 1 3
120	0,5117	4 2 3 2 4	2 1 2 1 2	4 1 3 1 4	0,1513	2 1 2 2 2	1 1 1 1 1
150	0,7085	4 2 5 5 4	2 1 3 2 2	4 1 4 5 3	0,2207	2 2 2 2 2	1 1 1 1 1
200	0,9118	4 5 7 5 5	2 2 4 2 2	4 1 4 5 4	0,3044	3 2 3 2 2	3 1 1 1 1
250	0,9771	7 5 7 8 6	3 2 4 3 2	4 1 3 5 4	0,3716	3 2 3 2 3	1 1 1 1 1
300	0,9893	7 7 8 8 6	3 3 5 3 2	4 1 1 5 4	0,4273	3 2 4 2 3	3 1 1 1 2
400	0,9893	7 8 8 8 8	3 3 5 3 3	4 1 1 5 3	0,5645	4 3 4 3 3	3 1 1 1 1
600	0,9893	7 8 8 8 8	3 3 5 3 3	4 1 1 5 3	0,7225	5 3 5 4 5	3 1 1 1 2
800	0,9893	7 8 8 8 8	3 3 5 3 3	4 1 1 5 3	0,8307	5 4 6 5 5	1 1 1 1 1

Graphically, this is presented as follows (Figure 4.4)

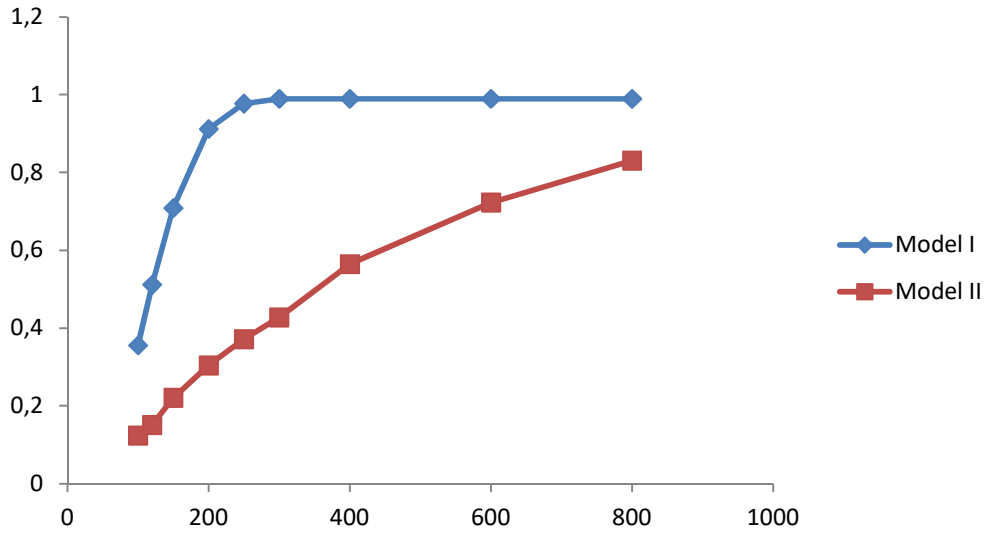


Figure 4. 4: Reliability of the system vs budget in both models.

We remark that:

- For all values of the budget, the reliability of the system is better in the case of replacement policy. Then, for the same budget, we will have more reliable system if we choose to apply replacement policy.
- In the case where there is no replacement policy, the obtained configuration uses more reliable technology (i.e technology = (1 1 1 1 1)) and low redundancy level (less number of component in parallel).
- Contrary to this case the configuration with replacement policy contains less reliable technology but more used space.

This remark open the way to other extensions for the proposed model, namely the addition of the space constraint in the RAP formulation.

If we increase the value of the horizon *H* we remark that the reliability of the system drops off quickly in the case where no replacement policy is performed (see Figure 4.5 for a fixed value of B = 500).

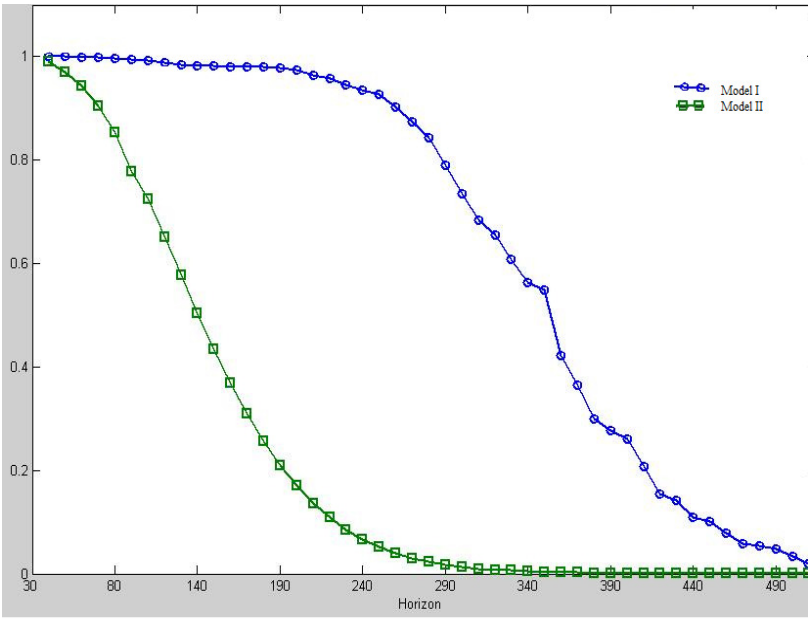


Figure 4.5: Reliability of the system vs the horizon *H*

This finding emphasizes the importance of the replacement policies either in design phase of systems or operating phase.

4.5 Conclusion

In this paper, we have developed a new redundancy allocation of series-parallel system model by integrating m-failure policy in the design of the system. Our main contribution is to take into account of the degradation of the components with respect to their age. This implies that their reliabilities decrease over time. The establishment of the replacement policy makes possible to improve considerably the reliability of the system using more economic structures. But more space is used to compensate the weak cost of the design. Among the possible extensions, we can add space constraint to the model and consider more large problems.

References

[1] Agarwal, M., & Sharma, V. K. Ant colony approach to constrained redundancy optimization in binary systems. Applied Mathematical Modelling, 34(4), 2010

[2] Assaf, D, Shanthikumar, J.G. Optimal Group Maintenance Policies with Continuous and Periodic Inspections. Management Science, Vol. 33, No. 11, 1987

[3] Barlow, R.E, Hunter, L.C. Optimum preventive maintenance policies. Operations Research, 8, 1960.

[4] Bellman, R.E, Dreyfus, E. Dynamic programming and reliability of multicomponent devices. Oper Res,6, 1958.

[5] Brown, M, Proschan, F. Imperfect repair. Journal of Applied Probability, 20, 1983.

[6] Bulfin, R.L, Liu, C.Y. Optimal allocation of redundant components for large systems. IEEE Trans Reliab, 34, 1985.

[7] Caserta, M, Voss, S. An exact algorithm for the reliability redundancy allocation problem. European Journal of Operational Research, Volume 244, Issue 1, 1 July 2015.

[8] Chang, C.C, Sheu, S.H, Chen, Y. L. Optimal number of minimal repairs before replacement based on a cumulative repair-cost limit policy. Computers and Industrial Engineering, 59, 2010.

[9] Chang, C.C, Sheu, S.H, Chen, Y. L. Optimal replacement model with age-dependent failure type based on a cumulative repair-cost limit. Applied Mathematical Modelling, 37, 2013.

[10] Chern, M.S. On the computational complexity of reliability redundancy allocation in a series system. Oper Res Lett, 11, 1992.

[11] Coelho, L. S. An efficient particle swarm approach for mixed-integer programming in reliability-redundancy optimization applications. Reliability Engineering & System Safety, 94(4), 2009.

[12] Coit, D.W, Smith, A.E. Reliability optimization of series-parallel systems using a genetic algorithm. IEEE Trans Reliab, 45(2),1996.

[13] Dekker, R. Wildeman, R.E.,Van Der Duyn Schouten, F.A. A review of multi-component maintenance models with economic dependence. Mathematical Methods of Operational Research, 45 (3), 1997.

[14] Dorigo, M. Optimization, learning and natural algorithms. PhD thesis, Politecnico di Milano, Italy, 1992.

[15] Fyffe, D.E, Hines, W.W, Lee, N.K. System reliability allocation and a computational algorithm. IEEE Trans Reliab, R-17(2), 1968.

[16] Gen. M, Ida, K, Tsujimura, Y, Kim, C.E. Large scale 0-1 fuzzy goal programming and its application to reliability optimization problem. Comput Indust Eng, 24, 1993.

[17] Ghare M, Taylor R.E. Optimal redundancy for reliability in series system. OperRes, 17, 1969.

[18] Ghorabaee, M.K, Amiri, M, Azimi, P. Genetic algorithm for solving bi-objective redundancy allocation problem with k-out-of-n subsystems, Applied Mathematical Modelling, Volume 39, Issue 20, 15 October 2015.

[19] Glover, F. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. Comput Oper Res, 13,1986.

[20] Guilani, P. P, Azimi, P, Niaki, S.T.A , Niaki, S.A.A, Redundancy allocation problem of a system with increasing failure rates of components based on Weibull distribution: A

simulation-based optimization approach, Reliability Engineering & System Safety, Volume 152, August 2016.
[21] Huang, C.L. A particle-based simplified swarm optimization algorithm for reliability redundancy allocation problems. Reliability Engineering & System Safety, Volume 142, October 2015.
[22] Huang, Y.S, Lin, Y.J, Ho, J.W. A study on negative binomial inspection for imperfect production systems. Computers and Industrial Engineering, 65 (4), 2013.
[23] Kirckpatrick, S, Gerlatt Jr, C.D and Vecchi, M.P. Optimization by simulated annealing, Science 220, 1983
[24] Kong, X, Gao, L, Ouyang, H, Li, S. Solving the redundancy allocation problem with multiple choices using a new simplified particle swarm optimization, Reliability Engineering & System Safety, Volume 144, December 2015.
[25] Koulmas, C, Antony, S.R., John, R. A survey of simulated annealing Applications to Operations Research Problems. Omega International Journal of Management Science, 22, 1994.
[26] Kulturel-Konak, S, Smith, A.E, Coit, D.W. Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search. IIE Trans 35, 2003.
[27] Kuo, W and Prasad, V.R. An annotated overview of system-reliability optimization. IEEE Trans Reliab, 49(2), 2000.
[28] Kuo, W, & Wan, R. Recent advances in optimal reliability allocation. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans, 37(2), 2007.
[29] Levitin, G, Lisnianski, A, Ben-Haim, H, Elmakis, D. Redundancy optimization for series-parallel multi-state systems. IEEE Trans Reliab 47(2),1998.
[30] Liang, Y.C, Smith, A.E. An ant colony optimization algorithm for the redundancy allocation problem (RAP). IEEE Trans Reliab, 53(3),2004.
[31] Liu, Y, Huang, H.Z, Wang, Z. A joint redundancy and imperfect maintenance strategy optimization for multi-state systems.IEEE Transactions on Reliability, 62 (2), 2013.
[32] Misra, K.B, Sharma, U. An efficient algorithm to solve integer programming problems arising in system-reliability design. IEEE Trans Reliab, 40(1),1991.
[33] Nahas, N, Nourelfath, M, Ait-Kadi, D. Selecting machines and buffers in unreliable series-parallel production lines. International Journal of Production Research, Volume 47, Issue 14, 2009.
[34] Nahas, N., Thien-My, D. Harmony search algorithm: application to the redundancy optimization problem. Engineering Optimization, 42(9), 2010.
[35] Nakagawa, T. Optimal Number of Units for a Parallel System. Journal of Applied Probability. Vol. 21, No. 2 ,1984.
[36] Nakagawa, Y, Miyazaki, S. Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problems with two constraints. IEEE Trans Reliab, R-30(2),1981.
[37] Nakagawa, T., Zhao, X. Optimization problems of a parallel system with a random number of units. IEEE Transactions on Reliability, 61 (2), 2012.
[38] Painton, L and Campbell, J. Genetic algorithms in optimization of system reliability. IEEE Trans Reliab, 44(2),1995.
[39] Pham, H, Wang, H. Imperfect maintenance. European Journal of Operational Research, 94, 1996.
[40] Pincus, M. A Monte-Carlo Method for the Approximate Solution of Certain Types of Constrained Optimization Problems, Operations Research, 18, 1970.

[41] Ritchken, P and Wilson G.J. (m, T) Group Maintenance Policies. Management Science Vol. 36, No. 5, 1990.
[42] Sculli, D and Wu, S.Y. Block replacement for units whose components have Weibull life distributions. Computers and Operations Research, 8, 1981.
[43] Soltani R. Reliability optimization of binary state non-repairable systems: A state of the art survey. International Journal of Industrial Engineering Computations, 5, p 339–364, 2014.
[44] Tillman, F.A, Hwang, C.L, Kuo, W. Optimization techniques for system reliability with redundancy, a review. IEEE Trans Reliab, R-26(3), 1977.
[45] Yalaoui,A, Chatelet, E, Chu, C. A new dynamic programming method for reliability and redundancy allocation in a parallel- series system. IEEE Trans Reliab, 54(2),2005.
[46] Yokota, T, Gen, M, Ida, K. System reliability of optimization problems with several failure modes by genetic algorithm. JPN J Fuzzy Theory Syst, 7(1), 1995.
[47] Yokota, T, Gen, M, Li, Y.X. Genetic algorithm for nonlinear mixed integer programming and its applications. Comput Ind Eng, 30(4), 1996.
[48] You, P. S., Chen, T. C. An efficient heuristic for series–parallel redundant reliability problems. Computers & Operations Research, 32(8), 2005.
[49] Zia, L., Coit, D. Redundancy allocation for series-parallel systems using a column generation approach. 2010 IEEE Transactions on Reliability. 59, 2010.
[50] Zou, D., Gao, L., Wu, J., Li, S., & Li, Y. A novel global harmony search algorithm for reliability problems. Computers & Industrial Engineering, 58(2), 2010.

Chapitre 5 : Conclusion générale

Cette thèse traite la problématique des politiques de remplacement préventif des systèmes multi-composants qui se dégradent d'une manière aléatoire. A chaque composant, on associe une distribution de durée de vie, des coûts ou des durées pour effectuer les remplacements correctifs et préventifs. L'objectif étant de déterminer la périodicité du remplacement préventif qui optimise un ou plusieurs critères (coût, disponibilité, niveau de service,….etc).

Cette une problématique qui a été étudiée d'une manière abondante dans la littérature sous différentes classifications et points de vue. Nous avons choisi la dépendance entre les composants des systèmes étudiés comme base de développement de nos différentes contributions. Parmi les trois contributions élaborées, deux sont liées au cas de la dépendance stochastique entre les composants du système. La troisième contribution traite le cas de la dépendance économique intégrée au problème de conception d'un système série-parallèle.

La première contribution de cette thèse a été consacrée au développement d'une politique de remplacement préventif de type Age pour un système à deux composants en dépendance stochastique. Cette dépendance a été modélisée par l'effet domino qui traduit la façon avec laquelle la panne d'un composant peut se propager vers l'autre composant du système. Cette contribution a mis en évidence deux principaux apports:

1. L'effet domino comme outil de modélisation de la dépendance stochastique : nous avons pu recalculer la probabilité de défaillance de tout le système dans le cas d'effet domino unilatéral. Ce calcul est basé sur la décomposition de la propagation de la panne en un ensemble d'évènements mutuellement indépendants. Ce calcul offre l'avantage de pouvoir être généralisé au cas d'un effet domino multilatéral et pour des systèmes avec plus que deux composants.
2. La dépendance stochastique a permis de considérer le cas où le coût du remplacement préventif n'était pas nécessairement constant mais il dépend aussi de l'état et de l'âge du système. En effet, nous avons pu recalculer le coût associé au remplacement préventif du système $C_p(T)$en fonction de la variable T. Ce coût a été intégré dans le calcul du coût espéré par unité de temps d'une politique de remplacement de type Age. La comparaison effectuée entre le cas ou C_p est fixe et le cas ou C_p est variable a montré que la politique optimale de remplacement en

considérant un coût associé au remplacement préventif variable $C_p = C_p(T)$ était plus économique que le cas d'une structure de coût fixe.

Dans la deuxième contribution, nous avons présenté un cadre pour la résolution d'un problème d'optimisation pour une prise de décision dans un contexte multicritère. Le système étudié est composé de deux composants parallèles en dépendance stochastique. Une politique de remplacement préventif de type âge est effectuée sur le système et est évaluée selon deux critères :

1. Le coût espéré du remplacement par unité de temps sur un horizon infini,
2. La disponibilité du système. Cette problématique de décision dans un contexte multicritère trouve plusieurs applications dans le monde réel et beaucoup de décideurs en maintenance en font face d'une manière régulière.

Nous avons opté pour la fonction d'utilité multi-attributs qui fait partie de la famille des méthodes critère unique de synthèse. Elle permet à la fois d'agréger les deux critères considérés et de tenir compte des préférences du décideur.

Dans la troisième contribution, nous nous sommes intéressés à la problématique de l'affectation de la redondance pour un système série-parallèle. La littérature est abondante à ce sujet et bien spécifiquement dans la partie algorithmique et résolution de ce problème difficile. L'objectif de type de problème est de concevoir le système le plus performant possible (en termes de fiabilité ou de disponibilité par exemple) en tenant compte des contraintes de budget, d'espace et de volume. Nous avons opté par l'intégration d'une politique de remplacement préventif basée sur le comptage des pannes. Cette politique est justifiée par l'existence d'une dépendance économique entre les composants de chaque sous-système parallèle. Le modèle que nous avons développé a permis ainsi de :

1. Tenir compte de la dégradation de chaque composant du système,
2. Caractériser le seuil de pannes de chaque sous-système,
3. Reformuler le modèle mathématique de l'affectation de la redondance avec les ajustements nécessaires : le re-calcul de la nouvelle fonction objectif et l'ajout des coûts des remplacements dans la contrainte du budget.

Nous avons résolu le problème formulé avec l'algorithme du circuit simulé et nous l'avons comparé au cas où aucune politique de remplacement n'est effectuée sur le système. Les résultats obtenus ont montré que la mise en place d'une politique de remplacement préventif peut aussi assurer un niveau de performances remarquable avec des structures plus économiques.

Assurément, cette thèse donne lieu à plusieurs pistes d'amélioration et de recherches futures qu'on peut les présenter comme suit :

Pour la première contribution

- Généraliser au cas de système de plus grande taille et une autre structure (par ex: série).
- Considérer d'autres politiques de remplacement (par ex: bloc).
- Considérer la dépendance stochastique comme une opportunité pour améliorer la performance du système.

Pour la deuxième contribution

- Explorer d'autres formes plus précises des fonctions utilité qui traduisent mieux les préférences du décideur.
- Tester d'autres procédures d'agrégation multicritère du type surclassement de synthèse.
- Utiliser les techniques d'apprentissage automatique pour déterminer les paramètres de la fonction utilité à partir des politiques déjà établies dans le passé.

Pour la troisième contribution

- Considérer l'aspect dynamique du problème et utiliser d'autres outils de modélisation et de résolution (Par ex: chaines de Markov, programmation dynamique).
- Considérer des contraintes supplémentaires (Par ex: espace, volume).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Assaf, D. Shanthikumar, J.G. Optimal group maintenance policies with continuous and periodic inspection. Management Science, Volume 33, No 11, 1987.

[2] Barlow, R.E and Hunter, L.C. Optimum preventive maintenance policies. Operations Research, 8, 1960.

[3] Barlow, R.E and Proschan, F. Mathematical Theory of Reliability. Wiley, New York. 1965.

[4] Barlow, R.E and Proschan, F. Comparison of Replacement Policies, and Renewal Theory Implications. Boeing Scientific Research Laboratories, 1963.

[5] Barros, A. Berenguer, C and Grall, A. A maintenance policy for two-unit parallel systems based on imperfect monitoring information. Reliability Engineering and System Safety, 91, 2006.

[6] Beichelt, F. A replacement policy based on limits for the repair cost rate. IEEE Transactions on Reliability, R 31 (4), 1982.

[7] Berg, M. Optimal replacement policies for two-unit machines with increasing running costs. Stochastic Processes and Applications, 5, 1976.

[8] Berg, M and Epstein, B. A modified block replacement policy. Naval Research Logistics, 23, 1976.

[9] Bergman, B. Optimal replacement under a general failure model. Advances in Applied Probability 10, 1978.

[10] Canfield, R.V. Cost optimization of periodic preventive maintenance. IEEE Transactions on Reliability, R 35, 1986.

[11] Cho, D.I and Parlar, M. A survey of maintenance models for multi-units systems. European Journal of Operational Research, 51, 1991.

[12] Dekker, R, Wildeman, R.E, Van Der Duyn Schouten, F.A. A review of multi-component maintenance models with economic dependence. Mathematical Methods of Operational Research, 45 (3), 1997.

[13] Dekker, R and Roelvink, I.F.K. Marginal cost criteria for group replacement. European Journal of Operational Research, 84, 1995.

[14] Dohi, T, Ashioka, A, Kaio, N, Osaki, S. The optimal repair-time limit replacement policy with imperfect repair: Lorenz transform approach. Mathematical and Computer Modelling, Volume 38, Issues 11–13, 2003.

[15] Do Van, P. Barros, A. Bérenguer, C. Bouvard, K. Brissaud, F. Dynamic grouping maintenance with time limited opportunities. Reliability Engineering and System Safety, 120, 2013.

[16] Drinkwater, R.W and Hastings, N.A.J. An Economic Replacement Policy. Oper. Res. Quart., Volume 18, 1967.

[17] Gardent, P and Nonant, L. Entretien et renouvellement d'un parc de machines. Revue Française de la Recherche Opérationnelle, 7, 1963.

[18] Gertsbakh I. Reliability theory with applications to preventive maintenance. Springer, Berlin, 2000.

[19] Goyal, S. and Kusy, M. Determining economic maintenance frequency for a family of machines, Journal of the Operational Research Society, 36, 1985.

[20] Jayabalan, V and Chaudhur, D. Optimal maintenance and replacement policy for a deteriorating system with increased mean downtime, Naval Research Logistics 39, 1992.
[21] Jhang, J.P and Sheu, S.H. Optimal age and block replacement policies for a multi-component system with failure interaction. International Journal of Systems Science, Volume 31, issue 5, 2000.
[22] Lie, C.H. and Chun, Y.H. An algorithm for preventive maintenance policy. IEEE Transactions on Reliability, R-35, 1986.
[23] Liu, X.G, Makis, V, Jardine, A.K.S. A replacement model with overhauls and repairs. Naval Research Logistics, 42, 1995.
[24] Lai, M.T, Chen, Y.C. Optimal periodic replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 29, 2006.
[25] Lai, M.T, Yan, H. Optimal number of minimal repairs with cumulative repair cost limit for a two-unit system with failure rate interactions. International Journal of Systems Science, 2014.
[26] Malik, M.A.K. Reliable preventive maintenance scheduling. AIIE Transactions, 11, 1970.
[27] Makabe, H and Morimura, H. A new policy for preventive maintenance. Journal of Operations Research Society of Japan, 5, 1963.
[28] Makis, V, Jardine, A.K.S. Optimal Replacement Policy for a General Model with Imperfect Repair. Journal of the Operational Research Society, 43(2), 1992.
[29] McCall, J.J. Operating Charateristics of opportunistic replacement and inspection policies. Management Science, Volume 10, No 1, 1963.
[30] McCall, J.J. Maintenance policies for stochastically failing equipment: A survey. Management Science, 11 (5), 1965.
[31] Morimura, H. On some preventive maintenance policies for IFR. Journal of Operations Research Society of Japan, 12, 1970.
[32] Murthy, D.N.P, Nguyen, D.G. Study of two-component system with failure interaction. Naval Research Logistics Quarterly, Volume 32, 1985.
[33] Nakagawa, T. Maintenance Theory of Reliability, Springer, 2005.
[34] Nakagawa, T. Optimal policy of continuous and discrete replacement with minimal repair at failure. Naval Research Logistics Quarterly, 31 (4), 1984.
[35] Nakagawa, T. Modified Periodic Replacement with Minimal Repair at Failure. IEEE on Reliability, R30 (2), 1981.
[36] Nakagawa, T. Periodic and sequential preventive maintenance policies. Journal of Applied Probability, 23, 1986.
[37] Nakagawa, T. and Osaki, S. The Optimum Repair Limit Replacement Policies. Operational Research Quarterly, 25(2), 1974.
[38] Nakagawa, T and Murthy, D.N.P. Optimal replacement policies for a two-unit system with failure interaction″. Recherche opérationnelle/Operatoins Research, Vol 27, No 4, 1993.
[39] Nguyen, D.G and Murthy, D.N.P. Optimal repair limit replacement policies with imperfect repair. Journal of Operational Research Society, 32, 1981.
[40] Nguyen, D.G and Murthy, D.N.P. A note on the repair limit replacement policy. Journal of Operational Research Society, 31, 1980.

[41] Nicolai, R.P and Dekker, R. Optimal Maintenance of Multi-Component Systems: a Review. Econometric Institute Report, Erasmus University Rotterdam, 29, 2006.
[42] Okumoto, K and Elsayed, E.A. An optimum group maintenance policy. Naval Research Logistics, Volume 30, Issue 4, 1983.
[43] Özekici, S. Reliability and maintenance of complex systems. Nato ASI Series. Series F: Computer and Systems Sciences, Vol 154, 1996.
[44] Özekici, S. Optimal periodic replacement of multicomponent reliability systems. Operations Research, Vol 36, No 4, 1988.
[45] Park, K. S. Optimal number of minimal repairs before replacement. IEEE Transactions on Reliability, R28, 1979.
[46] Pham, H and Wang, H. Optimal (τ ,*T*) opportunistic maintenance of a k-out-of-n: G system with imperfect PM and partial failure. Naval Research Logistics, Volume 47, Issue 3, 2000.
[47] Pham, H and Wang, H.Z. Optimal age-dependent preventive maintenance policies with imperfect maintenance. Annals of Operations Research, 91, 1999.
[48] Pierskalla, W.P and Voelker, J.A. A survey of maintenance models: the control and surveillance of deteriorating systems. Naval Research Logistics Quarterly, 23, 1976.
[49] Radner, R and Jorgenson, D.W. Opportunistic replacement of single part in the presence of several monitored parts. Management Science, Volume 10, No 1, 1963.
[50] Rakowsky, U.K and Schneeweiss, W.G. Modelling Dependent Component Failures with Domino Effects. In The International Conference On Probabilistic Safety Assessment and Management, Berlin, Germany, 2004.
[51] Ritchken, P. John Wilson, G. (*m,T*) Group maintenance policies. Management Science, Volume 36, No 5, 1990.
[52] Sarkar, A, Panja, S.C and Sarkar, B. Survey of maintenance policies for the Last 50 Year. International Journal of Software Engineering & Applications (IJSEA), Volume 2, No 3, 2011.
[53] Sasieni, M. A Markov chain process in industrial replacement, Operational Research Quarterly, 7, 1956.
[54] Satow, T and Osaki, S. Optimal replacement policies for a two-unit system with shock damage interaction. Computers & Mathematics with Applications, Volume 46, Issue 7, 2003.
[55] Scarf, P.A and Deara, M. Block replacement policies for a two-component system with failure dependence. Naval Research Logistics, 50, 2003.
[56] Sherif, Y.S. Smith, M.L. Optimal maintenance models for systems subject to failure - A review, Naval Research Logistics Quarterly, 28, 1980.
[57] Sheu, S. and Jhang, J. A generalized group maintenance policy, European Journal of Operational Research, 96, 1996.
[58] Sheu, S.H, Kuo, C.M and Nakagawa, T. Extended optimal age replacement policy with minimal repair. RAIRO, Operations Research, Volume 27, Issue 3, 1993.
[59] Sheu, S and Liou, C. Optimal replacement of k-out-of-n system subject to shocks. Microelectronics Reliability, 32, 1992.
[60] Stadje, W and Zuckerman, D. Optimal strategies for some repair replacement models. Advances in Applied Probability, Volume 22, Issue 3, 1990.
[61] Stinson, J.P and Khumawala, B.M, Replacement of machines in a serially dependent multi-machine production system. International Journal of Production Research, 25(5), 1987.

[62] Sung, C.K, Sheu, S.H, Hsu, T.S, Chen, Y.C. Extended optimal replacement policy for a two-unit system with failure rate interaction and external shocks. International Journal of Systems Science, Volume 44, Issue 5, 2013.
[63] Tahara, A and Nishida, T. Optimal replacement policy for minimal repair model. Journal of the Operations Research Society of Japan, 18, 1975.
[64] Tango, T. Extended Block Replacement Policy with Used Items. Journal of Applied Probability, Volume 15, No 3, 1978.
[65] Tatsuno, K, Ohi, F and Nishida, T. Opportunistic maintenance policy with minimal repair. Mathematica Japonica, 28, 1983.
[66] Thomas, L.C. A survey of Maintenance and replacement Models for Maintainability and Reliability of Multi-Item Systems. Reliability Engineering, 16, 1986.
[67] Valdez-Flores, C and Feldman, R.M. A survey of preventive maintenance models for stochastically deteriorating single-unit systems. Naval Research Logistics, 36, 1989.
[68] Wang, G.J, Zhang, L.N. A geometric process repair model for a two-component system with shock damage interaction. International Journal of Systems Science, Volume 40, Issue 11, 2009.
[69] Wang, H. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. European Journal of Operational Research, 139, 2002.
[70] Wildeman, R.E. The art of grouping maintenance. Ph.D thesis, Erasmus University, Rotterdam, 1996.
[71] Wildeman, R.E and Dekker, R. Dynamic influences in multicomponent maintenance. Quality and Reliability Engineering International, 13, 1997.
[72] Worm, J.M and Van Harten, A. Model based decision support for planning of road maintenance. Reliability Engineering & System Safety, Volume 51, Issue 3, 1996.
[73] Yun, W.Y, Bai, D.S. Repair cost limit replacement policy under imperfect inspection. Reliability Engineering & System Safety, Volume 23, Issue 1, 1988.
[74] Zheng, X and Fard, N. A maintenance policy for repairable systems based on opportunistic failure-rate tolerance. IEEE Transactions on Reliability, Volume 40, Issue 2, 1991.
[75] Zhou, X, Xi, L and Lee, J. Opportunistic preventive maintenance scheduling for a multi-unit series system based on dynamic programming, International Journal of Production Economics, 118(2), 2009.