



Existence de connexions homoclines pour l'équation du pont suspendu: une preuve assistée par ordinateur

Mémoire

Maxime Murray

Maîtrise en mathématiques
Maître ès sciences (M.Sc.)

Québec, Canada

© Maxime Murray, 2016

Résumé

Dans ce mémoire, une méthode assistée numériquement est introduite et utilisée afin de montrer l'existence d'une connexion homocline à zéro pour l'équation du pont suspendu. Cette méthode, basée sur l'utilisation du théorème de contraction de Banach, permet d'obtenir les points fixes de l'opérateur de Newton légèrement modifié. La méthode ainsi que son cadre théorique sont introduits au premier chapitre. L'espace de Banach sur lequel sera défini l'opérateur ainsi que la manière de construire l'approximation de l'inverse utilisée pour l'opérateur sont les éléments majeurs du cadre théorique.

Par la suite, la méthode est utilisée dans le Chapitre 2 pour prouver rigoureusement la validité de l'approximation numérique utilisée pour la variété stable locale. Puis cette approximation est réutilisée pour prouver l'existence de la connexion homocline. Cette preuve est à nouveau effectuée en utilisant la méthode introduite au premier chapitre. Finalement, certains résultats des calculs numériques sont présentés pour conclure ce mémoire.

Abstract

In this work, a numerically assisted technique is introduced in order to prove the existence of a homoclinic connexion to zero for the suspension bridge equation. This technique, based on the use of the Banach fixed point theorem, can provide the fixed point of a slightly modified version of the Newton operator. The technique and its theoretical background are introduced in the first chapter. The Banach space on which the operator is defined and the way to construct the approximation of the inverse needed to define the operator are the major parts of the theoretical background.

The method is then used to rigorously validate the numerical approximation used to parametrize the local stable manifold. This parametrization is used to find the homoclinic connexion we are looking for. This proof is also completed using the technique from the first chapter. Finally, some results and numerical approximations will be presented in the last chapter

Table des matières

Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	vii
Liste des tableaux	ix
Liste des figures	xi
Remerciements	xv
Introduction	1
1 Résultats préliminaires et définitions	3
1.1 Résultats classiques sur les systèmes dynamiques	3
1.2 Développements en séries et espace des coefficients	7
1.3 Décroissance exponentielle des coefficients de Tchebychev via les coefficients de Fourier	12
1.4 Opérateur de Newton et polynômes de rayon	20
2 La variété stable	27
2.1 Réécriture du problème sous la forme d'un opérateur de point fixe	29
2.2 Développement des bornes pour l'obtention des polynômes de rayon	34
2.3 Utilisation du principe de contraction uniforme et dérivées partielles	42
3 La connexion homocline	45
3.1 Réécriture du problème	45
3.2 L'opérateur de Newton pour la connexion homocline	53
4 Application de la méthode et résultats	75
4.1 Obtention des approximations	75
4.2 Décroissance des coefficients et choix des bornes pour Tchebychev	77
4.3 Profil de solution via la paramétrisation de la variété stable locale	82
Conclusion	87
A Bornes $Z_{l,i}$	89

B Programmes MATLAB	91
Bibliographie	93

Liste des tableaux

3.1	Coefficients $S_{i,k}^{(j)}$ de la séparation de l'opérateur F comme polynôme en s	58
3.2	Coefficients $\tilde{z}_{2,k}^{(i)}$ et $\tilde{z}_{3,k}^{(i)}$ pour $k \neq 0$	66
4.1	11 Coefficients de chaque série de Tchebychev de l'approximation de la solution pour $\beta = 1$	79

Liste des figures

1.1	Contour Γ	16
1.2	Polynômes de rayon pour différentes valeurs à l'origine	26
4.1	Interpolation avec un polynôme de degré 5 des facteurs γ utilisés pour l'approximation en β	76
4.2	Valeur de $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_0$ en fonction de β	78
4.3	Logarithme de la valeur absolue des 50 premiers termes de chaque série de coefficients en fonction de leur indice et droite des moindres carrés pour $\beta = 1$	80
4.4	Affichage des trois premières dimensions de l'orbite obtenue pour $\beta = 1$ avec la variété stable locale	81
4.5	Affichage de $\bar{v}^{(1)}$ la solution pour $\beta = 1$	82
4.6	Variété stable locale pour $\beta = 1$ et partie sur laquelle elle est évaluée pour $\rho = 0.9$	83

"Chop Chop!" - José Manuel
Urquiza

Vincent Grenier-Gauthier

Remerciements

Merci à Jean-Philippe pour ses conseils et sa supervision.

Merci à Maxime pour la partie sur la variété stable.

Merci à Andréa pour son article qui a été essentiel à ma compréhension.

Merci à Vincent, Frédéric, Benoit, Thomas et Marie pour les bières du vendredi au café fou AELIES essentielles au succès!

Merci à Olivier, Alexandre, Simon, Vincent et William pour les soirées du hockey des Canadiens qui changent les idées!

Merci à mes parents pour le support et la motivation.

Merci à tous les autres impliqués de proche ou de loin.

Introduction

Depuis très longtemps la science cherche à comprendre l'environnement dans lequel l'homme habite et comment il évolue. De tels questionnements menèrent à de nombreux problèmes tels que la mécanique des fluides, l'équilibre de systèmes à plusieurs corps ou même l'évolution de populations. Par exemple, dans ses travaux, Lagrange se questionna sur l'influence des corps autres que le Soleil sur une planète comme une succession de chocs infinitésimaux. Au fil des années le domaine s'est agrandi et l'arrivée de l'ordinateur rendit possible l'étude d'une quantité importante de problèmes qui n'étaient pas résolubles jusqu'à ce jour, plus particulièrement dans le domaine des équations différentielles. Le problème qui sera étudié dans ce mémoire relève de ce domaine. L'équation à l'étude se nomme l'équation du pont suspendu et est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante

$$v_{tt} + v_{xxxx} + e^v - 1 = 0. \quad (1)$$

La recherche de solutions de (1) admettant une onde progressive de vitesse c , c'est-à-dire des solutions de la forme $v(x, t) = u(x - ct)$, nous mène à étudier l'équation différentielle ordinaire

$$u'''' + \beta u'' + e^u - 1 = 0 \quad (2)$$

où $\beta = c^2$. Ce problème a été amené pour la première fois dans Chen et McKenna (1997a). Une première preuve assistée par ordinateur, énoncée dans Breuer *et al.* (2006), affirme que (2) admet au moins 36 connexions homoclines pour $\beta = 1.69$. Les auteurs soulevèrent alors le problème suivant.

Conjecture. *L'équation (2) admet au moins une connexion homocline non triviale pour chaque valeur du paramètre $\beta \in [0, 2]$.*

Ce problème fut abordé à plusieurs reprises. En effet, une première démonstration partielle a été énoncée dans Smets et van den Berg (2002), cependant le résultat ne fut prouvé que pour presque toutes les valeurs du paramètre $\beta \in [0, 2]$. De plus, dans Santra et Wei (2009), le résultat a été démontré pour toutes les valeurs du paramètre $\beta \in (0, (\beta^*)^2) \approx (0, 0.5516)$, où $\beta^* \approx 0.7427$. Une étude approfondie du problème du pont suspendu est aussi disponible dans

McKenna et Walter (1990); Chen et McKenna (1997b). Dans ce mémoire, une preuve assistée par ordinateur sera introduite afin d'étudier l'équation (2).

Plusieurs solutions différentes existent, comme on ne cherche pas à toutes les trouver on se restreindra à un type en particulier. En effet, puisqu'on s'intéressera aux solutions dont l'image se stabilise vers la solution d'équilibre $u = 0$ aux deux extrémités, une condition de symétrie en temps permettrait de vérifier les deux critères simultanément. C'est ce qui sera imposé. Cette condition ainsi que les conditions initiales s'écrivent formellement comme suit

$$u(-t) = u(t), \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u(t) = 0.$$

Évidemment, le problème vise à trouver une solution qui ne sera pas identiquement nulle. Un tel objet est appelé une connexion homocline symétrique et sera formellement introduit au Chapitre 1 de ce mémoire. Ce chapitre contiendra aussi la théorie appliquée dans les chapitres suivants afin de démontrer ce résultat.

Théorème. *Pour toutes les valeurs du paramètre $\beta \in [0.5, 1.9]$, (2) admet une connexion homocline symétrique.*

Une bifurcation se produit en $\beta = 2$ et ne sera pas traitée dans ce mémoire. C'est pourquoi nous nous concentrerons sur l'intervalle $[0.5, 1.9]$ plutôt que $[0.5, 2]$. Afin de résoudre ce problème, une méthode basée sur l'approximation des solutions à l'aide de séries dont les coefficients sont dans un espace de Banach judicieusement choisi sera introduite. Ensuite, une méthode basée sur le théorème du point fixe de Banach sera utilisée afin de montrer qu'une solution sous forme de série existe dans un voisinage d'une série tronquée obtenue numériquement. La méthode sera introduite dans le premier chapitre et appliquée dans les suivants. Il est possible de trouver d'autres applications de telles méthodes pour résoudre des problèmes similaires dans Wilczak et Zgliczyński (2003); Wilczak (2005, 2006); Szczelina et Zgliczyński (2013); Wójcik et Zgliczyński (2000) ainsi que van den Berg *et al.* (2015). La méthode introduite contient deux étapes principales ;

- La recherche d'une paramétrisation locale de la variété stable pour toute valeur β ;
- L'utilisation de la paramétrisation afin d'obtenir un problème aux conditions limites défini sur un intervalle fini dont la résolution sera équivalente à l'obtention d'une connexion homocline symétrique.

Ces deux étapes seront introduites en détail et appliquées au problème du pont suspendu dans les Chapitres 2 et 3 respectivement.

Chapitre 1

Résultats préliminaires et définitions

Afin de déterminer dans quel cadre les résultats généraux doivent être obtenus, tentons de simplifier l'équation du pont suspendu au maximum. Tout d'abord, remarquons que l'équation peut être ramenée à un système à l'aide du changement de variable $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (u, u', u'', u''')$. En remplaçant dans (2), on obtient

$$\begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ u'_3 = u_4 \\ u'_4 = -\beta u_3 - e^{u_1} + 1. \end{cases} \quad (1.1)$$

Le terme e^{u_1} est difficile à analyser puisqu'il n'est pas polynomial. Il est cependant possible de l'éliminer. Pour ce faire, on effectue un autre changement de variable qui permettra d'obtenir un système sans l'exponentielle. On pose $v_1 = e^{u_1} - 1$ et $v_i = u_i$ pour $i = 2, 3, 4$, ce qui ramène le problème à la résolution du champ vectoriel

$$\begin{cases} v'_1 = v_2 + v_1 v_2 \\ v'_2 = v_3 \\ v'_3 = v_4 \\ v'_4 = -\beta v_3 - v_1. \end{cases} \quad (1.2)$$

On obtient donc un problème de la forme $\dot{v} = \Psi(v)$, pour $\Psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Pour la suite de ce chapitre, la théorie sera amenée dans le cadre général et le système (1.2) sera utilisé en exemple.

1.1 Résultats classiques sur les systèmes dynamiques

L'étude de l'équation du pont suspendu dans le cas que l'on traitera relève du domaine des systèmes dynamiques. Plusieurs résultats de ce domaine nécessaires à l'application de la méthode décrite dans l'introduction seront introduits de manière générale et traités dans le cas

particulier du pont suspendu dans les chapitres suivants. Dans tous les cas, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{v} = \Psi(v) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction Lipschitzienne et $t_0 \in \mathbb{R}$. La solution recherchée est appelée flot et dénotée par $\varphi(v_0, t)$ dans le cas général, ou $v_0(t)$ dans le cas d'une trajectoire en particulier. Un certain travail doit être réalisé afin de déterminer si le flot est bien défini. Cependant, cette question ne sera pas traitée dans ce mémoire. La démarche à suivre pour obtenir l'existence et l'unicité peut être retrouvée dans Ilyashenko et Yakovenko (2007).

Le problème tel que défini nous amène à chercher une solution pour tout temps t . Toutefois, en utilisant le comportement du type de solution qui est recherché, il est possible de réduire le problème à un intervalle de temps fini. En effet, le problème sera séparé en deux parties pour lesquelles une technique de résolution distincte sera appliquée.

La première partie, pour les temps finis, permet d'utiliser les polynômes de Tchebychev pour approximer la solution recherchée. Cette partie sera obtenue par la résolution d'un problème aux limites dont l'obtention est expliquée en détails au Chapitre 3. L'utilisation des polynômes de Tchebychev sera justifiée dans ce chapitre. On y trouve aussi des rappels sur les notions qui seront utilisées.

La seconde partie, qui représente les deux extrémités infinies, sera traitée via le calcul d'un autre objet. On cherche à ce que la solution obtenue débute et finisse au point d'équilibre. Ainsi, en étudiant le comportement du flot près de cet équilibre, on pourra déduire le comportement de l'orbite recherché. Pour ce faire, il faut paramétrer un sous-ensemble de ce qui suit.

Définition 1.1.1. *Soit \hat{v} une solution d'équilibre de (1.3), c'est-à-dire que $\Psi(\hat{v}) = 0$. On appelle ensemble stable de \hat{v} les points $v_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(v_0, t) = \hat{v}.$$

On dénote l'ensemble stable par $W^s(\hat{v})$. Similairement, on appelle l'ensemble instable de \hat{v} les points $v_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(v_0, t) = \hat{v}.$$

Cet ensemble est dénoté par $W^u(\hat{v})$.

La solution recherchée fait parti de ces ensembles. Ainsi, il suffit de savoir que pour un certain point de départ v_0 et temps T , on ait $\varphi(v_0, T) \in W^s(\hat{v})$. Comme on a imposé une condition de symétrie, cela nous permet d'éviter de considérer la deuxième condition, qui serait que ce même point de départ respecte aussi $\varphi(v_0, \tilde{T}) \in W^u(\hat{v})$, pour un autre temps $\tilde{T} \leq T$.

Il faut donc déterminer explicitement une partie de l'ensemble stable de la solution d'équilibre. Pour ce faire, on se restreint aux points dans l'ensemble stable dans un voisinage de \hat{v} dont la demi-trajectoire en entier sera aussi incluse dans le même voisinage. C'est-à-dire que pour U

un ouvert borné de \mathbb{R}^n on cherche des points $v_0 \in U$ tels que $\varphi(v_0, t) \subset U$ pour tout $t \geq t_0$. Un tel ensemble est une variété et on le dénote $W_{loc}^s(\hat{v})$. Dans le cas général, la dimension de cet objet n'est pas la même que la dimension de l'espace dans lequel le point d'équilibre est défini. Par exemple, pour le pont suspendu dans le cadre du nouveau système (1.2), la solution d'équilibre est un élément de \mathbb{R}^4 alors qu'une étude approfondie de ce système au Chapitre 2 permettra de trouver que la variété stable locale est de dimension 2.

Il faut donc déterminer comment un tel résultat s'obtient. L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre \hat{v} d'une équation différentielle ordinaire définie par (1.3) se fait en étudiant la matrice $D\Psi(\hat{v})$. Dans le but d'alléger la présentation et puisque c'est le cas pour

$$D\Psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice jacobienne de l'équilibre 0 de l'équation du pont suspendu, on suppose que l'on travaille avec une matrice diagonalisable et hyperbolique, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont à partie réelle non-nulle.

On sait par des résultats classiques que la dimension de l'espace stable dépendra du nombre de valeurs propres à partie réelle négative. Supposons que la matrice $D\Psi(\hat{v})$, qui est une matrice de dimension n par n , admette $0 < m \leq n$ valeurs propres à partie réelle négative. Ces valeurs propres sont appelées valeurs propres stables. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres stables de $D\Psi(\hat{v})$ telles que $Re(\lambda_1) \leq Re(\lambda_2) \leq \dots \leq Re(\lambda_m) < 0$ ainsi que les vecteurs propres associés $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. On pose

$$A_0 = [\xi_1 | \xi_2 | \dots | \xi_m],$$

on remarque que $A_0 \in M_{n \times m}$. De plus, la matrice diagonale contenant les valeurs propres stables sera donnée par

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

On cherche une paramétrisation de $W_{loc}^s(\hat{v})$ qui satisfait

1. $P : \overline{B_\nu^m(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ où $\overline{B_\nu^m(x)} \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}^m : \|y - x\|_2 \leq \nu\}$,
2. $P(0) = \hat{v}$,
3. $DP(0) = A_0$,
4. $\varphi(P(\theta), t) = P(e^{\Lambda t}\theta)$, pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Remarque 1.1.2. *On suppose que la paramétrisation recherchée est analytique. Aussi, c'est la dernière condition qui nous assure que $P(\overline{B_\nu^m(0)})$ est dans $W_{loc}^s(\hat{v})$. En effet, pour $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$*

il est possible de vérifier que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(P(\theta), t) = \hat{v}.$$

D'abord, en utilisant la condition 4, on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(P(\theta), t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(e^{\Lambda t} \theta).$$

De plus, la matrice Λ est diagonale et elle contient les valeurs propres à partie réelle négative, on a donc que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\Lambda t} \theta = 0, \forall \theta \in \mathbb{R}^m.$$

La fonction P recherchée étant continue, ceci fournit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(e^{\Lambda t} \theta) = P(0),$$

ce qui mène à l'égalité voulue étant donné que $P(0) = \hat{v}$, par la condition 3.

Comme on cherche à paramétrer la variété stable, il faut s'assurer d'obtenir une bijection. Il n'est pas nécessaire de vérifier la surjectivité, puisqu'on restreindra l'image à $P(\overline{B_\nu^m(0)})$. Pour ce qui est de l'injectivité, le fait que A_0 soit de plein rang nous permet d'utiliser le théorème des fonctions implicites et d'affirmer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$P : \overline{B_r^m(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

est injective. Si $r > \nu$, alors $\overline{B_\nu^m(0)} \subset \overline{B_r^m(0)}$ et on a directement le résultat voulu. Sinon, soient $\theta_1, \theta_2 \in \overline{B_\nu^m(0)}$ tels que $P(\theta_1) = P(\theta_2)$. On cherche à montrer que $\theta_1 = \theta_2$. Pour tout t , on sait que $\varphi(t, P(\theta_1)) = \varphi(t, P(\theta_2))$, par le théorème d'existence et d'unicité. Comme on a imposé que $\varphi(P(\theta), t) = P(e^{\Lambda t} \theta)$ pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc que $P(e^{\Lambda t} \theta_1) = P(e^{\Lambda t} \theta_2)$. Or, il est possible de déterminer \tilde{t} suffisamment grand pour que $e^{\Lambda \tilde{t}} \theta_1, e^{\Lambda \tilde{t}} \theta_2 \in \overline{B_r^m(0)}$. Mais on a montré que P est injective sur $\overline{B_r^m(0)}$, donc que $e^{\Lambda \tilde{t}} \theta_1 = e^{\Lambda \tilde{t}} \theta_2$. Ceci revient à $\theta_1 = \theta_2$, qui est le résultat recherché. Donc $P : \overline{B_\nu^m(0)} \rightarrow P(\overline{B_\nu^m(0)})$ est une bijection.

Il n'est pas facile de trouver une expression simple pour la paramétrisation P étant donné que la contrainte 4 doit être satisfaite pour tout temps t . Le lemme suivant permet d'obtenir une contrainte équivalente sous forme d'une équation aux dérivées partielles, qui sera plus simple à calculer.

Lemme 1.1.3. Soit $P : \overline{B_\nu^m(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable telle que $P(0) = \hat{v}$ et $DP(0) = A_0$. Alors $P(\theta)$ satisfait $\varphi(P(\theta), t) = P(e^{\Lambda t} \theta)$ pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si $P(\theta)$ satisfait $\Psi(P(\theta)) = DP(\theta)\Lambda\theta$ pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$.

Remarque 1.1.4. L'équation $\Psi(P(\theta)) = DP(\theta)\Lambda\theta$ est appelée équation d'invariance. Dans le cas du problème du pont suspendu, elle est donnée explicitement par (2.3).

Démonstration. (\Leftarrow) Supposons que $P(\theta)$ satisfait $f(P(\theta)) = DP(\theta)\Lambda\theta$ pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$. Pour θ fixé, posons $\gamma(t) = P(e^{\Lambda t}\theta)$. Alors $\gamma(0) = P(\theta)$ et

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= DP(e^{\Lambda t}\theta)e^{\Lambda t}\Lambda\theta \\ &= DP(e^{\Lambda t}\theta)\Lambda e^{\Lambda t}\theta \\ &= \Psi(P(e^{\Lambda t}\theta)) \\ &= \Psi(\gamma(t))\end{aligned}$$

donc $\gamma(t)$ est une solution de (1.3). Par unicité, on a que $\varphi(t, P(\theta)) = \gamma(t) = P(e^{\Lambda t}\theta)$, pour tout t . De plus, comme θ était choisi arbitrairement, le résultat tient pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$.

(\Rightarrow) Supposons que $P(\theta)$ satisfait $\varphi(P(\theta), t) = P(e^{\Lambda t}\theta)$ pour tout $\theta \in \overline{B_\nu^m(0)}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. En dérivant cette équation de chaque côté, on obtient

$$\Psi(\varphi(P(\theta), t)) = DP(e^{\Lambda t}\theta)e^{\Lambda t}\Lambda\theta.$$

Ceci est satisfait pour tout t , en particulier en $t = 0$ on a que

$$\Psi(P(\theta)) = DP(\theta)\Lambda\theta.$$

Qui est le résultat voulu. □

Ce résultat fournit un problème à résoudre afin d'obtenir la paramétrisation de la variété stable locale recherchée. Il faut maintenant résoudre exactement cette équation. Pour ce faire, on développe la solution en série de puissance. L'espace dans lequel les coefficients seront définis est introduit dans la section suivante. La résolution du problème de la variété stable locale sera faite au Chapitre 2.

1.2 Développements en séries et espace des coefficients

Soient $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ une suite infinie de nombres complexes a_n et $\nu > 0$. On peut vérifier aisément que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \nu^n$$

induit une norme que l'on dénotera $\|a\|_{1,\nu}$. Il en est de même si on considère $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \nu^{|n|}. \tag{1.4}$$

Définition 1.2.1. Pour $\nu > 0$ fixé, soit ℓ_ν^1 , l'ensemble des suites $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ telles que $\|a\|_{1,\nu} < \infty$. Similairement l'espace ℓ_ν^1 dénotera aussi l'ensemble des suites de la forme $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ muni de la norme correspondante (1.4).

Remarque 1.2.2. Les deux normes seront dénotées par $\|\cdot\|_{1,\nu}$ puisqu'elles sont très semblables. De plus, seulement le premier cas surviendra dans les Chapitres 2 et 3.

L'introduction d'un tel espace mène aux définitions suivantes.

Définition 1.2.3. *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé qui est complet dans la métrique définie par sa norme. De plus, un espace de Banach X muni de la norme $\|\cdot\|_X$ sera une algèbre de Banach s'il est muni d'une opération $*$: $X \times X \rightarrow X$ qui satisfait pour tout $x, y, z \in X$*

1. $x * (y * z) = (x * y) * z$,
2. $x * (y + z) = x * y + x * z$,
3. $\alpha(x * y) = (\alpha x * y) = (x * \alpha y)$ pour tout scalaire α et
4. $\|x * y\|_X \leq \|x\|_X \|y\|_X$.

Le fait que l'espace $(\ell_\nu^1, \|\cdot\|_{1,\nu})$ soit une algèbre de Banach se vérifie directement. Le lemme ci-dessous montre que cet espace est en fait une algèbre de Banach sous le produit de convolution.

Lemme 1.2.4. *Soient $a, b \in \ell_\nu^1$. On définit le produit $a * b$ composante par composante comme suit*

$$(a * b)_k = \sum_{k_1+k_2=k} a_{k_1} b_{k_2}$$

où dans le cas $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty$, on a $k_1, k_2 \geq 0$, alors que dans le cas $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ on a $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Alors ℓ_ν^1 est une algèbre de Banach sous $*$.

Démonstration. La démonstration sera faite dans le cas $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Le cas de $a = \{a_n\}_{n \geq 0}$ muni de la norme

$$\|a\|_{1,\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \nu^n$$

est similaire. Montrons d'abord que $\|\cdot\|_{1,\nu}$ est bel et bien une norme. Pour $x \in \ell_\nu^1$ et pour tout n , on a que $|x_n| \nu^{|n|} \geq 0$, donc que $\|x\|_{1,\nu} \geq 0$. De plus, si $\|x\|_{1,\nu} = 0$, pour $m \in \mathbb{Z}$ on a que

$$0 = \|x\|_{1,\nu} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| \nu^{|n|} \geq |x_m| \nu^{|m|} \geq 0.$$

Donc $x_m = 0$, comme m est quelconque on a que $x = 0$. Finalement, pour $x, y \in \ell_\nu^1$, $\|x+y\|_{1,\nu} \leq \|x\|_{1,\nu} + \|y\|_{1,\nu}$ vient directement de l'application de l'inégalité triangulaire composante par composante. Il faut désormais montrer que cette norme est complète. Soit $\{x^n\}_{n \geq 1} \in \ell_\nu^1$ une suite de Cauchy, montrons que cette suite converge vers un point $x \in \ell_\nu^1$. Soient $k \in \mathbb{Z}$ fixé et $\epsilon > 0$, comme la suite est de Cauchy, pour m, n assez grands on a que

$$\|x^n - x^m\|_{1,\nu} < \epsilon \nu^{|k|},$$

donc que

$$|x_k^m - x_k^n| \leq \|x^n - x^m\|_{1,\nu} \nu^{-|k|} < \epsilon.$$

Donc la suite $\{x_k^n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ est de Cauchy. Comme \mathbb{C} est de Banach cette suite converge, disons vers x_k . Ceci étant vrai pour tout k il est possible de définir $x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Il suit de la définition de x que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x\|_{1,\nu} = 0.$$

Ce qui montre que ℓ_ν^1 est un espace de Banach. Montrons maintenant que $*$ respecte toutes les propriétés énoncées. Pour les propriétés énoncées ci-dessous on considère $x, y, z \in \ell_\nu^1$.

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. En développant chaque produit de convolution, on obtient que

$$[x * (y * z)]_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i (y * z)_{k-i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_i y_j z_{k-i-j} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} x_{k-i-j} y_j z_i = [(x * y) * z]_k.$$

2. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a que

$$[x * (y + z)]_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i (y + z)_{k-i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i y_{k-i} + \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i z_{k-i} = (x * y)_k + (x * z)_k.$$

3. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a que

$$\alpha(x * y)_k = \alpha \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i y_{k-i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (\alpha x_i) y_{k-i} = (\alpha x * y)_k.$$

La deuxième égalité se montre de la même manière.

4. On considère

$$c_N = \sum_{|n| < N} \left| \sum_{|k| < n} x_{n-k} y_n \right| \nu^{|n|}.$$

Alors c_N est une suite croissante et

$$c_N \leq \sum_{|k| < N} |x_k| \nu^{|k|} \sum_{|k| < N} |y_k| \nu^{|k|} \leq \|x\|_{1,\nu} \|y\|_{1,\nu}.$$

Ainsi, la suite c_N est bornée. Donc elle converge. Or, on a que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |c_N| = \|x * y\|_{1,\nu}.$$

Ce qui montre que $\|x * y\|_{1,\nu} < \infty$ et $\|x * y\|_{1,\nu} \leq \|x\|_{1,\nu} \|y\|_{1,\nu}$. □

Il faut maintenant confirmer qu'un tel espace de suites nous permet d'engendrer des fonctions analytiques en utilisant les coefficients $a = \{a_n\}_{n=0}^\infty$ afin de créer une série. C'est-à-dire que l'étude de fonctions analytiques permet d'utiliser l'espace de Banach introduit à la Définition 1.2.1. Le cas des séries de Taylor, qui sera utilisé pour exprimer la paramétrisation d'une variété stable, est traité dans le théorème suivant.

Théorème 1.2.5. 1) Soit $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell_{\nu}^1$ pour un certain $\nu > 0$. Alors la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

est analytique sur la boule $B_{\nu}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \nu\}$. De plus, f est bornée et continue sur $\overline{B_{\nu}(z_0)}$.

2) Soit $\nu > 0$. Si $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique sur $B_{\nu}(z_0)$ avec une série de Taylor donnée par

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

alors $a = \{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \ell_r^1$, pour tout $r < \nu$.

L'étude de développements en séries de fonctions dans le but de résoudre une équation différentielle amène à étudier l'espace dual de ℓ_{ν}^1 , c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires définies sur un espace vectoriel donné X , qu'on dénotera X^* . Le dual est souvent difficile à obtenir. Cependant dans ce cas, il est bien connu. En effet, dans le cas de ℓ_{ν}^1 , on voit facilement qu'un élément de $(\ell_{\nu}^1)^*$ sera de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n,$$

où $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_{\nu}^1$ et $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ dont les propriétés sont encore à déterminer. L'étude de $(\ell_{\nu}^1)^*$ est facilitée par la définition et le théorème suivant.

Définition 1.2.6. $\ell_{\nu-1}^{\infty} = \{c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty} : \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} < \infty\}$, où $\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} = \sup_{n \geq 0} \frac{|c_n|}{\nu^n}$.

Théorème 1.2.7. Pour $\nu > 0$, l'espace $\ell_{\nu-1}^{\infty}$ est isométrique à $(\ell_{\nu}^1)^*$.

Afin de compléter la démonstration de ce résultat, un lemme sera nécessaire.

Lemme 1.2.8. Si $a \in \ell_{\nu}^1$ et $c \in \ell_{\nu-1}^{\infty}$, alors

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \right| \leq \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \|a\|_{1, \nu}.$$

Démonstration (Lemme). Comme $\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} = \sup_{n \geq 0} \frac{|c_n|}{\nu^n}$, on a directement que $|c_n| \leq \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \nu^n$ pour tout n . Ainsi, on a

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |a_n| \leq \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \nu^n = \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \|a\|_{1, \nu}. \quad \square$$

Démonstration (Théorème). Il faut construire $J : \ell_{\nu^{-1}}^{\infty} \rightarrow (\ell_{\nu}^1)^*$ une bijection linéaire. Soit $c \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$. On définit Q_c une fonctionnelle linéaire sur ℓ_{ν}^1 par

$$Q_c(a) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n.$$

Il est clair que Q_c est linéaire. Par le Lemme 1.2.8, on a que

$$\|Q_c(a)\| = \sup_{\|a\|_{1,\nu}=1} |Q_c(a)| \leq \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} < \infty,$$

et donc que Q_c est une fonctionnelle linéaire bornée.

Posons $J(c) \stackrel{\text{def}}{=} Q_c$ et montrons que J est bijective. Soient $c, d \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$ tels que $Q_c = Q_d$, c'est-à-dire que $Q_c(a) = Q_d(a)$ pour tout $a \in \ell_{\nu}^1$. En particulier c'est vrai pour tout $e^k = \{\delta_{n,k}\}_{n=0}^{\infty}$ où $\delta_{n,k}$ est la fonction delta de Kronecker. Ce qui permet d'obtenir pour tout k

$$0 = Q_c(e^k) - Q_d(e^k) = c_k - d_k,$$

donc que $c = d$. Ainsi, J est injective. Pour montrer que J est surjective, on observe d'abord que $\{e^k | k \in \mathbb{N}\}$ est une base de ℓ_{ν}^1 . Soit Q un élément quelconque de $(\ell_{\nu}^1)^*$. On cherche à construire $c \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$ tel que $J(c) = Q$. Soit $a \in \ell_{\nu}^1$. On a

$$Q(a) = Q\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q(e^k).$$

On pose $c = \{Q(e^k)\}_{k=0}^{\infty}$. Si $c \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$, on aura alors que J est surjectif. Or, pour tout $a \in \ell_{\nu}^1$ où $a \neq 0$

$$\frac{|Q(a)|}{\|a\|_{1,\nu}} \leq \|Q\|.$$

En particulier,

$$\frac{|c_n|}{\nu^n} = \frac{|Q(e^n)|}{\|e^n\|_{1,\nu}} \leq \|Q\|.$$

Ceci étant vrai pour tout n , on a que

$$\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} = \sup_{n \geq 0} \frac{|c_n|}{\nu^n} \leq \|Q\| < \infty.$$

Donc $c \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$, ce qui montre que J est surjective. Finalement, on a déjà que $\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \leq \|Q_c\|$. On cherche à obtenir l'égalité pour montrer que J est une isométrie. Or,

$$\|Q_c\| = \sup_{\|a\|_{1,\nu}=1} \|Q_c(a)\| \leq \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}}$$

par le Lemme 1.2.8. Ce qui montre que J est une isométrie donc que $\ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$ est isométrique à $(\ell_{\nu}^1)^*$. \square

Grâce à ce résultat, il est désormais possible d'utiliser la série d'égalités suivante

$$\|\ell_c\|_{(\ell_\nu^1)^*} = \sup_{\|a\|_{1,\nu}=1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n \right| = \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} = \sup_{n \geq 0} \frac{|c_n|}{\nu^n}. \quad (1.5)$$

Ces égalités seront d'une grande utilité puisqu'elles permettent de calculer explicitement la norme d'un élément du dual, calcul qui surviendra à plusieurs reprises dans la démarche utilisée pour appliquer le théorème de contraction de Banach. De plus, seul le cas $a = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ a été mentionné puisque l'autre cas ne sera pas utilisé dans le cadre de l'équation du pont suspendu. En effet, on verra plus tard que l'expression en polynômes de Tchebychev a comme propriété que $a_k = a_{-k}$ pour tout k . On utilisera donc le fait que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \nu^{|n|} = |a_0| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \nu^n.$$

Ainsi, dans le cas des coefficients de Tchebychev, il faudra utiliser la norme donnée par

$$\|a\|_{1,\nu} = |a_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \nu^k.$$

Une telle variante permet tout de même d'utiliser directement le Lemme 1.2.4. Toutefois, le dual ne correspondra plus à ce qui a été introduit à la Définition 1.2.6. L'espace est cependant similaire, il suffit de modifier la norme légèrement. Pour $c = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, elle sera donnée par

$$\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} = \max \left\{ |c_0|, \sup_{n \geq 1} \frac{|c_n|}{2\nu^n} \right\}.$$

Le Lemme 1.2.8 et l'équation (1.5) seront eux aussi toujours valides malgré cette légère modification. L'utilité de l'espace ℓ_ν^1 est claire dans le cas des séries de Taylor grâce au Théorème 1.2.5. On s'attarde désormais au cas de la partie finie de l'orbite recherchée. Tel que mentionné précédemment, la partie finie de la connexion homocline sera approximée à l'aide de séries de Tchebychev. Afin d'obtenir un résultat semblable au Théorème 1.2.5 sur la décroissance des coefficients de Tchebychev, il faut faire une brève excursion dans le domaine des fonctions périodiques.

1.3 Décroissance exponentielle des coefficients de Tchebychev via les coefficients de Fourier

Parfois l'étude d'équations différentielles fait survenir des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que pour un certain $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ la fonction satisfait $f(t+p) = f(t)$. Une telle fonction est dite périodique et le plus petit p pour lequel la condition est satisfaite est appelé période. De telles fonctions permettent de restreindre l'étude à un intervalle borné. Dans le cas énoncé ci-haut l'intervalle serait $[0, p)$. Plus généralement, soit Ω un domaine borné de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Pour $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, on utilise le produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(t) v^*(t) dt,$$

où $v^*(t)$ est le conjugué complexe de $v(t)$. L'espace $L^2(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : (u, u) < \infty\}$ est un espace de Hilbert. On s'intéresse au cas des fonctions périodiques de période p à image dans \mathbb{R} . On a alors $\Omega = [0, p)$ et on dénote l'espace $L^2([0, p), \mathbb{R})$. L'utilisation de cet espace est justifiée par les résultats ci-dessous.

Proposition 1.3.1. *Soit $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution périodique de période p de $\dot{v} = \Psi(v)$ avec $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Alors, $\gamma_j \in L^2([0, p), \mathbb{R})$ pour tout $j = 1, \dots, n$.*

Démonstration. Comme γ est solution de $\dot{v} = \Psi(v)$ et que $\Psi \in C^1$, on a que $\gamma' \in C^1$. Comme ce sont des fonctions continues sur un compact, chaque γ_j est bornée, disons par M_j . Soit $M = \max\{M_1, \dots, M_n\}$. On a alors

$$(\gamma_j, \gamma_j) = \int_0^p \gamma_j(t) \gamma_j(t) dt \leq M^2 \int_0^p dt = M^2 p < \infty,$$

ce qui montre que $\gamma_j \in L^2([0, p), \mathbb{R})$ pour tout $j = 1, \dots, n$. □

Il est difficile, voire impossible, d'exprimer la totalité des fonctions de cet espace puisque cet espace est de dimension infinie. Cependant, un résultat classique d'analyse permet d'exprimer un élément d'un espace de Hilbert donné en fonction des éléments d'une base orthogonale (pour plus de détails sur le sujet, voir le chapitre 10 de (Bollobás, 1999), en particulier le Corollaire 7 et les Théorèmes 8 et 10). On cherche désormais à obtenir une base orthogonale de l'espace $L^2([0, p), \mathbb{R})$. On voit dans le théorème suivant quelle base fera l'affaire.

Théorème 1.3.2. *L'ensemble $\{e^{ik\omega t} : \omega = \frac{2\pi}{p}, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthogonale de $L^2([0, p), \mathbb{C}^n)$.*

Démonstration. Comme $L^2([0, p), \mathbb{C}^n)$ est un espace de Hilbert, il suffit de montrer que l'ensemble forme une famille orthogonale et le résultat suit d'un théorème classique d'analyse fonctionnelle. On a

$$\begin{aligned} (e^{ij\omega t}, e^{ik\omega t}) &= \int_0^p e^{ij\omega t} e^{-ik\omega t} dt = \int_0^p e^{i(j-k)\omega t} dt \\ &= \begin{cases} p, & \text{si } k = j, \\ 0, & \text{si } k \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Ceci montre que l'ensemble forme une famille orthogonale. □

En utilisant ce résultat, d'autres résultats classiques permettent d'exprimer une fonction g de l'espace de Hilbert $L^2([0, p), \mathbb{R})$ par

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\omega t}, \quad \text{avec } a_k = \frac{1}{p} \int_0^p g(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

Les coefficients a_k sont appelés les coefficients de Fourier de g . On étudie maintenant la décroissance de ces coefficients via la théorie des fonctions analytiques. Rappelons d'abord que dans le cas des fonctions complexes, si $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période p sur

$$A_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \rho\}$$

elle satisfait $u(z + p) = u(z)$ pour tout z dans A_ρ . On sait déjà que la solution de (1.3) sera réelle analytique si f est réelle analytique grâce au résultat suivant.

Théorème 1.3.3. *Soient $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ réelle analytique sur $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et le problème*

$$\frac{dv}{dt} = \Psi(t, v). \quad (1.6)$$

Chaque choix $(t_0, v_0) \in U$ engendre un problème de condition initiale (1.3) de recherche d'une courbe solution de (1.6) passant par (t_0, v_0) .

Alors pour chaque $(t_0, v_0) \in U$ il existe un polydisque $D_\epsilon = \{(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < \epsilon, |v_j - v_{0,j}| < \epsilon, j = 1, \dots, n\}$ tel que (1.3) admet une unique solution. De plus, cette solution est analytique sur le polydisque D_ϵ .

La preuve de ce théorème dans un cadre plus général peut être trouvée dans Evans (2010) (Chapitre 1, section D) ou Folland (1995) (Chapitre 4, Théorème 2). Dans le cadre d'une équation similaire, le résultat se trouve aussi dans Ilyashenko et Yakovenko (2007) (Chapitre 1, Théorème 1.1) mais pour les fonctions holomorphes. On remarque que ce résultat ne fournit pas l'existence d'une bande dans les complexes A_ρ sur laquelle la solution est analytique. On verra par le lemme suivant que l'extension d'une telle solution est possible dans le cas des fonctions périodiques.

Lemme 1.3.4. *Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique analytique de période p . Alors il existe $\rho > 0$ tel que u peut être étendue analytiquement sur A_ρ .*

Démonstration. Soit $s \in [0, p]$. Comme u est analytique il existe ρ_s tel que la série de Taylor de u converge uniformément sur $U_s = \{t \in [0, p] : |t - s| < \rho_s\}$. L'ensemble des U_s pour $s \in [0, p]$ forme un recouvrement ouvert de $[0, p]$. Ce dernier étant compact, il existe s_1, \dots, s_N tel que

$$[0, p] \subset \bigcup_{j=1}^N U_{s_j}.$$

La série de Taylor convergeant uniformément sur U_{s_j} , on a que u peut être étendue analytiquement dans les complexes sur la boule

$$V_{s_j} = \{z \in \mathbb{C} : |z - s_j| < \rho_{s_j}\}.$$

La fonction u est définie et analytique sur l'union de ces ensembles. De plus, il est possible de trouver $0 < \rho < \min\{\rho_{s_1}, \dots, \rho_{s_N}\}$ tel que $A_\rho \subset \bigcup_{j=1}^N V_{s_j}$. \square

Maintenant, il est possible d'utiliser ces propriétés pour obtenir une borne sur les coefficients de Fourier de la fonction analytique donnée par ce lemme. Ce résultat permettra ultimement de montrer que les coefficients de Tchebychev de la solution recherchée sont dans l'espace ℓ_p^1 . Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Paley-Wiener.

Théorème 1.3.5 (Paley-Wiener). *Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique et périodique de période p . Soit $\omega = \frac{2\pi}{p}$ et la série de Fourier*

$$u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\omega t}.$$

Posons $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Alors il existe un $\nu > 1$ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \nu^{|n|} < \infty.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on suppose que $p = 2\pi$, donc $\omega = 1$. Les autres cas se font de la même manière que celui-ci. Par le lemme précédent, il existe $\rho > 0$ tel que u est analytique sur A_ρ . En fait, on obtient $u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inz}$, qui est 2π périodique au sens complexe. Soit $0 < \epsilon < \rho$. Comme u est analytique sur A_ρ , elle est bornée sur $A_{\rho-\epsilon}$. Posons $C = \sup_{z \in A_{\rho-\epsilon}} |u(z)|$. Cette quantité est finie grâce à l'argument précédent. Rappelons que

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) e^{-ins} ds.$$

Soit $n \geq 0$ quelconque et posons

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi} u(z) e^{-inz}.$$

Cette fonction sera analytique et périodique car elle est le produit de fonctions analytiques et périodiques. On considère le contour $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 \cap \Gamma_4$ parcourant dans le sens horaire la frontière du quadrilatère délimité par les points $0, 2\pi, 2\pi - (\rho - \epsilon)\mathbf{i}$ et $-(\rho - \epsilon)\mathbf{i}$. Le contour Γ est illustré à la Figure 1.1.

On remarque que le contour, ainsi que la région qu'il délimite, sont entièrement inclus dans A_ρ , qui est le domaine de définition de l'extension analytique de u et qui est en gris dans la Figure 1.1. Comme g_n est composée de fonctions analytiques, donc holomorphes, sur tout Γ ainsi que son intérieur et que le contour Γ est fermé, le théorème de Cauchy fournit que

$$\int_{\Gamma} g_n(s) ds = 0. \tag{1.7}$$

Cependant, en séparant le contour afin d'obtenir des intégrales sur chacune des parties de Γ_i et puisque g_n est de période 2π , c'est-à-dire que

$$\int_{\Gamma_2} g_n(s) ds = - \int_{\Gamma_4} g_n(s) ds,$$

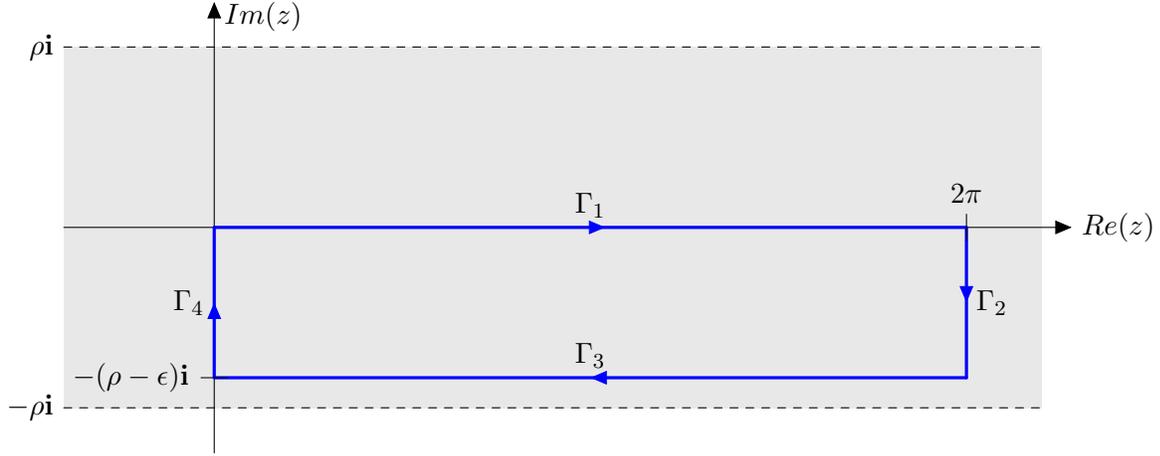


FIGURE 1.1: Contour Γ .

il est possible de réécrire (1.7) comme

$$\int_{\Gamma_1} g_n(s) ds = - \int_{\Gamma_3} g_n(s) ds. \quad (1.8)$$

Il est possible de calculer directement ces deux intégrales en paramétrant Γ_1 et Γ_3 . En effet, le premier contour est donné par $\gamma_1(s) = s$ pour $s \in [0, 2\pi]$ et le second par $\gamma_3(s) = (2\pi - s) - \mathbf{i}(\rho - \epsilon)$. L'intégrale sur Γ_1 devient donc

$$\int_{\Gamma_1} g_n(s) ds = \int_0^{2\pi} g_n(s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(s) e^{-\mathbf{i}ns} ds = a_n,$$

tandis que l'intégrale sur Γ_3 devient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} g_n(s) ds &= \int_0^{2\pi} g_n(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon)) \cdot -1 ds \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon)) e^{-\mathbf{i}n(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon))} ds. \end{aligned}$$

En remplaçant de chaque côté dans (1.8) et en prenant la norme de chaque côté, on obtient

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon)) e^{-\mathbf{i}n(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon))} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon))| \cdot \left| e^{-\mathbf{i}n(2\pi - s - \mathbf{i}(\rho - \epsilon))} \right| ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C \cdot \left| e^{-n(\rho - \epsilon)} \right| \cdot \left| e^{-\mathbf{i}n(2\pi - s)} \right| ds \\ &= C \cdot e^{-n(\rho - \epsilon)} = C \left(e^{(\rho - \epsilon)} \right)^{-n}. \end{aligned}$$

On pose $\tilde{\nu} = e^{(\rho - \epsilon)}$. Alors $\tilde{\nu} > 1$ car $\rho > \epsilon$. Ce qui permet d'obtenir $|a_n| \leq \frac{C}{\tilde{\nu}^n}$. Pour $n < 0$, on répète le même argument en utilisant le contour passant par les points $0, 2\pi, 2\pi + (\rho - \epsilon)\mathbf{i}$ et

$(\rho - \epsilon)\mathbf{i}$ pour obtenir $|a_n| \leq \frac{C}{\tilde{\nu}^{|n|}}$. Ainsi, pour tout $1 < \nu < \tilde{\nu}$ on a que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \nu^{|n|} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} C \frac{\nu^{|n|}}{\tilde{\nu}^{|n|}} = C \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\nu}{\tilde{\nu}}\right)^{|n|} < \infty.$$

Ce qui est le résultat souhaité. □

Il faut désormais utiliser ce résultat pour en obtenir un similaire dans le cas des coefficients de Tchebychev. Rappelons d'abord quelques propriétés des polynômes de Tchebychev.

1. Les polynômes de Tchebychev, définis sur l'intervalle $[-1, 1]$, sont donnés par la formule de récurrence $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ et $T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t)$.
2. Ce sont des polynômes trigonométriques *déguisés*, le changement de variable $t = \cos(\theta)$ permet d'obtenir par récurrence que $T_k(t) = \cos(k\theta)$. En effet, on a que

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1 = \cos(0), \\ T_1(t) &= t = \cos(\theta). \end{aligned}$$

Supposons le résultat vrai pour k et $k - 1$, on a alors que

$$T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t) = 2 \cos(\theta) \cos(k\theta) - \cos((k-1)\theta).$$

Or, par une identité trigonométrique bien connue, on a que

$$\begin{aligned} \cos((k+1)\theta) &= \cos(k\theta) \cos(\theta) + \sin(k\theta) \sin(\theta), \\ \cos((k-1)\theta) &= \cos(k\theta) \cos(\theta) - \sin(k\theta) \sin(\theta). \end{aligned}$$

En combinant ces égalités, on obtient $\cos((k+1)\theta) = 2 \cos(k\theta) \cos(\theta) - \cos((k-1)\theta)$. D'où $T_{k+1}(t) = \cos((k+1)\theta)$. Le résultat suit par le principe de récurrence.

3. En utilisant ce changement de variables, on constate directement que $|T_k(t)| \leq 1$ pour tout k et pour tout $t \in [-1, 1]$.
4. Soit $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ avec le produit scalaire

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt,$$

alors les polynômes de Tchebychev sont dans $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ et sont orthogonaux. En effet, on a

$$\begin{aligned} (T_j, T_k) &= \int_{-1}^1 \frac{T_j(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\pi}^0 \frac{\cos(k\theta) \cos(j\theta)}{\sin(\theta)} \cdot -\sin(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(k\theta) \cos(j\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j, \\ \pi, & \text{si } k = j = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } k = j \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

5. Comme dans le cas des coefficients de Fourier, il est possible d'utiliser le fait que $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert et d'exprimer une fonction u de cet espace sous la forme de série de Tchebychev $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k T_k(t)$, avec

$$\hat{u}_k = \frac{\alpha}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad (1.9)$$

où $\alpha = 1$ si $k = 0$ et $\alpha = 2$ si $k \geq 1$.

Soit $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction réelle analytique. On considère la fonction $v(\theta) = u(\cos(\theta))$. C'est la composition de fonctions analytiques donc elle est analytique. De plus on remarque qu'elle est paire et périodique de période 2π . Par le théorème de Paley-Wiener, on exprime la fonction en série de Fourier

$$v(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta} \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k| \nu^{|k|} < \infty,$$

pour un $\nu > 1$ donné. La parité de v assure que $a_k = a_{-k}$ pour tout k et que

$$v(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \cos(k\theta).$$

En fait, pour $k \geq 1$, on a que

$$\begin{aligned} \hat{u}_k &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(t) T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi v(\theta) \cos(k\theta) d\theta \\ &= 2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\theta) \cos(k\theta) d\theta \right] = 2a_k. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe des constantes $C > 0$ et $\nu > 1$ telles que $|\hat{u}_k| \leq \frac{C}{\nu^k}$, et ce, pour tout k plus grand ou égal à 1. Ce qui permet de conclure que la série de Tchebychev converge uniformément et que si on pose $\hat{u} = \{\hat{u}_k\}_{k \geq 0}$, on a $\|\hat{u}\|_{1,\nu} < \infty$. Il suit que deux fonctions f et g exprimées sous forme de séries de Tchebychev uniformément convergentes pourront être réécrites comme

$$\begin{aligned} f(t) &= \hat{f}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k T_k(t), \\ g(t) &= \hat{g}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{g}_k T_k(t). \end{aligned}$$

Ainsi, leur produit converge uniformément aussi et est donné par

$$f(t)g(t) = \left(\hat{f} * \hat{g}\right)_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\hat{f} * \hat{g}\right)_k T_k(t).$$

Le produit $*$ est expliqué en détails dans la remarque suivante.

Remarque 1.3.6. *La multiplication de fonctions qui sont exprimées par des polynômes de Tchebychev est donnée par le produit de convolution. Comme $a_k = a_{-k}$ pour tout k , pour $a, b \in \ell_\nu^1$ on obtient que $(a * b)_k = (a * b)_{-k}$. Ainsi, il est simplement nécessaire de déterminer les termes positifs. Cependant, il est essentiel de remarquer que le produit de convolution fait intervenir tous les coefficients, plus précisément il est donné par*

$$(a * b)_k = \sum_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ k_1 + k_2 = k}} a_{k_1} b_{k_2}.$$

Grâce à ces résultats, on sait que pour un équilibre d'une équation différentielle analytique la recherche d'une paramétrisation de sa variété stable locale peut être faite via un espace de coefficients dont la décroissance est exponentielle. De plus, il en est de même pour l'expression sous forme d'une série de Tchebychev d'un segment borné de la connexion homocline recherchée.

On cherche maintenant à déterminer si l'approximation d'une fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par les polynômes de Tchebychev permet de déterminer une erreur d'approximation avec la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-1, 1]} \|f(t)\|_\infty$$

grâce à l'erreur dans l'espace ℓ_ν^1 . Ce sera bel et bien possible. En effet, soient $\hat{f} = \{\hat{f}_k\}_{k=0}^\infty$ les coefficients de Tchebychev exacts de f et $\bar{f} = \{\bar{f}_k\}_{k=0}^\infty$ une approximation des coefficients \hat{f} . On suppose que $\|\hat{f} - \bar{f}\|_{1, \nu} < \delta$, pour certains $\nu > 1$ et $\delta > 0$. De plus, on considère

$$\bar{f}(t) = \bar{f}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k T_k(t).$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|f(t) - \bar{f}(t)\|_\infty &= \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \hat{f}_0 - \bar{f}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k T_k(t) - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{f}_k T_k(t) \right| \\ &= \sup_{t \in [-1, 1]} \left| \hat{f}_0 - \bar{f}_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\hat{f}_k - \bar{f}_k) T_k(t) \right| \\ &\leq \sup_{t \in [-1, 1]} \left(|\hat{f}_0 - \bar{f}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \bar{f}_k| |T_k(t)| \right) \\ &\leq |\hat{f}_0 - \bar{f}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \bar{f}_k| \\ &\leq |\hat{f}_0 - \bar{f}_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\hat{f}_k - \bar{f}_k| \nu^k = \|\hat{f} - \bar{f}\|_{1, \nu} < \delta. \end{aligned}$$

Il faut désormais obtenir \hat{f} , une approximation des coefficients. Dans le cas de Tchebychev, ces derniers peuvent être obtenus en utilisant directement (1.9), cependant cette technique ne

fournit pas la valeur δ . La prochaine section aura pour objectif de construire une technique basée sur l'utilisation du théorème du point fixe de Banach appliqué à un opérateur de point fixe dont la solution est la suite des coefficients de Tchebychev. Une telle technique fournira l'erreur voulue. C'est-à-dire qu'on pourra déterminer $\delta > 0$ tel que $\|f - \bar{f}\|_{1,\nu} < \delta$, avec f la solution exacte recherchée et \bar{f} une approximation de f .

1.4 Opérateur de Newton et polynômes de rayon

Soient $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable et $\hat{x} \in \mathbb{R}$ tels que $F(\hat{x}) = 0$. Il est connu que dans un voisinage suffisamment petit de \hat{x} , un zéro de la fonction F , l'application $T(x) = x - (DF(x))^{-1}F(x)$ est une forte contraction. En effet, dans le cas $n = 1$, pour $h > 0$ une petite valeur, on a que

$$\begin{aligned} T(\hat{x} + h) - T(\hat{x}) &= \hat{x} + h - \frac{F(\hat{x} + h)}{F'(\hat{x} + h)} - \left(\hat{x} - \frac{F(\hat{x})}{F'(\hat{x})} \right) \\ &= h - \frac{F(\hat{x} + h)}{F'(\hat{x} + h)} \\ &\approx h - \frac{F(\hat{x}) + hF'(\hat{x})}{F'(\hat{x} + h)} \\ &\approx h \left(1 - \frac{F'(\hat{x})}{F'(\hat{x} + h)} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient que la constante de contraction pour la méthode Newton est près de $\left(1 - \frac{F'(\hat{x})}{F'(\hat{x} + h)} \right)$ qui sera presque 0 pour h assez petit.

Le but est d'utiliser ce fait mais dans l'espace ℓ_ν^1 plutôt que \mathbb{R}^n . Or, cette technique nécessite le calcul de l'inverse d'un opérateur de dimension infinie, ce qui est généralement impossible à calculer. On considère donc un opérateur de la forme

$$T(x) = x - AF(x),$$

où A sera une approximation de l'inverse de $DF(\bar{x})$ pour \bar{x} une approximation de la solution. On cherche une manière de définir A qui nécessite un nombre fini de données, afin que les calculs puissent être exécutés numériquement. De plus, il faut que A soit injectif et que $T : \ell_\nu^1 \rightarrow \ell_\nu^1$. Or, la méthode de Newton permettra d'obtenir une approximation sous forme de série tronquée, qui consiste en un problème dans \mathbb{R}^n . L'inverse de la matrice correspondante est alors calculable, puisque le problème est de dimension finie. Il faut déterminer de quelle manière construire la partie infinie de l'opérateur, puisqu'un opérateur en dimension finie ne permet pas de manipuler des éléments de ℓ_ν^1 . Il faut aussi s'assurer de l'approximer de façon suffisamment précise pour que l'opérateur demeure une contraction. La notation suivante sera utile lors de la définition de l'opérateur T .

Définition 1.4.1. Soient X, Y des espaces de Banach. On dénote l'ensemble des opérateurs linéaires de X vers Y par $B(X, Y)$. De plus, pour $A \in B(X, Y)$ on considère la norme

$$\|A\|_{B(X, Y)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y.$$

Afin de produire l'approximation nécessaire A , on remarque que la dérivée de l'opérateur F peut être vue comme une matrice carrée de dimension infinie. De plus, on sait que l'inverse d'une matrice diagonale s'obtient simplement en inversant toutes les composantes de la diagonale. On approximera donc la partie infinie de l'opérateur comme s'il était diagonal. Ainsi, l'inverse se calcule directement et seule l'inversion de la partie finie nécessite l'aide de logiciels de calculs symboliques. Un tel choix est aussi justifié par le fait que la matrice jacobienne des systèmes traités sera à diagonale dominante. De plus, le calcul de la norme d'un opérateur sous cette forme se fait aisément. Le résultat nécessaire à ce calcul est décrit dans le corollaire suivant.

Corollaire 1.4.2. Soit un opérateur linéaire $A : \ell_\nu^1 \rightarrow \ell_\nu^1$ de la forme

$$A = \begin{bmatrix} A_N & & 0 & & \\ & C_{N+1} & & & \\ & & C_{N+2} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots \end{bmatrix}$$

avec $A_N = [a_{m,n}]_{m,n=0,\dots,N} \in M_{N+1}(\mathbb{C})$ et $C_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \geq N+1$. S'il existe une constante C telle que $|C_n| \leq C$ pour tout $n \geq N+1$, alors

$$\|A\|_{B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)} \leq \max(K, C)$$

$$\text{avec } K \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq n < N} \frac{1}{\nu^n} \sum_{m=0}^N |a_{m,n}| \nu^m.$$

Démonstration. On a que

$$\|A\|_{B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)} = \sup_{\|b\|_{1,\nu}=1} \|Ab\|_{1,\nu}.$$

Par définition

$$\|Ab\|_{1,\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} b_k \right| \nu^n$$

avec $a_{n,k} = \delta_{n,k} c_k$ si $k \geq N+1$ ou $n \geq N+1$. En appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|Ab\|_{1,\nu} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k} b_k| \nu^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}| \nu^n |b_k| = \sum_{k=0}^{\infty} c_k |b_k| \quad (1.10)$$

avec $c_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}| \nu^n$. Montrons que $c = \{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$. On a que

$$\begin{aligned} \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} &= \sup_{k \geq 0} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}| \nu^n \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}| \nu^n \right\}, \sup_{k \geq N+1} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}| \nu^n \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Mais il est possible de simplifier le dernier terme en utilisant la définition de A . En effet, on obtient

$$\begin{aligned} \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} &= \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^N |a_{n,k}| \nu^n \right\}, \sup_{k \geq N+1} \left\{ \frac{1}{\nu^k} C_k \nu^k \right\} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^N |a_{n,k}| \nu^n \right\}, \sup_{k \geq N+1} \{C_k\} \right\} \end{aligned}$$

Comme $|C_k| \leq C$ pour tout $k \geq N+1$, on a

$$\begin{aligned} \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} &= \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^N |a_{n,k}| \nu^n \right\}, \sup_{k \geq N+1} \left\{ \frac{1}{\nu^k} C_k \nu^k \right\} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N} \left\{ \frac{1}{\nu^k} \sum_{n=0}^N |a_{n,k}| \nu^n \right\}, C \right\} < \infty. \end{aligned}$$

Donc on a bel et bien $c \in \ell_{\nu^{-1}}^{\infty}$. De plus, on remarque que cette inégalité revient à $\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \leq \max(K, C)$ avec K tel que défini dans l'énoncé. Comme $b \in \ell_{\nu}^1$, il est possible d'appliquer le Lemme 1.2.8 à (1.10). On obtient

$$\|Ab\|_{1, \nu} \leq \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \|b\|_{1, \nu} = \|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}},$$

ce qui est le résultat voulu, car on sait que $\|c\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \leq \max(K, C)$. \square

La recherche de solutions se faisant à l'aide d'un opérateur dont la forme est désormais connue, il faut maintenant déterminer de quelle manière on prouve que cet opérateur est une contraction sur un certain espace de Banach.

1.4.1 Les polynômes de rayon

Dans le cas général, on considère une suite d'espaces de Banach quelconques

$$(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \dots, (X_d, \|\cdot\|_{X_d}).$$

Les espaces pris en compte ne sont pas nécessairement ℓ^1_ν , bien que ce soit l'espace de Banach principal pour lequel on appliquera ce résultat. On considère l'espace produit

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_d,$$

dont la norme est donnée par

$$\|x\|_X = \max \left(\|x^{(1)}\|_{X_1}, \dots, \|x^{(d)}\|_{X_d} \right),$$

où $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(d)}) \in X$ avec $x^{(j)} \in X_j$ pour $j = 1, \dots, d$. Soit

$$B_r(y) = \{x \in X : \|x - y\|_X \leq r\}$$

la boule fermée de rayon $r > 0$ centrée en $y \in X$. On considère un ensemble de paramètres $s \in [s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$. Pour tout $j = 1, \dots, d$ on considère $T_s^{(j)} : X_j \rightarrow X_j$ un opérateur différentiable au sens de Fréchet tel que $T_s = (T_s^{(1)}, \dots, T_s^{(d)}) : X \rightarrow X$. Pour $\bar{x}_{s_0}, \bar{x}_{s_1} \in X$, on pose

$$\bar{x}_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s_1 - s}{s_1 - s_0} \bar{x}_{s_0} + \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} \bar{x}_{s_1}. \quad (1.11)$$

Remarque 1.4.3. *Un opérateur $T : X \rightarrow X$ qui ne dépend pas du paramètre permettrait d'obtenir une solution au problème du pont suspendu. Cependant, sans l'introduction du paramètre s l'opérateur fournit une solution seulement pour une valeur fixe de β . Comme le but est d'obtenir une solution pour toutes les valeurs de β dans $[0.5, 1.9]$, il faudrait effectuer une infinité de preuves! Or, l'introduction du paramètre dans l'opérateur permettra d'obtenir une solution pour toutes les valeurs de β dans un intervalle donné. Et ainsi d'effectuer un nombre fini de preuves.*

On définit l'ensemble des *centres* par $\{\bar{x}_s : s \in [s_0, s_1]\} \subset X$. Pour chaque $j = 1, \dots, d$, on définit les bornes

$$\sup_{s \in [s_0, s_1]} \left\| T_s^{(j)}(\bar{x}_s) - \bar{x}_s^{(j)} \right\|_{X_j} \leq Y^{(j)} \quad (1.12)$$

et

$$\sup_{\substack{b, c \in B_r(0) \\ s \in [s_0, s_1]}} \left\| (DT_s(\bar{x}_s + b)c)^{(j)} \right\|_{X_j} \leq Z^{(j)}(r). \quad (1.13)$$

Le but est de trouver un sous ensemble de X pour lequel T est une contraction uniforme. Pour ce faire, on introduit les polynômes de rayon. Ces derniers, lorsque définis avec suffisamment de précision, fourniront l'ensemble recherché, qui sera une boule autour de l'approximation de la solution obtenue numériquement. Il est question de la précision nécessaire au succès de la méthode à la Remarque 1.4.9.

Définition 1.4.4. *On suppose que Λ est un ensemble de paramètres. Soit $\tilde{T} : X \times \Lambda \rightarrow X$ et $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq \kappa < 1$. La fonction \tilde{T} est une contraction uniforme si $\|\tilde{T}(x, \lambda) - \tilde{T}(y, \lambda)\|_X \leq \kappa \|x - y\|_X$ pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in \Lambda$.*

Le résultat suivant est une reformulation du principe de contraction uniforme. Il est possible de trouver une preuve de ce résultat dans Chow et Hale (1982).

Théorème 1.4.5 (Principe de Contraction Uniforme). *Si il existe $r > 0$ tel que*

$$\tilde{T} : \begin{cases} B_r(0) \times [s_0, s_1] \longrightarrow B_r(0) \\ (w, s) \longmapsto \tilde{T}(w, s) \stackrel{\text{def}}{=} T_s(w + \bar{x}_s) - \bar{x}_s \end{cases} \quad (1.14)$$

est une contraction uniforme, alors pour tout $s \in [s_0, s_1]$, il existe un unique $\tilde{x}(s) \in B_r(\bar{x}_s)$ tel que $T_s(\tilde{x}(s)) = \tilde{x}(s)$. De plus, la fonction $s \mapsto \tilde{x}(s)$ est de classe C^k si $(x, s) \mapsto \tilde{T}(x, s)$ est elle aussi de classe C^k . Le résultat tient pour $k \in \mathbb{N}$ mais aussi pour $k = \infty$ ou même $k = \omega$ (les fonctions analytiques).

Théorème 1.4.6. *Pour un ensemble de paramètres $[s_0, s_1] \subset \mathbb{R}$, on considère les centres $\{\bar{x}_s : s \in [s_0, s_1]\}$ où \bar{x}_s est donné par (1.11). On suppose que $T_s : X \rightarrow X$ satisfait les bornes définies en (1.12) et (1.13) avec $T_s = (T_s^{(1)}, \dots, T_s^{(d)})$. Si il existe $r > 0$ tel que $Y^{(j)} + Z^{(j)}(r) < r$, pour tout $j = 1, \dots, d$, alors \tilde{T} défini par (1.14) satisfait $\tilde{T} : B_r(0) \times [s_0, s_1] \longrightarrow B_r(0)$ et est une contraction uniforme.*

Démonstration. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à chacune des composantes de T_s , pour $x, y \in B_r(0)$, on a

$$T_s^{(i)}(\bar{x}_s + x) - T_s^{(i)}(\bar{x}_s + y) = DT_s^{(i)}(\bar{x}_s + z_{s,i})(x - y)$$

pour une valeur $z_{s,i}$ entre x et y et pour tout $i = 1, \dots, n$. On remarque que $z_{s,i} \in B_r(0)$ pour tout s , alors

$$\begin{aligned} \left\| T_s^{(i)}(\bar{x}_s + x) - T_s^{(i)}(\bar{x}_s + y) \right\|_{X_i} &= \left\| DT_s^{(i)}(\bar{x}_s + z_{s,i}) \frac{r(x - y)}{\|x - y\|_X} \right\|_{X_i} \frac{1}{r} \|x - y\|_X \\ &\leq Z^{(i)}(r) \frac{\|x - y\|_X}{r}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

En posant $y = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| T_s^{(i)}(\bar{x}_s + x) - \bar{x}_s^{(i)} \right\|_{X_i} &\leq \left\| T_s^{(i)}(\bar{x}_s + x) - T_s^{(i)}(\bar{x}_s) \right\|_{X_i} + \left\| T_s^{(i)}(\bar{x}_s) - \bar{x}_s^{(i)} \right\|_{X_i} \\ &\leq Z^{(i)}(r) \frac{\|x\|_X}{r} + Y^{(i)}(r) \\ &\leq Z^{(i)}(r) + Y^{(i)}(r) \\ &< r. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\tilde{T}(B_r(0), s) \subset B_r(0)$ pour tout $s \in [s_0, s_1]$. Soit

$$Z(r) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, d} \{Z^{(i)}(r)\}.$$

Alors pour tout s , (1.15) fournit que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{T}(x, s) - \tilde{T}(y, s) \right\|_X &= \|T_s(\bar{x}_s + x) - T_s(\bar{x}_s + y)\|_X \\ &\leq \frac{Z(r)}{r} \|x - y\|_X. \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'opérateur \tilde{T} est une contraction uniforme de constante $\kappa = \frac{Z(r)}{r} < 1$. \square

Ce théorème, via le Principe de Contraction Uniforme, fournit la solution recherchée à un problème de point fixe. Il sera possible d'appliquer ce théorème au cas de l'équation du pont suspendu, et ce, lors des deux étapes de résolution du problème. En effet, dans les Chapitres 2 et 3 les problèmes à résoudre seront tous deux ramenés à un problème de point fixe qui permettra d'appliquer ce résultat. Il faut maintenant déterminer de quelle manière il est possible de vérifier les hypothèses du théorème. Pour des bornes telles que définies en (1.12) et (1.13) données, il faut désormais déterminer la valeur r qui fera l'affaire. Pour obtenir cette valeur, les polynômes de rayon sont introduits.

Définition 1.4.7. Soient $Y = (Y^{(1)}, \dots, Y^{(d)})$ et $Z = (Z^{(1)}, \dots, Z^{(d)})$ les bornes sur l'opérateur T_s telles que données par (1.12) et (1.13) respectivement. On définit les polynômes de rayon par

$$p^{(j)}(r) \stackrel{\text{def}}{=} Y^{(j)} + Z^{(j)}(r) - r, \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.16)$$

On remarque que les polynômes de rayon dépendent de Y et Z , qui ne sont pas nécessairement uniques. Cependant, pour Y et Z donnés il existe un seul polynôme de rayon. La proposition suivante servira de technique d'application des polynômes de rayon afin d'obtenir le résultat voulu sur l'opérateur T , ce qui est fait en appliquant le Théorème 1.4.6.

Proposition 1.4.8. Pour $p^{(j)}(r)$ donnés par la définition précédente, soit

$$\mathcal{I} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^d \{r > 0 : p^{(j)}(r) < 0\}.$$

On suppose que $\mathcal{I} \neq \emptyset$. Alors \mathcal{I} est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Il est donc possible de poser $\mathcal{I} = (r_{\min}, r_{\max})$. Ainsi, pour tout $r_0 \in (r_{\min}, r_{\max})$, $\tilde{T} : B_{r_0}(0) \times [s_0, s_1] \rightarrow B_{r_0}(0)$ est une contraction uniforme.

Démonstration. Pour tout $r \in \mathcal{I}$ et pour tout $j = 1, \dots, d$, on a que

$$p^{(j)}(r) < 0 \implies Y^{(j)} + Z^{(j)}(r) - r < 0 \implies Y^{(j)} + Z^{(j)}(r) < r,$$

ainsi les hypothèses de (1.4.6) sont satisfaites. On a donc que $\tilde{T} : B_r(\bar{x}) \times [s_0, s_1] \rightarrow B_r(\bar{x})$ est une contraction.

De plus, comme la fonction $p(r)$ considérée est un polynôme, elle est continue. Ainsi, le fait

que \mathcal{I} soit non-vide fournit l'existence d'au moins deux zéros positifs de p . La continuité de chaque $p^{(j)}$ assure que \mathcal{I} sera un intervalle si chaque $p^{(j)}$ ne change pas de signe entre les deux zéros, ce qui n'est pas le cas par définition de \mathcal{I} . Cet intervalle est ouvert puisque ses extrémités sont des zéros d'un des polynômes, ce qui ne respecte pas $p^{(j)}(r) < 0$. \square

Remarque 1.4.9. *Le but étant de trouver des valeurs pour lesquelles un polynôme de rayon est négatif, il faut donc que l'ordonnée à l'origine soit suffisamment petite et que le coefficient devant r du polynôme soit négatif. En effet, comme l'illustre la Figure 1.2, si l'ordonnée à l'origine est trop grande, il peut être impossible de trouver une valeur négative du polynôme avec $r > 0$, même si tous les autres coefficients du polynôme demeurent inchangés. C'est pourquoi les bornes (1.12) et (1.13) doivent être calculées minutieusement.*

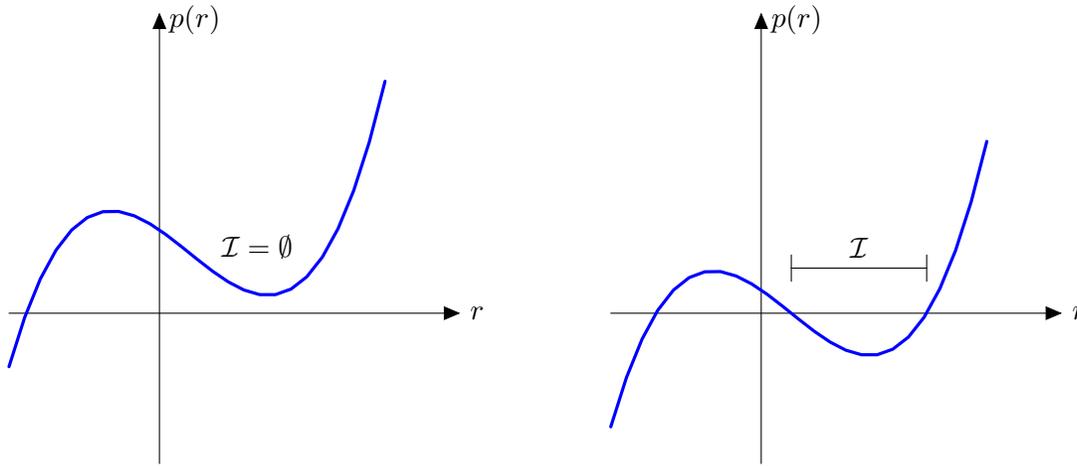


FIGURE 1.2: Polynômes de rayon pour différentes valeurs à l'origine

Ce résultat sera appliqué dans le cas précis du problème du pont suspendu, cependant d'autres applications peuvent être trouvées dans Hungria *et al.* (2015). Le but est maintenant d'utiliser (1.2) pour construire une équation fonctionnelle sous la forme $T : X \rightarrow X$ dont le point fixe est la solution recherchée.

Chapitre 2

La variété stable

Maintenant qu'une méthode de résolution nous permet d'établir l'existence d'une solution exacte dans un voisinage d'une approximation, on utilise la théorie développée au chapitre précédent afin de paramétrer la variété stable de la solution d'équilibre 0 pour l'équation du pont suspendu. Rappelons que pour $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\hat{v} \in \mathbb{R}^n$ un point d'équilibre de $\dot{v} = \Psi(v)$, on suppose que la matrice jacobienne $D\Psi(\hat{v})$ est diagonalisable et hyperbolique. On dénote ses m valeurs propres stables par $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Quitte à modifier leur indexation, on suppose que $Re(\lambda_i) \leq Re(\lambda_j)$ pour $1 \leq i < j \leq m$. Soit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix},$$

la matrice diagonale $m \times m$ contenant les valeurs propres stables et

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

la matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres. On dénote par ξ_1, \dots, ξ_n les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres et $Q = [\xi_1 | \dots | \xi_n]$ la matrice de dimension $n \times n$ les contenant. Ainsi, on a que

$$D\Psi(\hat{v}) = Q\Sigma Q^{-1}.$$

Par la théorie introduite au chapitre précédent, on sait qu'on doit chercher une paramétrisation $P : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant

$$P(0) = \hat{v}, \quad DP(0) = [\xi_1 | \dots | \xi_m],$$

ainsi que l'équation d'invariance

$$\Psi[P(\theta)] = DP(\theta)\Lambda\theta \tag{2.1}$$

pour tout $\theta \in [-\nu, \nu]^m \subset \mathbb{R}^m$. Comme Ψ est supposée analytique, par la théorie développée avec l'espace ℓ_ν^1 , il est naturel de chercher P sous forme de série de puissance

$$P(\theta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \theta^\alpha,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ est un multi-indice de dimension m , on a $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$, $\theta^\alpha = \theta_1^{\alpha_1} \dots \theta_m^{\alpha_m}$ et $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \alpha_1 \dots \partial \alpha_k}$. On remplace l'expansion de P dans (2.1) et on obtient un système d'équations à résoudre en égalant les termes θ de même puissance de chaque côté, en ramenant le tout du même côté on obtient qu'une solution P qui satisfait (2.1) est équivalent à résoudre un problème de la forme $F(a) = 0$, où $a = (a_\alpha)_{|\alpha| \geq 2}$ est la suite contenant les coefficients de P et $F = (F_\alpha)_{|\alpha| \geq 2}$ est la suite de toutes les contraintes F_α , qui sont les équations associées à θ^α .

On débute par résoudre numériquement à l'aide de la méthode de Newton le problème tronqué $(F_\alpha)_{2 \leq |\alpha| < N} = 0$ pour obtenir une approximation de la paramétrisation

$$P^N(\theta) = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \bar{a}_\alpha \theta^\alpha,$$

ensuite on utilise la technique des polynômes de rayon pour obtenir l'existence d'une solution complète et une borne sur l'erreur d'approximation obtenue. Plus précisément, il est possible de conclure qu'il existe une série de puissance de P qui est une solution exacte de (2.1) pour tout $\theta \in [-\nu, \nu]^k$. De plus, le rayon obtenu est une borne sur la norme de la série de puissance $h : [-\nu, \nu]^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, définie par $h = P - P^N$, c'est-à-dire

$$\sup_{\|\theta\|_\infty \leq \nu} \|h(\theta)\| \leq \delta,$$

où

$$\|\theta\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |\theta_i|.$$

Remarque 2.0.10. *Dans le cas étudié, les valeurs propres de $D\Psi(\hat{v})$ sont complexes. Par conséquent, il faut d'abord chercher un développement en série à image dans les complexes*

$$Q(\theta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} b_\alpha \theta^\alpha$$

satisfaisant (2.1) pour tout $\theta \in \mathbb{C}^2$ telle que $\|\theta\|_\infty \leq \nu$ et ensuite obtenir une paramétrisation réelle en considérant (voir Mireles-James et Mischaikow (2013) pour plus de détails)

$$P(\theta) = Q(\theta_1 + i\theta_2, \theta_1 - i\theta_2)$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\theta\|_2 \leq \nu$, où

$$\|\theta\|_2 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}.$$

2.1 Réécriture du problème sous la forme d'un opérateur de point fixe

Remarque 2.1.1. Dans cette section les expansions en séries utilisées sont des séries de Taylor, ainsi $*$ est utilisé pour représenter le produit de Cauchy. Alors que dans le chapitre sur l'étude de la connexion homocline, il sera utilisé avec des séries de Tchebychev, l'opération $*$ représentera alors un produit de convolution.

Rappelons que le système à résoudre dans le cas de l'équation du pont suspendu est donné par

$$\begin{cases} v'_1 = v_2 + v_1 v_2 \\ v'_2 = v_3 \\ v'_3 = v_4 \\ v'_4 = -\beta v_3 - v_1. \end{cases}$$

On pose $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$, $\Psi(v) = \begin{pmatrix} v_2 + v_1 v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ -\beta v_3 - v_1 \end{pmatrix}$ et $v' = \Psi(v)$. Le point $0 = (0, 0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4$ est

un point d'équilibre du système obtenu puisque $\Psi(0) = 0$. On doit étudier la matrice $D\Psi(0)$, cette matrice est donnée par

$$D\Psi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut maintenant obtenir les valeurs propres de cette matrice. On pose $\lambda_r = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\beta}$ et $\lambda_i = \frac{1}{2}\sqrt{2+\beta}$. Il est possible de vérifier que les valeurs propres de $D\Psi(0)$ sont $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2$ et $\bar{\lambda}_2$, où

$$\lambda_1 = \lambda_r + i\lambda_i, \quad \lambda_2 = -\lambda_r + i\lambda_i$$

et $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2$ sont les conjugués complexes de λ_1 et λ_2 respectivement. Pour $i = 1, 2$, $\xi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \end{pmatrix}$

est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_i . De même $\bar{\xi}_i$ est le vecteur propre associé à la valeur propre $\bar{\lambda}_i$. le système d'équations que doit respecter la paramétrisation de la variété stable associée à l'équilibre 0 est maintenant complètement déterminé. En effet, il y a 2 valeurs propres stables λ_1 et $\bar{\lambda}_1$, qui seront dénotées λ et $\bar{\lambda}$ pour simplifier la notation.

La paramétrisation analytique recherchée $Q : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ doit donc satisfaire

$$Q(0) = 0, \quad DQ(0) = \begin{pmatrix} \xi_1 & \bar{\xi}_1 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

ainsi que l'équation d'invariance, qui est donnée explicitement par

$$DQ(z) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} z = \Psi(Q(z)). \quad (2.3)$$

Un tel système à résoudre mène à l'espace défini ci-dessous.

Définition 2.1.2. Soit $a = \{a_\alpha\}_{|\alpha|=0}^\infty$ où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un multi-indice et

$$a_\alpha = (a_\alpha^{(1)}, a_\alpha^{(2)}, a_\alpha^{(3)}, a_\alpha^{(4)}) \in \mathbb{C}^4$$

pour tout α . Pour $i = 1, 2, 3, 4$, on considère

$$\|a^{(i)}\|_{1,\nu} = \sum_{|\alpha|=0}^\infty |a_\alpha^{(i)}| \nu^{|\alpha|}.$$

On notera que $a \in (\ell_\nu^1)^4 = \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1$.

Remarque 2.1.3. Au Chapitre 1 il a été montré qu'il est possible de considérer cet espace dans le cas d'une expansion en série de Taylor d'une fonction analytique. Cependant, pour simplifier la présentation l'espace n'a pas été introduit dans le cadre des multi-indices. Il est toutefois encore possible d'appliquer un tel résultat dans le cadre considéré pour le pont suspendu.

Il est maintenant possible d'affirmer que Q peut être exprimée comme

$$Q(\theta) = \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha \theta^\alpha$$

pour un certain $a \in (\ell_\nu^1)^4$ avec $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ et pour un certain $\nu > 0$. En remplaçant Q par cette expansion, l'équation (2.3) devient

$$\sum_{|\alpha| \geq 2} (\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda}) a_\alpha \theta^\alpha = \sum_{|\alpha| \geq 2} \begin{pmatrix} a_\alpha^{(2)} + (a^{(1)} * a^{(2)})_\alpha \\ a_\alpha^{(3)} \\ a_\alpha^{(4)} \\ -a_\alpha^{(1)} - \beta a_\alpha^{(3)} \end{pmatrix} \theta^\alpha.$$

L'équation ne fait intervenir que les termes tels que $|\alpha| \geq 2$ puisque les termes inférieurs sont déterminés par les contraintes (2.2), qui reviennent à $a_{0,0} = 0$, $a_{1,0} = \xi_1$ et $a_{0,1} = \bar{\xi}_1$. Ainsi,

on définit $F = (F_\alpha)_{|\alpha| \geq 0}$ telle que pour tout $|\alpha| \geq 2$

$$F_\alpha(a) = \begin{cases} a_{0,0}, & \text{si } \alpha = (0, 0) \\ a_{1,0} - \xi_1, & \text{si } \alpha = (1, 0) \\ a_{0,1} - \bar{\xi}_1, & \text{si } \alpha = (0, 1) \\ (\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda}) a_\alpha - \begin{pmatrix} a_\alpha^{(2)} + (a^{(1)} * a^{(2)})_\alpha \\ a_\alpha^{(3)} \\ a_\alpha^{(4)} \\ -a_\alpha^{(1)} - \beta a_\alpha^{(3)} \end{pmatrix}, & \text{si } |\alpha| \geq 2. \end{cases}$$

On remarque que la paramétrisation de la variété stable locale recherchée est la solution de $F(a) = 0$. Les coefficients $a_{0,0}$, $a_{1,0}$ et $a_{0,1}$ sont directement résolubles. On laisse cependant leur résolution dans l'opérateur puisque les vecteurs propres ξ_1 et $\bar{\xi}_1$ dépendent de β , leur présence sera donc essentielle pour obtenir un opérateur uniforme dont la solution est la variété recherchée pour toutes les valeurs de β . On cherche à résoudre ce problème en utilisant la technique des polynômes de rayons, introduite à la dernière section du Chapitre 1. Afin d'obtenir une approximation de la solution exacte, on considère la version tronquée de F , donnée par

$$F^{[N]} = (F_\alpha)_{0 \leq |\alpha| < N}.$$

Cet opérateur est défini pour un vecteur d'inconnus $a^{[N]}$, de même dimension.

Remarque 2.1.4. *La dimension totale de la projection $a^{[N]}$ ne sera pas N . En effet, pour chacune des 4 suites de coefficients, on conserve les multi-indices α tels que $|\alpha| \in [2, N - 1]$. Il y a $n + 1$ multi-indices qui satisfont $|\alpha| = n$, l'ensemble $|\alpha| \in [0, N - 1]$ contient donc $\frac{N(N+1)}{2}$ termes. Ainsi, la dimension totale du problème pour $N = 30$, par exemple, sera de $4 \cdot \frac{30 \cdot 31}{2} = 1860$. Parmi cette liste, les coefficients $a_{0,0}$, $a_{0,1}$ et $a_{1,0}$ ne sont pas inconnus, il y a donc 12 termes fixes et 1848 inconnus. On considère cependant $F^{[N]} : \mathbb{C}^{1860} \rightarrow \mathbb{C}^{1860}$, qui détermine le système à résoudre numériquement pour obtenir l'approximation de a .*

On remarque que l'opérateur F varie en fonction de β de par les valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$, les vecteurs propres ξ_1 et $\bar{\xi}_1$ ainsi que la présence du paramètre directement dans la quatrième composante. Cette valeur sera considérée comme un paramètre et le but est de trouver une solution pour chacune de ces valeurs.

Soient $\beta_0 < \beta_1$, F_0 et F_1 les opérateurs F associés à chacune des valeurs de β , \bar{a}_0 et \bar{a}_1 des approximations des zéros de F_0 et F_1 obtenues numériquement en considérant l'opérateur tronqué. Pour tout $s \in [0, 1]$, il faut obtenir une approximation de l'opérateur donné par

$$\beta_s = \beta_0 + s(\beta_1 - \beta_0) = \beta_0 + s\Delta\beta, \quad (2.4)$$

et

$$F_s = F \quad \text{pour } \beta = \beta_s.$$

Comme il est seulement possible d'obtenir une approximation pour une valeur fixe de β , on calcule une approximation aux deux extrémités et l'approximation sur l'intérieur de l'intervalle sera une interpolation linéaire de ces deux solutions. C'est-à-dire que pour tout $s \in [0, 1]$, on définit

$$\bar{a}_s = \bar{a}_0 + s(\bar{a}_1 - \bar{a}_0) = \bar{a}_0 + s\Delta\bar{a}.$$

On considère l'opérateur de Newton

$$T_s = I - AF_s,$$

où A est défini plus bas. On considère

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} DF_0^{[N]}(\bar{a}_0) & & 0 & & \\ & A_N & & & \\ & 0 & & A_{N+1} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

qui fournit une approximation de $DF_0(\bar{a}_0)$, où pour tout $k \geq N$, A_k est un bloc de dimension $4(k+1)$ par $4(k+1)$. Ce bloc est une matrice diagonale définie par

$$A_k = \begin{pmatrix} k\lambda I_4 & & & 0 & & \\ & ((k-1)\lambda + \bar{\lambda})I_4 & & & & \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & & k\bar{\lambda}I_4 \end{pmatrix},$$

où I_4 est la matrice identité de dimension 4 et λ est la valeur propre stable associée à $\beta = \beta_0$. Cette définition est due au fait que pour simplifier les approximations on ne conserve que le terme dominant sur la diagonale. Dans le cas de l'opérateur F que l'on considère, le terme dominant est donné par $(\alpha_1\lambda + \alpha_2\bar{\lambda})a_\alpha$. Le bloc est défini de telle sorte étant donné que les multi-indices α tels que $|\alpha| = k$ seront considérés dans l'ordre $\{(k, 0), (k-1, 1), \dots, (1, k-1), (0, k)\}$. De plus, comme F_α appartient à \mathbb{R}^4 , on a que $D_\alpha F_\alpha$ sera de dimension 4×4 . Or, on s'intéresse seulement au terme de la diagonale, c'est pourquoi la définition de chaque bloc A_k fait intervenir la matrice identité de dimension 4×4 pour chacune des valeurs de α .

Ensuite, on utilise J une approximation numérique de $(DF_0^{[N]}(\bar{a}_0))^{-1}$ et $J_k = A_k^{-1}$, les inverses exacts, afin de définir A , une approximation de l'inverse de A^\dagger , par

$$A = \begin{pmatrix} J & & 0 & & \\ & J_N & & & \\ 0 & & & J_{N+1} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

On remarque que A est de la même forme que l'opérateur donné dans le Corollaire 1.4.2. La norme utilisée sera celle sur ℓ_ν^1 dans une version adaptée au cas des multi-indices, qui a été introduite à la Définition 2.1.2.

On remarque que le but est d'obtenir un point fixe de l'opérateur T_s pour tout $s \in [0, 1]$. Il faut désormais obtenir des bornes (1.12) et (1.13) qui seront valables pour tout s et l'utilisation du principe de contraction uniforme fournira une solution pour toutes les valeurs de s dans l'intervalle $[0, 1]$. C'est-à-dire une solution pour toutes les valeurs β dans l'intervalle $[\beta_0, \beta_1]$. Montrons d'abord que $T : (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow (\ell_\nu^1)^4$, qui est un élément crucial à la réussite de la preuve.

Proposition 2.1.5. *Soient β_0 et β_1 tels que $\beta_0 < \beta_1$. On considère A tel que définit précédemment et l'opérateur $T_s(a) = a - AF_s(a)$, alors $T_s : (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow (\ell_\nu^1)^4$ pour tout $s \in [0, 1]$.*

Démonstration. La preuve sera faite dans le cas de la première composante, les 3 autres cas sont similaires. Soit $a \in (\ell_\nu^1)^4$, alors

$$\begin{aligned} \|(T(a))^{(1)}\|_\nu &= \sum_{|\alpha| \geq 0} \left| (a - AF_s(a))_\alpha^{(1)} \right| \nu^{|\alpha|} \\ &\leq \sum_{|\alpha| \geq 0} \left(\left| a_\alpha^{(1)} \right| \nu^{|\alpha|} + \left| (AF_s(a))_\alpha^{(1)} \right| \nu^{|\alpha|} \right) \\ &= \left\| a^{(1)} \right\|_{1, \nu} + \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \left| (DF_s^{[N]}(a))_\alpha^{(1)} \right| \nu^{|\alpha|} + \sum_{|\alpha| \geq N} \left| (M_\alpha F_s(a))_\alpha^{(1)} \right| \nu^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme étant une somme finie, il sera fini. Il suffit donc de montrer que le dernier terme est fini et le résultat suivra. Remarquons d'abord qu'il est possible de choisir N tel que $|\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda}| \geq 1$. En effet, pour $|\alpha| \geq N$, on a que

$$\begin{aligned} |\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda}|^2 &= |(\alpha_1 + \alpha_2) \lambda_r + \mathbf{i}(\alpha_1 - \alpha_2) \lambda_i|^2 \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \lambda_r^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \lambda_i^2 \\ &\geq (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \lambda_r^2 \\ &\geq N^2 \cdot \frac{2 - \beta}{4}. \end{aligned}$$

Or, on considère $\beta \in [0.5, 1.9]$, la condition $|\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda}| \geq 1$ est donc satisfaite si

$$N^2 \cdot \frac{2 - \beta}{4} \geq 1.$$

Après quelques manipulations élémentaires, on constate que n'importe quel $N > 6$ fait l'affaire.

Ainsi, pour un tel choix de N , le dernier terme peut être borné comme suit

$$\begin{aligned}
& \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \left| \frac{(\alpha_1 \lambda_s + \alpha_2 \bar{\lambda}_s) a_\alpha - a_\alpha^{(2)} + (a^{(1)} * a^{(2)})_\alpha}{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda})} \right| \nu^{|\alpha|} \\
& \leq \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \left(\left| \frac{(\alpha_1 \lambda_s + \alpha_2 \bar{\lambda}_s) a_\alpha}{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda})} \right| + \left| -a_\alpha^{(2)} \right| + \left| (a^{(1)} * a^{(2)})_\alpha \right| \right) \nu^{|\alpha|} \\
& \leq \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \left| \frac{(\alpha_1 \lambda_s + \alpha_2 \bar{\lambda}_s) a_\alpha}{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda})} \right| \nu^{|\alpha|} + \sum_{|\alpha| \geq 0} \left| a_\alpha^{(2)} \right| \nu^{|\alpha|} + \sum_{|\alpha| \geq 0} \left| (a^{(1)} * a^{(2)})_\alpha \right| \nu^{|\alpha|} \\
& = \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \left| \frac{(\alpha_1 \lambda_s + \alpha_2 \bar{\lambda}_s) a_\alpha}{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda})} \right| \nu^{|\alpha|} + \|a^{(1)}\|_\nu + \|a^{(1)} * a^{(2)}\|_\nu.
\end{aligned}$$

Les deux dernier termes sont finis puisque $a \in (\ell_\nu^1)^4$ et que cet espace est une algèbre de Banach sous le produit de Cauchy. Pour le premier terme, rappelons que β_s est donné par (2.4). On dénote $\lambda_r^s \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re}(\lambda_s) = \frac{-\sqrt{2-\beta_s}}{2}$ et $\lambda_i^s \stackrel{\text{def}}{=} \text{Imag}(\lambda_s) = \frac{\sqrt{2+\beta_s}}{2}$. Ainsi, on obtient que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(\alpha_1 \lambda_s + \alpha_2 \bar{\lambda}_s)}{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda})} \right|^2 &= \left| \frac{\alpha_1 (\lambda_r^s + \mathbf{i} \lambda_i^s) + \alpha_2 (\lambda_r^s - \mathbf{i} \lambda_i^s)}{\alpha_1 (\lambda_r + \mathbf{i} \lambda_i) + \alpha_2 (\lambda_r - \mathbf{i} \lambda_i)} \right|^2 = \frac{|(\alpha_1 + \alpha_2) \lambda_r^s + \mathbf{i}(\alpha_1 - \alpha_2) \lambda_i^s|^2}{|(\alpha_1 + \alpha_2) \lambda_r + \mathbf{i}(\alpha_1 - \alpha_2) \lambda_i|^2} \\
&= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (2 - \beta_s) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2 + \beta_s)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (2 - \beta_0) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2 + \beta_0)} \\
&\leq \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (2 - \beta_0) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2 + \beta_1)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (2 - \beta_0) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2 + \beta_0)} \\
&= 1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\beta_1 - \beta_0)}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (2 - \beta_0) + (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2 + \beta_0)} \\
&\leq 1 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\beta_1 - \beta_0)}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (2 + \beta_0)} = 1 + \frac{(\beta_1 - \beta_0)}{(2 + \beta_0)} \leq 2.
\end{aligned}$$

Pour la dernière inégalité, on utilise le fait que $\beta_0, \beta_1 \in [0, 2]$. On a donc que

$$\sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \left| \frac{(\alpha_1 \lambda_s + \alpha_2 \bar{\lambda}_s) a_\alpha^{(1)}}{(\alpha_1 \lambda + \alpha_2 \bar{\lambda})} \right| \nu^{|\alpha|} \leq \sqrt{2} \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \left| a_\alpha^{(1)} \right| \nu^{|\alpha|} \leq \sqrt{2} \|a^{(1)}\|_{1,\nu} < \infty,$$

encore une fois en utilisant le fait que $a \in (\ell_\nu^1)^4$. On a donc que $\|(T(a))^{(1)}\|_{1,\nu} < \infty$, la même démarche peut être reproduite pour les dimensions restantes de $T(a)$, on a alors que $T(a) \in (\ell_\nu^1)^4$. Comme $a \in (\ell_\nu^1)^4$ a été choisi arbitrairement, on a bel et bien que $T_s : (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow (\ell_\nu^1)^4$ pour tout $s \in [0, 1]$. \square

2.2 Développement des bornes pour l'obtention des polynômes de rayon

Il faut désormais développer les bornes (1.12) et (1.13). Plus précisément, il faut déterminer $Y^{(i)}$ et $Z^{(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq 4$ et $s \in [0, 1]$. Pour les sections suivantes, on considèrera

un intervalle quelconque $[\beta_0, \beta_1]$ et les bornes seront déterminées sous l'hypothèse que les approximations \bar{a}_0 et \bar{a}_1 ont été obtenues aux deux extrémités et sont des projections de même dimensions. Rappelons que \bar{a}_s représente l'approximation pour $\beta_s \in [\beta_0, \beta_1]$ et est donnée par $\bar{a}_s = \bar{a}_0 + s(\bar{a}_1 - \bar{a}_0)$. Dans le but d'obtenir une borne uniforme, il faudra obtenir une borne contenant seulement \bar{a}_0 et \bar{a}_1 . C'est-à-dire qu'il faut obtenir des bornes indépendantes de s .

Remarque 2.2.1. *Bien que \bar{a}_0 et \bar{a}_1 soient des variables complexes, il est important de constater que cette notation ne représente pas la conjugaison complexe.*

2.2.1 La borne Y

Rappelons que $T_s : (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow (\ell_\nu^1)^4$, il faut donc définir une borne Y de dimension 4 majorant chacune des valeurs $\| (T_s(\bar{a}_s) - \bar{a}_s)^{(i)} \|_{1,\nu}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Plus précisément, pour $i = 1, 2, 3, 4$, on doit avoir

$$\left\| (T_s(\bar{a}_s) - \bar{a}_s)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq Y^{(i)}.$$

On pose $\Delta\bar{a} = \bar{a}_1 - \bar{a}_0$ et $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_0$. Dans plusieurs cas il faudra considérer la valeur absolue composantes par composantes d'une matrice, dans le but d'alléger la notation on considèrera la définition suivante.

Définition 2.2.2. *Soit A un opérateur sous forme de matrice carrée de dimension infinie (avec $A : (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow (\ell_\nu^1)^4$) ou finie (avec $A : \mathbb{C}^M \rightarrow \mathbb{C}^M$ pour un certain M). On dénotera par $|A|$ l'opérateur obtenue en prenant la valeur absolue de chacune des entrées de A . De même, pour $a \in (\ell_\nu^1)^4$, on notera par $|F(a)|$ la valeur absolue de chacune des composantes de $F(a) \in (\ell_\nu^1)^4$.*

En faisant un développement de F_s en $s = 0$, pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $|\alpha| \geq 0$, on obtient que

$$\begin{aligned} \left| (T_s(\bar{a}_s) - \bar{a}_s)_\alpha^{(i)} \right| &= \left| (AF_s(\bar{a}_s))_\alpha^{(i)} \right| \\ &\leq \left(|A| \left(|F_0(\bar{a}_0 + s\Delta\bar{a})| + \max_{\eta \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right| \right) \right)_\alpha^{(i)} \\ &\leq \left(|A| \left(|F_0(\bar{a}_0)| + s |DF_0(\bar{a}_0)\Delta\bar{a}| + \frac{s^2}{2} |D^2F_0(\bar{a}_0)(\Delta\bar{a})^2| + \max_{\eta \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right| \right) \right)_\alpha^{(i)}. \end{aligned}$$

On s'attarde d'abord au terme $\max_{\eta \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right|$, dans les cas $|\alpha| \leq 1$ on peut facilement

trouver que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right)_{(0,0)} &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right)_{(1,0)} &= -\Delta\beta \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} (\beta_0 + \eta\Delta\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\lambda_n \\ 3\lambda_n^2 \end{pmatrix} \text{ et} \\ \left(\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right)_{(0,1)} &= \overline{\left(\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right)_{(1,0)}}. \end{aligned}$$

Pour les cas tels que $|\alpha| \geq 2$, on trouve que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right)_\alpha = \Delta\beta \left(\left(\alpha_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} (\beta_0 + \eta\Delta\beta) + \alpha_2 \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \beta} (\beta_0 + \eta\Delta\beta) \right) \bar{a}_s + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\bar{a}_s)_\alpha^{(3)} \end{pmatrix} \right).$$

On s'intéresse au comportement de $\left| \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} (\beta) \right|$, terme qui apparaîtra lorsque l'on tentera de borner $\left| \left(\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s) \right)_\alpha \right|$. Pour β une valeur quelconque du paramètre, on a que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} (\beta) \right| &= \left| \frac{1}{4\sqrt{2-\beta}} + \mathbf{i} \frac{1}{4\sqrt{2+\beta}} \right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{16(2-\beta)} + \frac{1}{16(2+\beta)}} \\ &= \sqrt{\frac{4}{16(2-\beta)(2+\beta)}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{(2-\beta)(2+\beta)}}. \end{aligned}$$

Comme cette fonction est croissante sur l'intervalle qui nous intéresse $[\beta_0, \beta_1] \subset [0, 2]$, on évalue ce terme en $\beta = \beta_1$ pour obtenir une borne supérieure. Il en est de même pour $\left| \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \beta} (\beta) \right|$ puisque la conjugaison complexe préserve la norme. On a alors

$$\begin{aligned} \left| \alpha_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \beta} (\beta_0 + \eta\Delta\beta) + \alpha_2 \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \beta} (\beta_0 + \eta\Delta\beta) \right| &\leq \frac{|\alpha_1|}{2\sqrt{(2-\beta_1)(2+\beta_1)}} + \frac{|\alpha_2|}{2\sqrt{(2-\beta_1)(2+\beta_1)}} \\ &= \frac{|\alpha|}{2\sqrt{(2-\beta_1)(2+\beta_1)}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, la borne précédente ainsi que le fait que $\Delta\beta > 0$, pour $|\alpha| \geq 2$ on obtient la borne désirée. Les bornes pour toutes les valeurs du multi-indice

sont rassemblées dans G_α , donné par

$$G_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = (0, 0) \\ \frac{\Delta\beta}{2\sqrt{(2-\beta_1)(2+\beta_1)}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, & \text{si } |\alpha| = 1 \\ \Delta\beta \left(\frac{|\alpha| \cdot (|\bar{a}_0|_\alpha + |\Delta\bar{a}|_\alpha)}{2\sqrt{(2-\beta_1)(2+\beta_1)}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ |\bar{a}_0|_\alpha^{(3)} + |\Delta\bar{a}|_\alpha^{(3)} \end{pmatrix} \right), & \text{si } |\alpha| \geq 2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Comme on utilise une approximation en dimension finie, on a que $(\bar{a}_s)_\alpha = 0$ pour $|\alpha| \geq N$. La fonction F_s étant quadratique, on a que $(F_s(\bar{a}_s))_\alpha = 0$ pour $|\alpha| \geq 2N - 1$. Ainsi, si on définit \tilde{F} tel que $|\alpha| < 2N - 1$

$$\tilde{F}_\alpha = |F_0(\bar{a}_0)|_\alpha + |DF_0(\bar{a}_0)\Delta\bar{a}|_\alpha + \begin{pmatrix} |\Delta\bar{a}^{(1)} * \Delta\bar{a}^{(2)}|_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + G_\alpha$$

et $\tilde{F}_\alpha = 0$ pour $|\alpha| \geq 2N - 1$, il est possible de poser

$$Y^{(i)} = \left\| (|A|\tilde{F})^{(i)} \right\|_{1,\nu}.$$

Et on a par définition, pour $1 \leq i \leq 4$ et pour tout $s \in [0, 1]$, que

$$\left\| (T_s(\bar{a}_s) - \bar{a}_s)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq Y^{(i)}.$$

Ce qui est la borne voulue. On remarque que cette borne peut être entièrement calculée numériquement à l'aide des deux approximations numériques. De plus, s est absent de la borne, tel que voulu, afin d'appliquer le principe de contraction uniforme.

2.2.2 La borne Z

Pour cette section, $B(r)$ dénote la boule fermée de rayon r centrée en 0 dans l'espace $(\ell_\nu^1)^4$, c'est-à-dire que $B(r) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in (\ell_\nu^1)^4 : \|x^{(i)}\|_{1,\nu} \leq r, \forall i = 1, 2, 3, 4\}$. Rappelons qu'il faut obtenir une borne sur la quantité

$$\sup_{b,c \in B(r)} \|DT_s(\bar{x}_s + b)c\|_X.$$

Comme pour la borne Y , il faut définir une borne $Z(r)$ sur chacune des dimensions de T , c'est-à-dire que pour $i = 1, 2, 3, 4$ on doit avoir

$$\sup_{b,c \in B(r)} \left\| (DT_s(\bar{x}_s + b)c)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq Z^{(i)}(r).$$

Soit $b, c \in B(r)$ quelconques, on cherche à obtenir une borne indépendante de ces points, ce qui fait en sorte que ce sera une borne sur le suprémum. On développe $DT_s(\bar{a}_s + b)c$ en 3 termes qui seront plus faciles à borner

$$\begin{aligned} DT_s(\bar{a}_s + b)c &= c - ADF_s(\bar{a}_s + b)c \\ &= (I - AA^\dagger)c - A(DF_s(\bar{a}_s + b) - A^\dagger)c \\ &= (I - AA^\dagger)c - A(DF_s(\bar{a}_s) - A^\dagger)c - AD^2F_s(\bar{a}_s)(b, c). \end{aligned}$$

On cherche maintenant à obtenir une borne polynomiale en r sur ce terme. On constatera qu'il est possible de déterminer $Z_j = (Z_j^{(1)}, Z_j^{(2)}, Z_j^{(3)}, Z_j^{(4)})$ pour $j = 0, 1, 2$ et telles que pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, on a que

$$\sup_{b, c \in B(r)} \|(DT_s(\bar{a}_s + b)c)^{(i)}\|_{1, \nu} \leq (Z_0^{(i)} + Z_1^{(i)})r + Z_2^{(i)}r^2$$

Les bornes Z_0, Z_1 et Z_2 sont calculées dans les sous-sections correspondantes.

La borne Z_0

Par définition de A et A^\dagger , il est possible d'obtenir

$$I - AA^\dagger = \begin{pmatrix} I_{4 \frac{N(N+1)}{2}} - J(DF_0^{[N]}(\bar{a}_0)) & 0 & & \\ & 0 & 0 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

On dénote $B = I_{4 \frac{N(N+1)}{2}} - J(DF_0^{[N]}(\bar{a}_0))$, qui peut entièrement être calculé numériquement. On remarque que l'opérateur $I - AA^\dagger$ est de la même forme que celui traité au Corollaire 1.4.2. Il faut cependant adapter la notation au cas des multi-indices, ce qui est fait dans le lemme suivant. La preuve est la même que pour le Corollaire 1.4.2 mais avec des multi-indices donc elle ne sera pas refaite.

Lemme 2.2.3. *Soit un opérateur linéaire $A : \ell_\nu^1 \rightarrow \ell_\nu^1$ de la forme*

$$A = \begin{bmatrix} A_N & & 0 & & \\ & C_N & & & \\ & & C_{N+1} & & \\ & 0 & & \ddots & \end{bmatrix}$$

avec $A_N = [a_{\alpha, \gamma}]_{|\alpha|, |\gamma|=0, \dots, N-1} \in M_{\frac{N(N+1)}{2}}(\mathbb{C})$ et $C_\alpha \in \mathbb{C}$ pour tout α . S'il existe une constante C telle que $|C_\alpha| \leq C$ pour tout $|\alpha| \geq \tilde{N}$, alors

$$\|A\|_{B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)} \leq \max(K, C)$$

$$\text{avec } K \stackrel{\text{def}}{=} \max_{0 \leq |\gamma| < N} \frac{1}{\nu^{|\gamma|}} \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} |a_{\alpha, \gamma}| \nu^{|\alpha|}.$$

On considère l'opérateur B comme un opérateur 4×4 . Chaque blocs est défini en considérant seulement les lignes de B correspondant à $a^{(i)}$ et les colonnes correspondant à $a^{(j)}$. On obtient ainsi $B^{(i,j)}$ pour $1 \leq i, j \leq 4$, pour $c \in (\ell_\nu^1)^4$ quelconque ces sous bloc constituent l'effet de l'opérateur sur la composante j de c lorsque l'on étudie $(Bc)^{(i)} \in \ell_\nu^1$.

Remarque 2.2.4. *L'opérateur est vu séparément comme suit*

$$B = \begin{bmatrix} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} & B^{(1,3)} & B^{(1,4)} \\ B^{(2,1)} & B^{(2,2)} & B^{(2,3)} & B^{(2,4)} \\ B^{(3,1)} & B^{(3,2)} & B^{(3,3)} & B^{(3,4)} \\ B^{(4,1)} & B^{(4,2)} & B^{(4,3)} & B^{(4,4)} \end{bmatrix}.$$

Et son action est telle que

- $B^{(i,j)} \in B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)$, pour tout i, j ,
- pour $c \in (\ell_\nu^1)^4$, on a que $(Bc)^{(i)} = \sum_{j=1}^4 B^{(i,j)} c^{(j)}$.

Ainsi, pour chacune des parties de B , on définit la constante $K_B^{(i,j)}$ telle que donnée par le Lemme 2.2.3, qui sera une borne sur la norme de chacun des $B^{(i,j)}$, et ce, pour tout $1 \leq i, j \leq 4$. Par conséquent, on peut définir

$$Z_0^{(i)} = \sum_{j=1}^4 K_B^{(i,j)},$$

ce qui fournit une borne, pour $1 \leq i \leq 4$, telle que

$$\left\| \left((I - AA^\dagger) c \right)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq Z_0^{(i)} r. \quad (2.6)$$

Ce qui est la borne voulue.

La borne Z_1

Quant au deuxième terme, on utilise à nouveau la dépendance en s afin d'obtenir une expansion du terme. Pour $i = 1, 2, 3, 4$, on trouve que

$$\begin{aligned} \left\| \left(A \left(DF_s(\bar{a}_s) - A^\dagger \right) c \right)^{(i)} \right\|_{1,\nu} &\leq \left\| \left(A \left(DF_0(\bar{a}_s) - A^\dagger \right) c \right)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \\ &\quad + \left(|A| \max_{\eta \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} DF_\eta(\bar{a}_s) c \right| \right)^{(i)} \\ &\leq \left\| \left(A \left(DF_0(\bar{a}_0) - A^\dagger \right) c \right)^{(i)} \right\|_{1,\nu} + s \left\| \left(AD^2 F_0(\bar{a}_0) (\Delta \bar{a}_0, c) \right)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \\ &\quad + \left(|A| \max_{\eta \in [0,1]} \left| \frac{\partial}{\partial \eta} DF_\eta(\bar{a}_s) c \right| \right)^{(i)}. \end{aligned}$$

Pour ce qui est de la première partie. Comme on a que

$$DF_0^{[N]}(\bar{a}_0)c^{[N]} = (DF_0(\bar{a}_0)c)^{[N]},$$

et que ceci coïncide avec la partie finie de la définition de A^\dagger , on obtient que

$$\left((DF_0(\bar{a}_0) - A^\dagger) c \right)^{[N]} = 0.$$

La partie restante, c'est-à-dire pour $|\alpha| \geq N$, est donnée par

$$d_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left((DF_0(\bar{a}) - A^\dagger) c \right)_\alpha = \begin{pmatrix} c_\alpha^{(2)} + (\bar{a}_0^{(1)} * c^{(2)})_\alpha + (\bar{a}_0^{(2)} * c^{(1)})_\alpha \\ c_\alpha^{(3)} \\ c_\alpha^{(4)} \\ -c_\alpha^{(1)} - \beta_0 c_\alpha^{(3)} \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que $\|c^{(i)}\|_{1,\nu} \leq r$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ et le fait que ℓ_ν^1 est une algèbre de Banach sous le produit de Cauchy, on obtient que

$$\begin{aligned} \|d_\alpha^{(1)}\|_{1,\nu} &\leq \left(1 + \|\bar{a}_0^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\bar{a}_0^{(2)}\|_{1,\nu} \right) r, \\ \|d_\alpha^{(2)}\|_{1,\nu} &\leq r, \\ \|d_\alpha^{(3)}\|_{1,\nu} &\leq r \quad \text{et} \\ \|d_\alpha^{(4)}\|_{1,\nu} &\leq (1 + \beta_0) r. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau (1.4.2) et le fait que tous les termes différents de zéro sont tels que $|\alpha| \geq N$, on trouve que

$$\|(Ad)^{(i)}\|_{1,\nu} \leq \frac{1}{N|\lambda_r|} \|d^{(i)}\|_{1,\nu},$$

où λ_r est la valeur propre associée à $\beta = \beta_0$, ce qui borne le premier terme. Quant au second, il est possible de vérifier que

$$(D^2F_0)_\alpha(\bar{a}_0)(\Delta\bar{a}_0, c) = \begin{pmatrix} (\Delta\bar{a}_0^{(1)} * c^{(2)})_\alpha + (\Delta\bar{a}_0^{(2)} * c^{(1)})_\alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le terme $\|AD^2F_0(\bar{a}_0)(\Delta\bar{a}_0, c)\|_{1,\nu}$, sera borné en utilisant à nouveau le Corollaire 1.4.2.

Finalement, le dernier terme peut être borné de la même manière que $\frac{\partial}{\partial \eta} F_\eta(\bar{a}_s)$ dans la section sur la borne Y . En utilisant à nouveau la borne G_α , définie en (2.5), on constate qu'il faut borner $\|(Gc)^{(i)}\|_{1,\nu}$ pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$. Pour ce faire, il sera nécessaire de modifier légèrement le Corollaire 1.4.2. Le résultat voulu est donné par le lemme suivant.

Lemme 2.2.5. Soit d une suite telle que pour tout α , on a $d_\alpha = |\alpha|c_\alpha$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq 4$, on a

$$\|(Ad)^{(i)}\|_{1,\nu} \leq \max \left(\sum_{j=1}^4 \tilde{K}_J^{(i,j)}, \frac{1}{|\lambda_r|} \right) r$$

où

$$\tilde{K}_J^{(i,j)} = \max_{|\beta| < N} \left(\frac{|\beta|}{\nu^{|\beta|}} \sum_{|\alpha| < N} |J_{\alpha,\beta}^{(i,j)}| \nu^{|\alpha|} \right).$$

Les 3 termes étant bornés, il est désormais possible de rassembler le tout et d'obtenir les bornes $Z_i^{(1)}(r)$ pour tout $i = 1, 2, 3, 4$. On a

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= \frac{1 + \|\bar{a}_0^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\bar{a}_0^{(2)}\|_{1,\nu}}{N|\lambda_r|} + \max \left(K_J^{(1,1)}, \frac{1}{N|\lambda_r|} \right) \left(\|\Delta\bar{a}^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\Delta\bar{a}^{(2)}\|_{1,\nu} \right) \\ &\quad + \Delta\beta \left(\bar{K}_1 + K_J^{(1,4)} \right), \\ Z_1^{(2)} &= \frac{1}{N|\lambda_r|} + K_J^{(2,1)} \left(\|\Delta\bar{a}^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\Delta\bar{a}^{(2)}\|_{1,\nu} \right) + \Delta\beta \left(\bar{K}_2 + K_J^{(2,4)} \right), \\ Z_1^{(3)} &= \frac{1}{N|\lambda_r|} + K_J^{(3,1)} \left(\|\Delta\bar{a}^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\Delta\bar{a}^{(2)}\|_{1,\nu} \right) + \Delta\beta \left(\bar{K}_3 + K_J^{(3,4)} \right), \\ Z_1^{(4)} &= \frac{1 + \beta}{N|\lambda_r|} + K_J^{(4,1)} \left(\|\Delta\bar{a}^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\Delta\bar{a}^{(2)}\|_{1,\nu} \right) + \Delta\beta \left(\bar{K}_4 + \max \left(K_J^{(4,4)}, \frac{1}{N|\lambda_r|} \right) \right), \end{aligned}$$

où $\bar{K}_i = \frac{\max \left(\sum_{j=1}^4 \tilde{K}_J^{(i,j)}, \frac{1}{|\lambda_r|} \right)}{2\sqrt{(2-\beta_1)(2+\beta_1)}}$, ainsi $\forall 1 \leq i \leq 4, \forall s \in [0, 1]$ on a

$$\left\| \left(A_0 \left(DF_s(\bar{a}_s) - A_0^\dagger \right) c \right)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq Z_1^{(i)}.$$

Ce qui est la borne voulue.

La borne Z_2

Il faut maintenant borner le troisième et dernier terme. En fait, en développant $D^2F_s(\bar{a}_s)(b, c)$, on constate qu'il n'y a aucune dépendance en s . Ainsi, il n'y a pas de travail additionnel à faire et on peut appliquer immédiatement le Corollaire 1.4.2. De telle sorte qu'en posant

$$\begin{aligned} Z_2^{(1)} &= \max \left(K_J^{(1,1)}, \frac{1}{|\lambda_r|N} \right), \\ Z_2^{(2)} &= K_J^{(2,1)}, \\ Z_2^{(3)} &= K_J^{(3,1)} \quad \text{et} \\ Z_2^{(4)} &= K_J^{(4,1)}, \end{aligned}$$

on obtient une borne valable $\forall 1 \leq i \leq 4$ et $\forall s \in [0, 1]$ satisfaisant

$$\left\| (AD^2F_s(\bar{a}_s)(b, c))^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq Z_2^{(i)} r^2.$$

Ce qui est le résultat voulu. En rassemblant ces termes, on obtient pour tout $i = 1, 2, 3, 4$

$$\left\| (DT_s(\bar{a}_s + b)c)^{(i)} \right\|_{1,\nu} \leq (Z_0^{(i)} + Z_1^{(i)})r + Z_2^{(i)}r^2.$$

Ce qui permet de définir les polynômes de rayon. Dans le but d'utiliser le Théorème 1.4.6, qui fournira l'existence de la solution pour tout s et d'une constante de validation de l'erreur.

2.3 Utilisation du principe de contraction uniforme et dérivées partielles

Soient

$$P^{(i)}(r) \stackrel{\text{def}}{=} Y^{(i)} + (Z_0^{(i)} + Z_1^{(i)} - 1)r + Z_2^{(i)}r^2.$$

les 4 polynômes de rayons associés aux bornes définies dans les sections précédentes. Comme ces polynômes sont définis uniformément pour $s \in [0, 1]$, si on trouve $r > 0$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 4$ $P^{(i)}(r) < 0$, alors la Proposition 1.4.8 fournira une validation de l'existence d'une solution au voisinage de l'approximation numérique \bar{a}_s de la variété stable locale pour $\beta = \beta_s$, pour tout $s \in [0, 1]$.

Plus précisément, on aura, regroupé dans la proposition suivante, les résultats obtenu à l'aide des polynômes de rayon. Résultats qui seront essentiels pour l'obtention de la connexion homocline.

Proposition 2.3.1. *Pour tout $s \in [0, 1]$, on dénote par \bar{Q}_s l'approximation de la paramétrisation de la variété stable locale complexe, obtenue numériquement pour $\beta = \beta_s$ sous la forme*

$$\bar{Q}_s(\theta) = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} (\bar{a}_s)_\alpha \theta^\alpha.$$

Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 4$, $P^{(i)}(r) < 0$, où $P^{(i)}$ sont les polynômes de rayons définis par les bornes obtenues dans les sections précédentes. Alors on a que, pour tout $s \in [0, 1]$, il existe une paramétrisation Q_s de la variété stable locale complexe pour $\beta = \beta_s$, de la forme

$$Q_s(\theta) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (a_s)_\alpha \theta^\alpha,$$

qui est bien définie pour au moins $\theta \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant $\|\theta\|_\infty \leq \nu$. De plus, pour tout $s \in [0, 1]$, le rayon obtenu fournit la borne sur l'erreur. Pour tout $s \in [0, 1]$, soit la fonction de validation h_s telle que

$$h_s(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} Q_s(\theta) - \bar{Q}_s(\theta).$$

On a alors que

$$\|h_s\|_\infty = \sup_{\|\theta\|_\infty \leq \nu} \max_{i=1,2,3,4} |h_s^{(i)}(\theta)| = \sup_{\|\theta\|_\infty \leq \nu} \max_{i=1,2,3,4} |Q_s^{(i)}(\theta) - \overline{Q}_s^{(i)}(\theta)| \leq r.$$

De tels résultats demeurent vrais pour la variété stable réelle exacte et son approximation, définie par $P_s(\theta) = Q_s(\theta_1 + i\theta_2, \theta_1 - i\theta_2)$ et $\overline{P}_s(\theta) = \overline{Q}_s(\theta_1 + i\theta_2, \theta_1 - i\theta_2)$, et ce, au moins pour $\theta \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant $\sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2} \leq \nu$.

Démonstration. La Proposition 1.4.8 fournit que, pour tout $s \in [0, 1]$, il existe une unique solution \tilde{a} au problème $F_s = 0$ dans la boule de rayon r autour de \overline{a}_s , la solution approchée obtenue numériquement. Ainsi, par construction Q_s est une paramétrisation de la variété stable locale définie pour $\|\theta\|_\infty \leq \nu$. Pour tout θ dans cet ensemble et pour $i = 1, 2, 3, 4$, on a que

$$\begin{aligned} |Q_s^{(i)}(\theta) - \overline{Q}_s^{(i)}(\theta)| &= \left| \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \left((\tilde{a}_s^{(i)})_\alpha - (\overline{a}_s^{(i)})_\alpha \right) \theta^\alpha \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \left| (\tilde{a}_s^{(i)})_\alpha - (\overline{a}_s^{(i)})_\alpha \right| \nu^{|\alpha|} \\ &= \left\| \tilde{a}_s^{(i)} - \overline{a}_s^{(i)} \right\|_{l_\nu^1} \\ &\leq r. \end{aligned}$$

On remarque aussi que pour toute évaluation de P_s , la variété stable locale réelle, dans l'ensemble $\|\theta\|_2 \leq \nu$. Il suffit d'utiliser le fait que

$$P_s(\theta) = Q_s(\theta_1 + i\theta_2, \theta_1 - i\theta_2)$$

et d'utiliser la même suite d'inégalités afin de vérifier que le même résultat tient pour la variété réelle. \square

Grâce à ce résultat, il est possible d'introduire l'approximation et de se débarrasser de la paramétrisation complète, qui reste inconnue. Une telle manœuvre fera survenir les dérivées partielles de la fonction de validation. Il sera donc nécessaire d'obtenir des bornes sur les dérivées partielles de h_s , celles-ci sont obtenues grâce à la théorie des fonction analytiques, le lemme suivant fournit ces bornes. Qui seront utiles lors du calcul de la borne Z dans le cas de la connexion homocline. Une preuve de ce lemme peut être trouvée dans Mireles-James et Mischaikow (2013). Remarquons que h_s est analytique pour tout s puisqu'elle est définie en utilisant deux fonctions analytiques.

Lemme 2.3.2. Soit $\hat{h} : D_{\infty, \nu}(\mathbb{C}^2) \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$ une fonction analytique, avec

$$D_{\infty, \nu}(\mathbb{C}^2) = \{\theta \in \mathbb{C}^2, \|\theta\|_\infty \leq \nu\},$$

et telle que

$$\max_{\theta \in D_{\infty, \nu}(\mathbb{C}^2)} \left| \hat{h}(\theta) \right|_{\infty} \leq \delta.$$

On considère $h : D_{2, \nu}(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $h_s(\theta) = \hat{h}_s(\theta_1 + i\theta_2, \theta_1 - i\theta_2)$, avec

$$D_{2, \nu}(\mathbb{R}^2) = \{\theta \in \mathbb{R}^2, |\theta|_2 \leq \nu\}.$$

Alors pour tout $\rho < \nu$, on a que

$$\max_{\theta \in D_{2, \rho}(\mathbb{R}^2)} \left| \frac{\partial h^{(i)}}{\partial \theta_j}(\theta) \right|_{\infty} \leq \frac{4\pi}{\nu \ln\left(\frac{\nu}{\rho}\right)} \delta, \quad \forall i = 1, \dots, 4, \quad \forall j = 1, 2.$$

Dans le chapitre suivant, on utilise ces paramétrisations validées ainsi que la borne sur les dérivées de la fonction de validation afin de prouver l'existence de connexions homoclines à zéro pour l'équation du pont suspendu, et ce, pour toutes les valeurs du paramètre β dans l'intervalle $[0.5, 1.9]$.

Chapitre 3

La connexion homocline

3.1 Réécriture du problème

Le but de cette section est d'obtenir une preuve de l'existence d'une connexion homocline à 0 pour l'équation du pont suspendu. Pour ce faire, on va utiliser le système

$$\begin{pmatrix} \dot{v}^{(1)} \\ \dot{v}^{(2)} \\ \dot{v}^{(3)} \\ \dot{v}^{(4)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^{(2)} + v^{(1)}v^{(2)} \\ v^{(3)} \\ v^{(4)} \\ -v^{(1)} - \beta v^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

ainsi que la paramétrisation de la variété stable locale pour construire un opérateur dont la solution recherchée sera un zéro. On construit d'abord un problème aux conditions limites que la connexion devra satisfaire. On utilise ensuite une expansion en série de Tchebychev pour déterminer la fonction sur l'intervalle de définition du problème. Soit $P(\theta)$ la paramétrisation exacte de la variété stable locale réelle pour une valeur fixée de β ainsi que son approximation en dimension finie donnée par

$$P^N(\theta) = \sum_{|\alpha| < N} \bar{a}_\alpha (\theta_1 + i\theta_2)^{\alpha_1} (\theta_1 - i\theta_2)^{\alpha_2}$$

où les coefficients \bar{a}_α ont été trouvés numériquement et vérifiés en utilisant la technique du chapitre précédent. Comme cette approximation a été validée sur le sous-ensemble de $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ qui satisfont $\theta_1^2 + \theta_2^2 \leq \nu_s$, où ν_s est la valeur ν utilisée dans la définition des polynômes de rayon du Chapitre 2, il faut porter une attention particulière à la manière d'évaluer P . Afin de s'assurer que la variété soit évaluée à l'intérieur du domaine pour lequel la preuve a été effectuée, on utilisera toujours θ donné par $\theta_1 = \rho \cos \psi$ et $\theta_2 = \rho \sin \psi$ avec $\rho \leq \nu_s$. Alors, il est possible d'obtenir

$$P^N(\theta) = P^N(\psi) = \sum_{|\alpha| < N} \bar{a}_\alpha \rho^{|\alpha|} e^{i\psi(\alpha_1 - \alpha_2)}.$$

L'angle ψ sera un inconnu dans le problème alors que le rayon ρ sera fixé. Une telle contrainte ne causera pas de problème à la résolution. En effet, tel que discuté au Chapitre 1, la paramétrisation satisfait

$$\varphi(P(\theta), t) = P(e^{\Lambda t}\theta) \quad (3.2)$$

pour tout θ et pour tout temps t . Pour une connexion homocline passant par v_0 au temps t_0 et θ fixé on sait qu'il existe un temps $t \geq 0$ tel que

$$\varphi(v_0, t_0 + t) = P(\theta).$$

C'est-à-dire qu'il existe un temps à partir duquel l'orbite est dans l'image de la paramétrisation de la variété stable locale. Comme P satisfait (3.2), on sait que pour tout $\tilde{t} > t$ il existe $\tilde{\theta}$ tel que

$$\varphi(v_0, t_0 + \tilde{t}) = P(\tilde{\theta}).$$

et en utilisant à nouveau (3.2), on obtient que $\|\theta\|_2 > \|\tilde{\theta}\|_2$. Le temps t est donc unique lorsque $\|\theta\|_2 = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2}$ est fixé. Or si $\theta_1 = \rho \cos \psi$ et $\theta_2 = \rho \sin \psi$, alors $\|\theta\|_2 = \rho$. Le problème est donc bien défini. Le lemme suivant sera utile pour la construction de l'opérateur déterminant la partie finie de la connexion.

Lemme 3.1.1. *Soient u_0, u_1 et t_0 fixés. Soit $u(t)$, la solution du problème aux conditions initiales*

$$\begin{cases} u''''(t) + \beta u''(t) + e^{u(t)} - 1 = 0, \\ u(t_0) = u_0, \\ u'(t_0) = 0, \\ u''(t_0) = u_1, \\ u'''(t_0) = 0. \end{cases}$$

Alors $u(-t + 2t_0) = u(t)$ pour tout t .

Démonstration. On considère $w(t) = u(-t + 2t_0)$, on a que w satisfait

$$w''''(t) + \beta w''(t) + e^{w(t)} - 1 = u''''(-t + 2t_0) + \beta u''(-t + 2t_0) + e^{u(-t + 2t_0)} - 1 = 0$$

et

$$\begin{aligned} w(t_0) &= u(t_0) = u_0, \\ w'(t_0) &= u'(t_0) = 0, \\ w''(t_0) &= u''(t_0) = u_1, \\ w'''(t_0) &= u'''(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Donc u et w sont toutes deux solutions du même problème aux conditions initiales. Par unicité de la solution on obtient que $u = w$, donc que $u(t)$ est symétrique. Ce qui est le résultat voulu. \square

Remarquons qu'une fois les changements de variables du Chapitre 1 effectués, les conditions initiales du lemme reviennent à $v^{(2)}(0) = 0$ et $v^{(4)}(0) = 0$. Ainsi, il ne sera pas nécessaire d'approximer la variété instable locale. Seule la variété stable sera nécessaire grâce au Lemme 3.1.1. Comme on cherche une solution qui abouti à l'équilibre, il est naturel de supposer qu'à un certain temps L , la solution sera dans l'image de la paramétrisation de la variété stable locale de cet équilibre, qui a été approximé préalablement. Le comportement de la solution sur $[L, \infty]$ sera fourni par la paramétrisation de la variété stable locale. La solution sera aussi déterminée pour $[-\infty, -L]$, puisqu'on a fait l'hypothèse que la solution recherchée est symétrique. On considère donc le Lemme 3.1.1 dans le cas $t_0 = -L$. Comme l'orbite exacte est inconnue à priori, L sera gardé comme une variable du problème qu'il faudra déterminer. Soit le changement d'échelle de temps qui nous permettra de considérer l'intervalle de temps $[-1, 1]$ plutôt que $[-L, L]$ et ainsi de pouvoir utiliser les polynômes de Tchebychev. Le nouveau système à considérer est

$$\dot{v} = L \begin{pmatrix} \dot{v}^{(1)} \\ \dot{v}^{(2)} \\ \dot{v}^{(3)} \\ \dot{v}^{(4)} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} v^{(2)} + v^{(1)}v^{(2)} \\ v^{(3)} \\ v^{(4)} \\ -v^{(1)} - \beta v^{(3)} \end{pmatrix} =: L\Psi(v). \quad (3.3)$$

En plus de ce système sur $[-1, 1]$, on considère les conditions initiales $v^{(2)}(-1) = v^{(4)}(-1) = 0$, qui proviennent de la condition de symétrie de la Remarque 3.1.1 adaptées au décalage de temps qui envoie $[-L, L]$ sur $[-1, 1]$, et $v(1) = P(\psi)$ pour un certain ψ qui sera à déterminer. En intégrant (3.3) de t à 1, on obtient

$$v(1) - v(t) = L \int_t^1 \Psi(v(s)) ds,$$

ce qui fournit l'opérateur $\mathcal{F}\mathbb{R}^2 \times C[-1, 1]^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times C[-1, 1]^4$, donné par

$$\mathcal{F}(L, \psi, v)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v^{(2)}(-1) \\ v^{(4)}(-1) \\ v(t) + L \int_t^1 \Psi(v(s)) ds - P(\psi) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que P est la paramétrisation exacte de la variété. On a alors que trouver des valeurs $(\tilde{L}, \tilde{\psi}, \tilde{v})$ telles que $\mathcal{F}(\tilde{L}, \tilde{\psi}, \tilde{v}) = 0$ est équivalent à trouver une solution de (3.3) qui sera une connexion homocline à 0. Le système a été posé de tel sorte qu'il est possible de développer chaque dimension de $v = (v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), v^{(3)}(t), v^{(4)}(t))$ avec une série de Tchebychev. D'autant plus qu'il a été démontré au Chapitre 1 que les coefficients seront dans l'espace ℓ_ν^1 pour chaque choix de $\nu > 1$ suffisamment petit. Il est aussi très utile de les utiliser car il est possible d'intégrer exactement une fonction exprimée en fonction des polynômes de Tchebychev grâce à la formule de récurrence suivante.

Lemme 3.1.2. *Pour $k \geq 2$, on a que*

$$\int T_k(t)dt = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{k+1}(t)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(t)}{k-1} \right).$$

Démonstration. En utilisant à nouveau le fait que ce sont des polynômes trigonométriques déguisés, on obtient que

$$\int T_k(t)dt = - \int \cos(k\theta) \cdot \sin(\theta)d\theta.$$

L'identité $\sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta) = 2 \cos(k\theta) \sin(\theta)$ permet de réécrire cette dernière intégrale comme

$$\begin{aligned} - \int \cos(k\theta) \cdot \sin(\theta)d\theta &= \frac{-1}{2} \int \sin((k+1)\theta) - \sin((k-1)\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos((k+1)\theta)}{k+1} - \frac{\cos((k-1)\theta)}{k-1} \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat voulu en réutilisant le changement de variable $t = \cos(\theta)$ qui permet d'utiliser $T_k(t) = \cos(k\theta)$. □

Remarque 3.1.3. *Les cas $T_0(t) = 1$ et $T_1(t) = t$ ne sont pas traités dans le lemme précédent. Il faudra donc les intégrer directement.*

On s'attarde désormais à la réécriture du problème. On considère

$$x = (L, \psi, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) \in \mathbb{R}^2 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1,$$

l'ensemble des variables du problème. Pour $i = 1, 2, 3, 4$, la suite $x^{(i)} \in \ell_\nu^1$ est l'ensemble des coefficients de Tchebychev du membre correspondant de v . C'est-à-dire que $v^{(i)}$ est donné par

$$v^{(i)}(t) = x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t).$$

On remplace $v^{(i)}$ par leur expansion respective dans $\mathcal{F}(L, \psi, v)$, on obtient l'opérateur

$$\tilde{F}(x) = \left(\begin{array}{c} x_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(2)} T_k(-1) \\ x_0^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(4)} T_k(-1) \\ x_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k T_k(t) + L \int_t^1 \Psi \left(x_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k T_k(s) \right) ds - P(\psi) \end{array} \right).$$

Pour simplifier les manipulations qui suivront, on pose

$$c_k = L \begin{pmatrix} x_k^{(2)} + (x^{(1)} * x^{(2)})_k \\ x_k^{(3)} \\ x_k^{(4)} \\ -x_k^{(1)} - \beta x_k^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Le système devient alors

$$\tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} x_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(2)} T_k(-1) \\ x_0^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(4)} T_k(-1) \\ x_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k T_k(t) + \int_t^1 c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k T_k(s) ds - P(\psi) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ \eta^{(2)} \\ \tilde{F}^{(1)} \\ \tilde{F}^{(2)} \\ \tilde{F}^{(3)} \\ \tilde{F}^{(4)} \end{pmatrix}.$$

Dans ce système, chaque $\tilde{F}^{(i)}$ peut être simplifié grâce à la formule d'intégration du Lemme 3.1.2. Il est possible d'obtenir que

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{(i)}(x) &= x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t) + \int_t^1 c_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} T_k(s) ds - P^{(i)}(\psi) \\ &= x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t) + c_0^{(i)}(1-t) + c_1^{(i)}(1-t^2) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} \left(\frac{T_{k-1}(t)}{k-1} - \frac{T_{k+1}(t)}{k+1} - \frac{2}{k^2-1} \right) - P^{(i)}(\psi) \\ &= x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t) + c_0^{(i)}(T_0(t) - T_1(t)) + c_1^{(i)} \left(\frac{T_0(t)}{2} - \frac{T_2(t)}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} \left(\frac{T_{k-1}(t)}{k-1} - \frac{T_{k+1}(t)}{k+1} - \frac{2}{k^2-1} \right) - P^{(i)}(\psi) \\ &= x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t) + c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k^2-1} - T_1(t)c_0^{(i)} \\ &\quad - T_2(t) \frac{c_1^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}^{(i)} \frac{T_k(t)}{k} - \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-1}^{(i)} \frac{T_k(t)}{k} - P^{(i)}(\psi). \end{aligned}$$

À la dernière ligne la somme a simplement été séparée en 3 parties différentes. Comme $T_1(t)c_0^{(i)}$

et $T_2(t) \frac{c_1^{(i)}}{2}$ sont aussi de la forme $\frac{c_{k-1}^{(i)}}{k} T_k(t)$, on les insère dans la somme, on obtient

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{(i)}(x) &= x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t) + c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k^2 - 1} + \\
&\quad \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}^{(i)} \frac{T_k(t)}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}^{(i)} \frac{T_k(t)}{k} - P^{(i)}(\psi) \\
&= x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} T_k(t) + c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k^2 - 1} + \\
&\quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k+1}^{(i)} - c_{k-1}^{(i)}}{k} T_k(t) - P^{(i)}(\psi).
\end{aligned}$$

La série de Tchebychev étant unique, la fonction recherchée est complètement déterminée par ses coefficients, sachant que ceux-ci sont dans l'espace ℓ_ν^1 pour un $\nu > 1$, il est possible de réécrire $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \times (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times (\ell_{\tilde{\nu}}^1)^4$ pour un $\tilde{\nu}$. On a

$$\tilde{F}(x) = \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ \eta^{(2)} \\ \tilde{F}^{(1)} \\ \tilde{F}^{(2)} \\ \tilde{F}^{(3)} \\ \tilde{F}^{(4)} \end{pmatrix},$$

avec

$$\eta^{(1)}(x) = x_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(2)} (-1)^k,$$

$$\eta^{(2)}(x) = x_0^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(4)} (-1)^k,$$

et $\tilde{F}^{(i)} = \left\{ \tilde{f}_k^{(i)} \right\}_{k=0}^{\infty}$ avec

$$\tilde{f}_k^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} x_0^{(i)} + c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k^2 - 1} - P^{(i)}(\psi), & \text{si } k = 0 \\ 2x_k^{(i)} + \frac{c_{k+1}^{(i)} - c_{k-1}^{(i)}}{k}, & \text{si } k \geq 1 \end{pmatrix}.$$

Le but est de trouver un zéro de cet opérateur pour tout i , on utilise ce fait pour simplifier $\tilde{f}_k^{(i)}$. On considère plutôt $F^{(i)} = \left\{ f_k^{(i)} \right\}_{k=0}^{\infty}$ donné par

$$f_k^{(i)}(x) = 2kx_k^{(i)} + c_{k+1}^{(i)} - c_{k-1}^{(i)}.$$

On remarque aisément que $\tilde{F}^{(i)}$ et $F^{(i)}$ auront les mêmes zéros.

Remarque 3.1.4. Il est facile de trouver un point $a \in \ell_\nu^1$ tel que $\tilde{a} = \{ka_k\}_{k=0}^\infty \notin \ell_\nu^1$. On peut prendre par exemple ν quelconque et $a = \left\{\frac{1}{\nu^k k^2}\right\}_{k=1}^\infty$, alors $\tilde{a} = \{ka_k\}_{k=1}^\infty \notin \ell_1^1$ puisque la somme obtenue lorsque l'on tente de calculer sa norme diverge.

Le choix de réécrire les $f_k^{(i)}$ de telle sorte peut donc paraître un mauvais choix étant donné que l'image de $F^{(i)}$ n'est pas nécessairement dans ℓ_ν^1 . Cependant la définition de l'opérateur de point fixe fera en sorte que ce problème potentiel sera évité et qu'il satisfera la propriété d'envoyer l'espace de Banach dans lui-même.

Il est aussi possible de réécrire la condition initiale en utilisant les termes supérieurs $k \geq 1$. En effet comme on cherche un zéro de l'opérateur, on aura que l'égalité suivante sera satisfaite par la solution recherchée

$$2kx_k^{(i)} = c_{k-1}^{(i)} - c_{k+1}^{(i)},$$

et ce, pour tout $k \geq 1$ et pour $i = 1, 2, 3, 4$. Ainsi, en combinant cette égalité pour tout k et pour $i = 1, 2, 3, 4$, on obtient

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}^{(i)} - c_{k+1}^{(i)}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k-1} \\ &= c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k+1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k-1} \\ &= c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)c_k^{(i)} - (k+1)c_k^{(i)}}{k^2 - 1} = c_0^{(i)} + \frac{c_1^{(i)}}{2} - 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k^{(i)}}{k^2 - 1}. \end{aligned}$$

Il est alors possible de changer chacun des $F_0^{(i)}$ par ce que l'on vient d'obtenir, et ainsi trouver

$$f_0^{(i)}(x) = x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} - P^{(i)}(\psi).$$

Cette forme étant plus simple à étudier puisque ces termes ne contiendront plus de termes potentiellement non linéaires provenant de (3.4). Pour k plus grand que zéro, on ramène le système aux variables initiales en utilisant (3.4), on obtient alors

$$\begin{aligned} f_k^{(1)}(x) &= 2kx_k^{(1)} + L \left[x_{k\pm 1}^{(2)} + (x^{(1)} * x^{(2)})_{k\pm 1} \right], \\ f_k^{(2)}(x) &= 2kx_k^{(2)} + Lx_{k\pm 1}^{(3)}, \\ f_k^{(3)}(x) &= 2kx_k^{(3)} + Lx_{k\pm 1}^{(4)}, \\ f_k^{(4)}(x) &= 2kx_k^{(4)} + L \left[x_{k\mp 1}^{(1)} + \beta x_{k\mp 1}^{(3)} \right], \end{aligned}$$

où $x_{k\pm 1}^{(i)} = x_{k+1}^{(i)} - x_{k-1}^{(i)}$ et $x_{k\mp 1}^{(i)} = x_{k-1}^{(i)} - x_{k+1}^{(i)}$ est une notation abrégée afin d'alléger un peu les équations qui seront traitées. Finalement, l'opérateur dont le zéro doit être déterminé est

donné par

$$F(x) = \begin{pmatrix} \eta^{(1)} \\ \eta^{(2)} \\ F^{(1)} \\ F^{(2)} \\ F^{(3)} \\ F^{(4)} \end{pmatrix},$$

où

$$\eta^{(1)}(x) = x_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(2)} (-1)^k, \quad (3.5)$$

$$\eta^{(2)}(x) = x_0^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(4)} (-1)^k, \quad (3.6)$$

et $F^{(i)}(x) = \left\{ f_k^{(i)}(x) \right\}_{k \geq 0}$ sont données ci-haut. On utilise une projection en dimension finie pour calculer une approximation d'une solution de $F = 0$. Comme dans le cas de la variété stable, le fait que les coefficients décroissent rapidement justifie le fait qu'il sera possible d'obtenir une approximation suffisamment bonne avec un nombre restreint de coefficients. La méthode des polynômes de rayon sera utilisée à nouveau pour compléter la preuve de l'existence d'une solution.

Soit m le nombre de coefficients de Tchebychev non-nuls considérés pour chaque composante $v^{(i)}$ de l'approximation. La solution en dimension finie sera $\bar{x} = (\bar{L}, \bar{\psi}, \bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \bar{x}^{(4)}) \in \mathbb{R}^{4m+2}$. Notons que le dernier coefficients de Tchebychev non-nul sera d'indice $m - 1$. Remarquons que si on évalue l'opérateur en entier à un point en dimension finie les termes linéaires de $f_k^{(i)}$ seront zéros pour $k \geq m + 1$ et $i = 1, 2, 3, 4$, les termes linéaires de $f_m^{(i)}$ étant non-nuls par la présence de $x_{m-1}^{(i)}$. Quant au produit de convolution dans $f_k^{(1)}$, il sera zéro pour $k \geq 2m$. On dénotera la version tronquée en dimension finie de l'opérateur par $F^{(m)}$, dont chaque membre est donné par $F^{(m)} = (\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, F^{(1,m)}, F^{(2,m)}, F^{(3,m)}, F^{(4,m)})$.

Pour la prochaine section, on suppose que pour un intervalle $[\beta_0, \beta_1]$, la preuve décrite dans le Chapitre 2 a été effectuée avec succès pour $\nu = \nu_s$ et que le rayon obtenu par la méthode des polynômes de rayon est $r_M^{[\beta_0, \beta_1]}$. Finalement, on suppose aussi que pour tout $s \in [0, 1]$, il existe une fonction de validation $h_s(\theta)$ vérifiant les hypothèses du Lemme 2.3.2 avec

$$\sup_{\|\theta\| \leq \nu_s} \|h_s(\theta)\| \leq r_M^{[\beta_0, \beta_1]}.$$

De plus, en calculant les polynômes de rayon pour $s = 0$ il est possible d'effectuer la preuve avec une meilleure borne (alors $\Delta a = 0$, $\Delta \beta = 0$ et les polynômes obtenus sont plus simple et

l'intervalle contenant des rayons négatifs plus près de zéro). C'est-à-dire que pour β_0 :

$$\sup_{\|\theta\| \leq \nu_s} \|h_{\beta_0}(\theta)\| \leq r_0,$$

où r_0 est le rayon obtenu avec la méthode des polynômes de rayon du Chapitre 2 avec $\Delta a = 0$ et $\Delta \beta = 0$. Dans notre cas, la borne du Lemme 2.3.2 est donnée plus précisément vu que $\max(|\theta_1|, |\theta_2|) \leq \rho$, ce qui fournit la borne modifiée, pour $j = 1, 2$

$$\left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_j}(\hat{\theta}) \right| \leq \frac{4\pi r_M^{[\beta_0, \beta_1]}}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})}.$$

De plus, on notera F^N l'opérateur utilisant $P^N(\theta)$, la variété approximée, plutôt que $P(\theta)$, la variété exacte. Aussi, $F^{(m, N)}$ dénote l'opérateur tronqué utilisant la variété obtenue numériquement. C'est cet opérateur qui est utilisé pour obtenir l'approximation initiale en β_0 et β_1 .

3.2 L'opérateur de Newton pour la connexion homocline

Il faut à nouveau obtenir les bornes (1.12) et (1.13) sur l'opérateur de Newton. Mais il faut d'abord définir A de tel sorte que $T_s(x) = I - AF_s(x)$ satisfasse pour tout s

$$T_s : \mathbb{R}^2 \times (\ell_\nu^1)^4 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times (\ell_\nu^1)^4.$$

Soient β_0 et β_1 , 2 valeurs différentes du paramètre telles que $\beta_0 < \beta_1$. Soit \bar{x}_0 une approximation du zéro de F_0 , l'opérateur tel que définit au début de ce chapitre avec $\beta = \beta_0$ (respectivement on définit \bar{x}_1 , pour F_1 et β_1). Pour tout $s \in [0, 1]$, on pose :

$$\bar{x}_s = \bar{x}_0 + s(\bar{x}_1 - \bar{x}_0) =: \bar{x}_0 + s\Delta x$$

et

$$\beta_s = \beta_0 + s(\beta_1 - \beta_0) =: \beta_0 + s\Delta \beta.$$

Le point \bar{x}_i représentera désormais $\bar{x}_i = (\bar{L}_i, \bar{\psi}_i, \bar{x}_i^{(1)}, \bar{x}_i^{(2)}, \bar{x}_i^{(3)}, \bar{x}_i^{(4)})$ pour $i = \{0, 1\}$ afin de simplement noter $F(\bar{x}_i)$. L'intervalle de définition du paramètre sera aussi appelé $I \stackrel{\text{def}}{=} [\beta_0, \beta_1]$. Comme dans le Chapitre 2, pour tout s , l'approximation de la variété stable pour la valeur β_s est donnée par

$$\begin{aligned} P_s^N(\psi) &= \sum_{|\alpha| < N} (\bar{a}_{0, \alpha} + s(\bar{a}_{1, \alpha} - \bar{a}_{0, \alpha})) \rho^{|\alpha|} e^{\mathbf{i}\psi(\alpha_1 - \alpha_2)} \\ &= \sum_{|\alpha| < N} (\bar{a}_{0, \alpha} + s\Delta \bar{a}_\alpha) \rho^{|\alpha|} e^{\mathbf{i}\psi(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{aligned}$$

où $\bar{a}_0 = \{\bar{a}_{0, \alpha}\}_{|\alpha|=0}^{N-1}$ et $\bar{a}_1 = \{\bar{a}_{1, \alpha}\}_{|\alpha|=0}^{N-1}$ sont les approximations de la variété stable pour β_0 et β_1 respectivement. Pour toute valeur de β_s , on considère l'opérateur F correspondant, que

l'on notera F_s . Chacune de ses composantes est donnée par

$$F_s(x) = \begin{pmatrix} \eta_s^{(1)} \\ \eta_s^{(2)} \\ F_s^{(1)} \\ F_s^{(2)} \\ F_s^{(3)} \\ F_s^{(4)} \end{pmatrix}$$

où $\eta_{1,s}$ et $\eta_{2,s}$ sont exactement comme $\eta^{(1)}$ et $\eta^{(2)}$ définis par (3.5) et (3.6), puisqu'il n'y a aucune dépendance en β dans ces dernières. Pour $i = 1, 2, 3, 4$, la première composante de $F_s^{(i)}$ est

$$f_{s,0}^{(i)}(x) = x_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(i)} - P_s^{(i)}(\psi).$$

Pour $F_s^{(1)}$, $F_s^{(2)}$ et $F_s^{(3)}$ seulement la première composante change, les dimensions supérieures sont exactement telles que données précédemment. En effet, seulement la composante $f_{s,0}^{(i)}$ contient une dépendance en β , les autres dimensions demeurent inchangées. Ce n'est pas le cas pour $F_s^{(4)}$, étant donné la présence de β dans cette composante, on a que

$$f_{s,k}^{(4)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_0^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(4)} - P_s^{(4)}(\psi) & \text{si } k = 0, \\ 2kx_k^{(4)} + L \left[x_{k\mp 1}^{(1)} + \beta_s x_{k\mp 1}^{(3)} \right] & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

On s'attarde maintenant au choix de l'opérateur $T_s(x) = x - AF_s(x)$, dont le point fixe sera le zéro de F_s pour toutes les valeurs de s . On utilisera les mêmes idées que pour la variété stable, le but étant encore d'obtenir A injectif et tel que T envoie l'espace de Banach sur lequel on travaille vers lui-même. On construira à nouveau un opérateur dont la partie infinie est non-nulle seulement sur la diagonale afin de pouvoir appliquer à nouveau le Corollaire 1.4.2. On veut que T_s soit une contraction telle que $T_s : X \rightarrow X$ pour un espace de Banach approprié afin d'appliquer le Théorème 1.4.6 comme il a été fait au Chapitre 2 dans le cas de la variété. L'espace qui fait l'affaire est donné dans la définition suivante.

Définition 3.2.1. Soit $X = \mathbb{R}^2 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1$. Ainsi, la norme donnée par $\|\cdot\|_{X^{(i)}}$, telle qu'introduite à la Section 1.4.1, représente la valeur absolue pour $i = 1, 2$ et représente la norme $\|\cdot\|_{1,\nu}$ pour $i = 3, 4, 5, 6$. L'espace ℓ_ν^1 utilisé ici correspond à l'espace des suites de coefficients de Tchebychev. On continuera cependant de noter $c \in X$ par $c = (c_L, c_\psi, c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}, c^{(4)})$. On a donc que

$$\|c^{(i)}\|_{X^{(i+2)}} = \|c^{(i)}\|_{1,\nu} = |c_0^{(i)}| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{(i)}| \nu^k$$

pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Étant donné la définition de X , on définira l'opérateur A en fonction de comment il agit sur chacun des morceaux de l'espace X . C'est pourquoi il est défini en 6 blocs pour chaque dimension, 2 correspondant à \mathbb{R} et 4 correspondant à ℓ_ν^1 . On considère l'approximation en dimension finie $A^{(m)} \approx (DF_0^{(m,N)}(\bar{x}_0))^{-1}$. Chaque composante est vu comme suit

$$A^{(m)} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{(m)} & A_{1,2}^{(m)} & A_{1,3}^{(m)} & A_{1,4}^{(m)} & A_{1,5}^{(m)} & A_{1,6}^{(m)} \\ A_{2,1}^{(m)} & A_{2,2}^{(m)} & A_{2,3}^{(m)} & A_{2,4}^{(m)} & A_{2,5}^{(m)} & A_{2,6}^{(m)} \\ A_{3,1}^{(m)} & A_{3,2}^{(m)} & A_{3,3}^{(m)} & A_{3,4}^{(m)} & A_{3,5}^{(m)} & A_{3,6}^{(m)} \\ A_{4,1}^{(m)} & A_{4,2}^{(m)} & A_{4,3}^{(m)} & A_{4,4}^{(m)} & A_{4,5}^{(m)} & A_{4,6}^{(m)} \\ A_{5,1}^{(m)} & A_{5,2}^{(m)} & A_{5,3}^{(m)} & A_{5,4}^{(m)} & A_{5,5}^{(m)} & A_{5,6}^{(m)} \\ A_{6,1}^{(m)} & A_{6,2}^{(m)} & A_{6,3}^{(m)} & A_{6,4}^{(m)} & A_{6,5}^{(m)} & A_{6,6}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Les composantes représentent la dérivée de la composante i de l'opérateur $F^{(m,N)}$ par rapport à la composante j de la variable en dimension finie \bar{x} . Similairement, on définit le cas non-tronqué par

$$A \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} & A_{1,6} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & A_{2,5} & A_{2,6} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} & A_{3,5} & A_{3,6} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} & A_{4,5} & A_{4,6} \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} & A_{5,6} \\ A_{6,1} & A_{6,2} & A_{6,3} & A_{6,4} & A_{6,5} & A_{6,6} \end{bmatrix}.$$

Ici chacune des composantes fait intervenir les termes associés de l'opérateur et de x . Comme on considère toutes les dimensions on a que chaque composante est telle que $A_{i,j}^{(m)} : X^{(i)} \rightarrow X^{(j)}$. Tous les cas sont donnés plus précisément ci-dessous.

- $A_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donc $A_{i,j} \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq i, j \leq 2$;
- $A_{i,j} : \ell_\nu^1 \rightarrow \mathbb{R}$, donc $A_{i,j} \in (\ell_\nu^1)^*$ pour $1 \leq i \leq 2$ et $3 \leq j \leq 6$;
- $A_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \ell_\nu^1$, donc $A_{i,j} \in (\ell_\nu^1)$ pour $3 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 2$;
- $A_{i,j} : \ell_\nu^1 \rightarrow \ell_\nu^1$, donc $A_{i,j} \in B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)$ pour $3 \leq i, j \leq 6$.

Pour $1 \leq i, j \leq 2$ et pour la partie finie des autres cas, on utilise $A^{(m)}$, l'inverse approximé numériquement de la matrice jacobienne du problème en dimension finie. Il faut définir la partie infinie dans les cas de dimension supérieure ou égale à m . Dans les cas $1 \leq i, j \leq 2$ seulement $A^{(m)}$ est nécessaire. Pour les cas $1 \leq i \leq 2$ et $3 \leq j \leq 6$ ainsi, on prendra simplement 0 comme valeur pour chacune des composantes des dimensions supérieures, c'est-à-dire

$$A_{i,j} x^{(j-2)} \stackrel{\text{def}}{=} A_{i,j}^{(m)} (x^{(j-2)})^{(m)}.$$

Similairement, dans le cas $3 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 2$, on définit A par $A_{i,1} x_L \stackrel{\text{def}}{=} A_{i,1}^{(m)} x_L$ et $A_{i,2} x_\psi \stackrel{\text{def}}{=} A_{i,1}^{(m)} x_\psi$. Finalement, lorsque $3 \leq i, j \leq 6$, on définit l'opérateur par

$$(A_{i,j} x^{(j-2)})_k \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} A^{(m)}(x^{(j-2)})^{(m)}, & \text{si } k < m, \\ \frac{\delta_{i,j}}{2k} x_k^{(j-2)}, & \text{si } k \geq m, \end{cases}$$

où $\delta_{i,j}$ est la fonction delta de Kronecker. En rassemblant toutes les pièces, l'action de A sur x est donnée par

$$(Ax)^{(i)} = A_{i,1}x_L + A_{i,2}x_\psi + \sum_{j=3}^6 A_{i,j}x^{(j-2)}$$

où $(Ax)^{(i)} \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2$ et $(Ax)^{(i)} \in \ell_\nu^1$ pour $3 \leq i \leq 6$. Une telle définition de A mène au résultat voulu, donné par la proposition suivante. La preuve est similaire à celle effectuée dans le cas de la variété stable à la Proposition 2.1.5 et ne sera pas faite.

Proposition 3.2.2. *On considère l'opérateur de point fixe défini par*

$$T_s(x) = x - AF_s(x),$$

où $s \in [0, 1]$ et A est l'opérateur tel que défini précédemment où la partie finie est donnée par $A^{(m)} \approx \left(DF_0^{(m,N)}(\bar{x}_0)\right)^{-1}$, alors $T : X \rightarrow X$.

Il faut désormais obtenir des bornes sur les quantités (1.12) et (1.13) en utilisant l'opérateur considéré dans l'énoncé de la proposition. Puisqu'on travaille dans l'espace $\mathbb{R}^2 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1 \times \ell_\nu^1$, il est approprié de chercher à définir les polynômes de rayon sur chacune des composantes. Les composantes sont séparées en deux cas distincts. En effet, les deux premières seront calculées en utilisant la norme sur \mathbb{R} et les autres le seront en considérant la norme sur ℓ_ν^1 , telle que définie en (1.2.1). Les prochaines section auront pour but de calculer les bornes nécessaires à la définition des polynômes de rayon pour un ν quelconque.

Remarque 3.2.3. *On remarque que ν intervient aussi dans les bornes définies au Chapitre 2. On notera la valeur utilisée dans les preuves pour la variété stable par ν_s . On a que ν_s n'est pas nécessairement la même valeur que celle qui sera utilisée dans cette partie, il sera même impossible d'effectuer les calculs avec ces deux valeurs égales. Pour le calcul des bornes avec l'ordinateur, on prendra $\nu > \nu_s$ puisque ν_s sera fixé à 1 (voir le Chapitre 4 pour les détails derrière un tel choix) alors que le taux de décroissance des coefficients de Tchebychev est strictement supérieur à 1 (voir le Théorème de Paley-Wiener 1.3.5).*

3.2.1 La borne Y

Il faut borner la quantité $\|T(\bar{x}_s) - \bar{x}_s\|_{X^{(i)}} = \|AF_s(\bar{x}_s)\|_{X^{(i)}}$ pour tout $s \in [0, 1]$ et pour tout $i = 1, \dots, 6$. La fonction de validation $h_s(\psi)$ sera toujours séparée du reste, on introduit donc la fonction suivante afin d'alléger l'écriture de certaines équations

$$H_s(\psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (h_s(\psi), 0, \dots) \\ (h_s(\psi), 0, \dots) \\ (h_s(\psi), 0, \dots) \\ (h_s(\psi), 0, \dots) \end{pmatrix}.$$

Rappelons que \bar{x}_s est l'interpolation linéaire des solutions approchées aux deux extrémités. La borne sera calculée en réécrivant chaque terme sous la forme d'un polynôme en s , on remarque que le polynôme est de degré au plus 3. On cherche donc à développer l'opérateur en regroupant les termes selon les coefficients s . On cherche à déterminer $S_j = (S_j^{(1)}, S_j^{(2)}, S_j^{(3)}, S_j^{(4)}, S_j^{(5)}, S_j^{(6)})$ pour $j = 0, 1, 2, 3$ les coefficients de s tels qu'il sera possible de réécrire l'opérateur F sous la forme

$$F_s(\bar{x}_s) = F_s^N(\bar{x}_s) + H_s(\bar{\psi}_s) = S_0 + sS_1 + s^2S_2 + s^3S_3 + H_s(\bar{\psi}_s). \quad (3.7)$$

Il sera ainsi plus facile d'obtenir une borne valide pour tout s sans perdre trop de précision. D'abord, rappelons que $H_s(\bar{\psi}_s)$ fera apparaître $h_s(\bar{\psi}_s)$ qui est la fonction de validation sur l'intervalle en entier, donc que $h_s(\bar{\psi}_s) < r_m^I$, l'erreur d'approximation, qui a été déterminée avec la méthode du Chapitre 2. Dans le cas des conditions de symétrie $\eta_s^{(1)}$ et $\eta_s^{(2)}$, on a que

$$\begin{aligned} \eta_s^{(1)} &= \bar{x}_{s,0}^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \bar{x}_{s,k}^{(2)} = \bar{x}_{0,0}^{(2)} + s\Delta\bar{x}_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k [\bar{x}_{0,k}^{(2)} + s\Delta\bar{x}_k^{(2)}] \\ &= \bar{x}_{0,0}^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \bar{x}_{0,k}^{(2)} + s \left(\Delta\bar{x}_0^{(2)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta\bar{x}_k^{(2)} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} S_0^{(1)} + sS_1^{(1)}, \\ \eta_s^{(2)} &= \bar{x}_{0,0}^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \bar{x}_{0,k}^{(4)} + s \left(\Delta\bar{x}_0^{(4)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta\bar{x}_k^{(4)} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} S_0^{(2)} + sS_1^{(2)}. \end{aligned}$$

Similairement, pour $f_{s,0}^{(i,N)}$, on a que

$$\begin{aligned} f_{s,0}^{(i,N)} &= \bar{x}_{0,0}^{(i)} + s\Delta\bar{x}_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\bar{x}_{0,k}^{(i)} + s\Delta\bar{x}_k^{(i)}] - P_s^{(i,N)}(\bar{\psi}_s) \\ &= \left(\bar{x}_{0,0}^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_{0,k}^{(i)} - P_0^{(i,N)}(\bar{\psi}_s) \right) + s \left(\Delta\bar{x}_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\bar{x}_k^{(i)} - \Delta P^{(i,N)}(\bar{\psi}_s) \right) \\ &= \left(\bar{x}_{0,0}^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{x}_{0,k}^{(i)} - P_0^{(i,N)}(\bar{\psi}_0) \right) \\ &\quad + s \left(\Delta\bar{x}_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\bar{x}_k^{(i)} - \Delta P^{(i,N)}(\bar{\psi}_0) + \frac{\partial}{\partial s} P_0^{(i,N)}(\xi_\psi) + \frac{\partial}{\partial s} \Delta P^{(i)}(\xi_\psi) \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \left(S_0^{(i+2)} \right)_0 + s \left(S_1^{(i+2)} \right)_0. \end{aligned}$$

Remarque 3.2.4. *On a déjà constaté à la Remarque 1.4.9 qu'il est essentiel d'obtenir une borne Y la plus petite possible pour que la technique des polynômes de rayon fonctionne. On remarque que les termes devant les coefficients d'ordre 2 et 3 font intervenir plusieurs termes qui dépendent des valeurs Δx et $\Delta \beta$ qui sont multipliées entre elles. Comme il est possible de les diminuer directement en prenant un intervalle moins large il n'est pas nécessaire d'effectuer*

i	Coefficients $S_{i,k}^{(3)}$ pour $k \geq 1$
0	$2k\bar{x}_{0,k}^{(1)} + \bar{L}_0 \left[\bar{x}_{0,k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right]$
1	$2k\Delta\bar{x}_k^{(1)} + \bar{L}_0 \left[\Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(2)} + (\Delta\bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta\bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right]$ $+ \Delta\bar{L} \left[\bar{x}_{0,k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right]$
2	$\bar{L}_0(\Delta\bar{x}^{(1)} * \Delta\bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} + \Delta\bar{L} \left[\Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(2)} + (\Delta\bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta\bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right]$
3	$\Delta\bar{L}(\Delta\bar{x}^{(1)} * \Delta\bar{x}^{(2)})_{k\pm 1}$
i	Coefficients $S_{i,k}^{(4)}$ pour $k \geq 1$
0	$2k\bar{x}_{0,k}^{(2)} + \bar{L}_0\bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)}$
1	$\bar{L}_0\Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} + 2k\Delta\bar{x}_k^{(2)} + \Delta\bar{L}\bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)}$
2	$\Delta\bar{L}\Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}$
3	0
i	Coefficients $S_{i,k}^{(5)}$ pour $k \geq 1$
0	$2k\bar{x}_{0,k}^{(3)} + \bar{L}_0\bar{x}_{0,k\pm 1}^{(4)}$
1	$\bar{L}_0\Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(4)} + 2k\Delta\bar{x}_k^{(3)} + \Delta\bar{L}\bar{x}_{0,k\pm 1}^{(4)}$
2	$\Delta\bar{L}\Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(4)}$
3	0
i	Coefficients $S_{i,k}^{(6)}$ pour $k \geq 1$
0	$2k\bar{x}_{0,k}^{(4)} + \bar{L}_0 \left[\bar{x}_{0,k\mp 1}^{(1)} + \beta_0\bar{x}_{0,k\mp 1}^{(3)} \right]$
1	$2k\Delta\bar{x}_k^{(4)} + \Delta\bar{L} \left[\bar{x}_{0,k\mp 1}^{(1)} + \beta_0\bar{x}_{0,k\mp 1}^{(3)} \right] + \bar{L}_0 \left[\Delta\bar{x}_{k\mp 1}^{(1)} + \beta_0\Delta\bar{x}_{k\mp 1}^{(3)} + \Delta\beta\bar{x}_{0,k\mp 1}^{(3)} \right]$
2	$\Delta\bar{L} \left[\Delta\bar{x}_{k\mp 1}^{(1)} + \beta_0\Delta\bar{x}_{k\mp 1}^{(3)} + \Delta\beta\bar{x}_{0,k\mp 1}^{(3)} \right] + \bar{L}_0\Delta\beta\Delta\bar{x}_{k\mp 1}^{(3)}$
3	$\Delta\bar{L}\Delta\beta\Delta\bar{x}_{k\mp 1}^{(3)}$

TABLE 3.1: Coefficients $S_{i,k}^{(j)}$ de la séparation de l'opérateur F comme polynôme en s .

de travail supplémentaire. De plus, le terme S_0 dépend directement de l'erreur d'approximation en β_0 , on peut donc aisément le rendre aussi petit que désiré. Le terme de degré 1 est celui qui risque d'être le plus grand, c'est pourquoi on le traite différemment.

On apporte une attention particulière au coefficient de degré 1 en s . Il est possible de vérifier que

$$S_1 = \frac{d}{ds} F_s^N(\bar{x}_s) \Big|_{s=0} = DF_0^N(\bar{x}_0)(\Delta x) + \frac{\partial F_0^N}{\partial s}(\bar{x}_0),$$

ce qui fournit un terme plus simple à calculer numériquement et qui remplacera S_1^I dans (3.7). En effet, on a que le premier terme est déjà calculable numériquement. De plus, le second terme est aisément calculable puisque peu de termes dépendent de s dans l'opérateur F_s^N . En

effet, il est possible de vérifier que

$$\frac{\partial F_s^N}{\partial s}(\bar{x}_0)|_{s=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (-\Delta P_1^N(\bar{\psi}_0), 0, 0, \dots) \\ (-\Delta P_2^N(\bar{\psi}_0), 0, 0, \dots) \\ (-\Delta P_3^N(\bar{\psi}_0), 0, 0, \dots) \\ (-\Delta P_4^N(\bar{\psi}_0), \tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots) \end{pmatrix},$$

où $\tilde{f}_k = \bar{L}_0 \Delta \beta (\bar{x}_{3,0})_{k \neq 1}$ et $\Delta P^N(\bar{\psi}_0) = \sum_{|\alpha| \leq N} (\Delta a_\alpha) \rho^{|\alpha|} e^{i\bar{\psi}_0(\alpha_1 - \alpha_2)}$. Qui sont tous des termes entièrement déterminés par les approximations numériques. Ainsi, l'équation (3.7) devient

$$F_s(\bar{x}_s) = S_0 + s \left(DF_0^N(\bar{x}_0)(\Delta x) + \frac{\partial}{\partial s} F_0^N(\bar{x}_0) \right) + s^2 S_2 + s^3 S_3 + H_s(\bar{\psi}_s).$$

Le dernier terme peut être amélioré en utilisant le fait que

$$H_s(\bar{\psi}_s) = H_0(\bar{\psi}_s) + \frac{\partial}{\partial s} H_s|_{s=\xi}(\bar{\psi}_s),$$

pour un certain $\xi \in [0, 1]$. Rappelons que $\|h_0(\theta)\|_\infty < r_0$ pour tout $\theta \in B_0(\nu_s)$ avec r_0 le rayon fourni par l'application de la méthode décrite au Chapitre 2 en prenant $\Delta \beta = 0$ et $\Delta a = 0$, ce qui fournit un rayon de moins grande taille que r_m^I . De plus, pour $i = 1, 2, 3, 4$ par le Lemme 2.3.2, on a que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial s} h_s(\bar{\psi}_s) \right| &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} h_s(\bar{\psi}_s) \frac{\partial \theta_1(\bar{\psi}_s)}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \theta_2} h_s(\bar{\psi}_s) \frac{\partial \theta_2(\bar{\psi}_s)}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial s}(\bar{\psi}_s) \right| \\ &= \left| \left(\frac{\partial}{\partial \theta_1} h_s(\bar{\psi}_s) (-\rho \sin(\bar{\psi}_s)) + \frac{\partial}{\partial \theta_2} h_s(\bar{\psi}_s) (\rho \cos(\bar{\psi}_s)) \right) \Delta \bar{\psi} \right| \\ &\leq \frac{8\pi r_m^I \rho}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} |\Delta \bar{\psi}|. \end{aligned}$$

On a alors que

$$|H_s(\bar{\psi}_s)| \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{4\pi \rho (r_m^I |\Delta \bar{\psi}|)}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} + r_0, \dots \right) \\ \left(\frac{4\pi \rho (r_m^I |\Delta \bar{\psi}|)}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} + r_0, \dots \right) \\ \left(\frac{4\pi \rho (r_m^I |\Delta \bar{\psi}|)}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} + r_0, \dots \right) \\ \left(\frac{4\pi \rho (r_m^I |\Delta \bar{\psi}|)}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} + r_0, \dots \right) \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_s.$$

Remarquons maintenant que l'opérateur F_0^N étant évalué en un point de dimension finie, seulement un nombre fini de dimensions seront différentes de zéro. Ainsi, on considère $F^{(m)}$

et les valeurs non nulles de dimension supérieure seront traitées plus loin. Dans le cas de la projection en dimension finie, pour chaque composante de $A^{(m)}F_s^{(m)}(\bar{x}_s)$, on a que

$$|A^{(m)}F_s^{(m)}(\bar{x}_s)| \leq |A^{(m)}S_0| + \left| A^{(m)} \left(DF_0^N(\bar{x}_0)(\Delta x) + \frac{\partial}{\partial s} F_0^N(\bar{x}_0) \right) \right| + |A^{(m)}S_2| + |A^{(m)}S_3| \\ + \left| A^{(m)} \right| \delta_s^{(m)} \stackrel{\text{def}}{=} V.$$

Dans le cas de $f_{s,k}^{(i)}$ où $k \geq m$, les cas dépassant la projection en dimension finie, le produit de convolution est non-nul jusqu'à la valeur $k = 2m - 2$. Il faut donc obtenir une borne sur les composantes de $(AF_s(\bar{x}_s))_k^{(i)}$ jusqu'à $k = 2m - 1$ pour $i = 3, 4, 5, 6$. En effet, dans le cas $i = 1, 2$ on obtient des zéros par définition de A et dans le cas $i = 3, 4, 5, 6$, les termes diagonaux seront différents de zéro, plus particulièrement chaque terme de $AF_s(\bar{x}_s)$, pour $i = 1, 2, 3, 4$ et $k \geq m$ revient à un seul terme qui est donné par

$$\left| (A_{i+2, i+2} F_s^{(i)}(\bar{x}_s))_k \right| = \left| \frac{1}{2k} f_{s,k}^{(i)}(\bar{x}_s) \right|.$$

Tel que précédemment, on développe chacun des cas comme un polynôme en s pour ensuite utiliser le fait que $s \leq 1$. On obtient que

$$\frac{1}{2k} \left| f_{s,k}^{(1)}(\bar{x}_s) \right| \leq \frac{1}{2k} \left(\left| \bar{L}_0 \left[\delta_{k,m} \bar{x}_{0,k-1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right| + \left| \Delta \bar{L} (\Delta \bar{x}_1 * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right| \right. \\ \left. + \left| \bar{L}_0 \left[\delta_{k,m} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(2)} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right| \right. \\ \left. + \left| \Delta \bar{L} \left[-\delta_{k,m} \bar{x}_{0,k-1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right| + \left| \bar{L}_0 (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right| \right. \\ \left. + \left| \Delta \bar{L} \left[-\delta_{k,m} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(2)} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(1)})_{k\pm 1} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right| \right) \stackrel{\text{def}}{=} W_k^{(3)}, \\ \frac{1}{2k} \left| f_{s,k}^{(2)}(\bar{x}_s) \right| \leq \frac{\delta_{k,m}}{2k} \left(\left| \bar{L}_0 \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} \right| + \left| \Delta \bar{L} \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} + \bar{L}_0 \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)} \right| + \left| \Delta \bar{L} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)} \right| \right) \stackrel{\text{def}}{=} W_k^{(4)}, \\ \frac{1}{2k} \left| f_{s,k}^{(3)}(\bar{x}_s) \right| \leq \frac{\delta_{k,m}}{2k} \left(\left| \bar{L}_0 \bar{x}_{0,k-1}^{(4)} \right| + \left| \Delta \bar{L} \bar{x}_{0,k-1}^{(4)} + \bar{L}_0 \Delta \bar{x}_{k-1}^{(4)} \right| + \left| \Delta \bar{L} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(4)} \right| \right) \stackrel{\text{def}}{=} W_k^{(5)}, \\ \frac{1}{2k} \left| f_{s,k}^{(4)}(\bar{x}_s) \right| \leq \frac{\delta_{k,m}}{2k} \left(\left| \bar{L}_0 \left[\bar{x}_{0,k-1}^{(1)} + \beta_0 \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} \right] \right| + \left| \Delta \bar{L} \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)} \right| \right. \\ \left. + \left| \bar{L}_0 \left[\Delta \bar{x}_{k-1}^{(1)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)} + \Delta \beta \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} \right] + \Delta \bar{L} \left[\bar{x}_{0,k-1}^{(1)} + \beta_0 \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} \right] \right| \right. \\ \left. + \left| \bar{L}_0 \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)} + \Delta \bar{L} \left[\Delta \bar{x}_{k-1}^{(1)} + \Delta \beta \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)} \right] \right| \right) \stackrel{\text{def}}{=} W_k^{(6)}.$$

Finalement, on a obtenu une borne sur toutes les entrées non-nulles, on pose

$$\tilde{Y}^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} V^{(i)}, & i = 1, 2, \\ V_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} V_k^{(i)} \nu^k + 2 \sum_{k=m}^{2m-1} W_k^{(i)} \nu^k, & i = 3, 4, 5, 6. \end{cases} \quad (3.8)$$

Et par construction, pour tout $s \in [0, 1]$ ainsi que pour tout $i = 1, \dots, 6$, on a que

$$\left\| (T_s(\bar{x}_s) - \bar{x}_s)^{(i)} \right\|_{X^{(i)}} \leq \tilde{Y}^{(i)}.$$

Ce qui est exactement la borne donnée par (1.12). Le but de la prochaine section est de construire la seconde pour ensuite définir les polynômes de rayon et les utiliser pour appliquer le Théorème 1.4.6.

3.2.2 La borne Z

Soit $b, c \in B(1)$, dénotés par $b = (b_L, b_\psi, b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}, b^{(4)})$ et $c = (c_L, c_\psi, c^{(1)}, c^{(2)}, c^{(3)}, c^{(4)})$, il faut obtenir une borne sur $\|DT_s(\bar{x}_s + b)c\|_{X^{(i)}}$ qui ne dépendra pas de b et c . Pour simplifier les calculs, on introduit à nouveau l'opérateur A^\dagger , qui est une approximation de l'inverse de l'opérateur A défini à la section précédente. Soit

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_{1,1}^\dagger & A_{1,2}^\dagger & A_{1,3}^\dagger & A_{1,4}^\dagger & A_{1,5}^\dagger & A_{1,6}^\dagger \\ A_{2,1}^\dagger & A_{2,2}^\dagger & A_{2,3}^\dagger & A_{2,4}^\dagger & A_{2,5}^\dagger & A_{2,6}^\dagger \\ A_{3,1}^\dagger & A_{3,2}^\dagger & A_{3,3}^\dagger & A_{3,4}^\dagger & A_{3,5}^\dagger & A_{3,6}^\dagger \\ A_{4,1}^\dagger & A_{4,2}^\dagger & A_{4,3}^\dagger & A_{4,4}^\dagger & A_{4,5}^\dagger & A_{4,6}^\dagger \\ A_{5,1}^\dagger & A_{5,2}^\dagger & A_{5,3}^\dagger & A_{5,4}^\dagger & A_{5,5}^\dagger & A_{5,6}^\dagger \\ A_{6,1}^\dagger & A_{6,2}^\dagger & A_{6,3}^\dagger & A_{6,4}^\dagger & A_{6,5}^\dagger & A_{6,6}^\dagger \end{bmatrix}.$$

Soit $x \in \ell_\nu^1$ et $y \in \mathbb{R}$. L'opérateur A^\dagger est défini morceau par morceau de telle sorte que

- $A_{i,j}^\dagger = D_j F_i^{(m,N)}(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, pour $1 \leq i, j \leq 2$;
- $A_{i,j}^\dagger \in (\ell_\nu^1)^*$, pour $1 \leq i \leq 2$ et $3 \leq j \leq 6$. On a $A_{i,j}^\dagger x = D_j F_i^{(m,N)}(\bar{x}) \cdot x^{(m)} \in \mathbb{R}$;
- $A_{i,j}^\dagger \in (\ell_\nu^1)$, pour $3 \leq i \leq 6$ et $1 \leq j \leq 2$. On a $A_{i,j}^\dagger y = (D_j F_i^{(m,N)}(\bar{x})y, 0_\infty) \in \ell_\nu^1$;
- $A_{i,j}^\dagger \in B(\ell_\nu^1, \ell_{\nu'}^1)$, pour $3 \leq i, j \leq 6$ et pour tout $\nu' < \nu$. On a

$$(A_{i,j}^\dagger x)_k = \begin{cases} \left(D_j F_i^{(m,N)}(\bar{x}) x^{(m)} \right)_k, & k < m, \\ \delta_{i,j} 2k x_k, & k \geq m. \end{cases}$$

Dans cette définition D_j représente la dérivée totale par rapport à la j -ième composante de x . De plus, 0_∞ représente l'ajout de zéros nécessaires pour compléter une approximation en dimension finie afin d'obtenir un point de ℓ_ν^1 . Le terme que l'on cherche à borner sera à nouveau modifié via l'introduction de l'opérateur A^\dagger . On considère la séparation suivante

$$\begin{aligned} DT_s(\bar{x}_s + b)c &= [I - ADF_s(\bar{x}_s + b)]c \\ &= [I - AA^\dagger]c - A[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Comme dans le cas de la variété traité au Chapitre 2, la borne sur le premier terme de (3.9) peut être calculée directement. On définit $B = I - AA^\dagger$. Soit $K_B^{(i,j)}$ la constante donnée par le Corollaire 1.4.2 associée à chacun des $B_{i,j}$ pour $3 \leq i, j \leq 6$. On pose

$$\tilde{Z}_0^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sum_{j=1}^2 |B_{ij}| + \sum_{j=3}^6 \left(\max_{0 \leq k \leq m-1} \frac{|(B_{ij})_k|}{\nu^k} \right), & i = 1, 2 \\ \sum_{j=1}^2 \left(\sum_{k=0}^{m-1} |(B_{ij})_k| \nu^k \right) + \sum_{j=3}^6 K_B^{(i,j)}, & i = 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

et il est facile de vérifier que $\left\| (Bc)^{(i)} \right\|_{X^{(i)}} \leq \tilde{Z}_0^{(i)} r$ pour tout $i = 1, \dots, 6$. On s'attarde maintenant au second terme. On considère u un élément de X de norme 1 tel que $b = ru$, de même manière on définit v associé à l'élément c . D'abord, pour $i = 1, 2$ en utilisant le Lemme 1.2.8 on a que

$$\begin{aligned} [DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]^{(i)} &= \left| c_0^{(2i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k c_k^{(2i)} - c_0^{(2i)} - 2 \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k c_k^{(2i)} \right| \\ &= \left| 2 \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k c_k^{(2i)} \right| \leq 2 \sum_{k=m}^{\infty} |v_k^{(2i)}| r \leq \frac{1}{\nu^m} r, \end{aligned} \quad (3.10)$$

et pour $i = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned} & \left| [DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]_0^{(i+2)} \right| \\ &= \left| \left[\left(-\frac{\partial P_s^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) - \frac{\partial P_s^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) \right) c_\psi + c_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} \right] \right. \\ & \quad \left. - \left[\left(-\frac{\partial P_s^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) - \frac{\partial P_s^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) \right) c_\psi + c_0^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{m-1} c_k^{(i)} \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{\partial P_s^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) - \frac{\partial P_s^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) \right| r + 2 \sum_{k=m}^{\infty} |v_k^{(i)}| r \\ & \quad + \left(\left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_1}(\bar{\psi}_s + b_\psi)(-\rho \sin(\bar{\psi}_s + b_\psi)) \right| + \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_2}(\bar{\psi}_s + b_\psi)(\rho \cos(\bar{\psi}_s + b_\psi)) \right| \right) r \\ &\leq \left| \frac{\partial P_0^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) + s \frac{\partial \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) - \frac{\partial P_0^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) - s \frac{\partial \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) \right| r \\ & \quad + \left(\rho \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_1}(\bar{\psi}_s + b_\psi) \right| + \rho \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_2}(\bar{\psi}_s + b_\psi) \right| + \frac{1}{\nu^m} \right) r \\ &\leq \left| \frac{\partial P_0^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) - \frac{\partial P_0^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) \right| r + s \left| \frac{\partial \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s + b_\psi) - \frac{\partial \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi}(\bar{\psi}_s) \right| r \\ & \quad + \left(\rho \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_1}(\bar{\psi}_s + b_2) \right| + \rho \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_2}(\bar{\psi}_s + b_\psi) \right| + \frac{1}{\nu^m} \right) r. \end{aligned}$$

Les termes sur la première ligne dépendent encore de b , dépendance que l'on cherche à éliminer. Pour ce faire, on utilise le théorème de la moyenne, qui sera grandement utile puisque la dépendance en r sera ensuite une dépendance en r^2 . Rappelons qu'il faut s'assurer que le terme en r du polynôme de rayon soit négatif afin que la technique ait espoir de réussir. Il est donc très utile d'obtenir un terme en r^2 . D'autant plus que le terme auquel on applique le théorème de la moyenne est difficile à majorer avec précision. Par le théorème de la moyenne,

il existe $\sigma_s^{(0,i)}$ et $\sigma_s^{(1,i)}$ tels que

$$\begin{aligned} \left| [DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]_0^{(i+2)} \right| &\leq \left(\left| \frac{\partial^2 P_0^{(i,N)}}{\partial \psi^2}(\sigma_s^{(0,i)}) \right| + \left| \frac{\partial^2 \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi^2}(\sigma_s^{(1,i)}) \right| \right) r^2 \\ &\quad + \left(\rho \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_1}(\bar{\psi}_s + b_\psi) \right| + \rho \left| \frac{\partial h_s}{\partial \theta_2}(\bar{\psi}_s + b_\psi) \right| + \frac{1}{\nu^m} \right) r. \end{aligned}$$

Chaque terme $\sigma_s^{(0,i)}$ et $\sigma_s^{(1,i)}$ est inconnu, il faut donc obtenir une borne uniforme sur $\frac{\partial^2 P_0^{(i,N)}}{\partial \psi^2}$ et $\frac{\partial^2 \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi^2}$. Il est possible d'utiliser la forme particulière de $\theta = (\rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi))$ pour obtenir une borne appropriée. En effet, pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, il est possible de trouver que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 P_0^{(i,N)}}{\partial \psi^2}(\psi) \right| &\leq \left| \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} \sum_{|\alpha| < N} \bar{a}_{0,\alpha}^{(i)} \rho^{|\alpha|} e^{i\psi(\alpha_1 - \alpha_2)} \right| \leq \sum_{|\alpha| < N} \left| -\bar{a}_{0,\alpha}^{(i)} \rho^{|\alpha|} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 e^{i\psi(\alpha_1 - \alpha_2)} \right| \\ &= \sum_{|\alpha| < N} \left| \bar{a}_{0,\alpha}^{(i)} \rho^{|\alpha|} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right|. \end{aligned}$$

On peut borner $\frac{\partial^2 \Delta P^{(i,N)}}{\partial \psi^2}$ similairement. Ainsi, on définit

$$\Lambda^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{|\alpha| < N} \left| \bar{a}_{0,\alpha}^{(i)} \rho^{|\alpha|} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right| + \sum_{|\alpha| < N} \left| \Delta \bar{a}_{0,\alpha}^{(i)} \rho^{|\alpha|} (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \right|$$

on obtient alors $\Lambda \in \mathbb{R}^4$, une borne sur les dérivées de la version tronquée de la paramétrisation de la variété stable locale. On utilise à nouveau le Lemme 2.3.2 afin de borner la fonction de validation h pour tout $s \in [0, 1]$. On obtient, pour $i = 1, 2, 3, 4$

$$\left| [DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]_0^{(i+2)} \right| \leq \Lambda^{(i)} r^2 + \left(\frac{8\pi \rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) r. \quad (3.11)$$

Pour $k \neq 0$, il est utile de remarquer que

$$DF_s(\bar{x}_s + b)c = \frac{\partial F_s}{\partial \tau}(\bar{x}_s + b + c\tau) \Big|_{\tau=0}.$$

Ce qui permet de vérifier chaque terme à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. Soient u, v tels que $b = ru$ et $c = rv$. On considère chacun des coefficients devant r , r^2 et r^3 dans l'expansion de $F_s(\bar{x}_s + b + c\tau)$. Remarquons que dans $-A^\dagger c$, les coefficients non nuls sont tous devant r . On cherche à déterminer les \tilde{z}_i tels que

$$\left(DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c \right)_k^{(i)} = \tilde{z}_{1,k}^{(i)} r + \tilde{z}_{2,k}^{(i)} r^2 + \tilde{z}_{3,k}^{(i)} r^3.$$

Les coefficients $\tilde{z}_{1,k}^{(i)}$ sont des polynômes en s , alors que A^\dagger est indépendant de s . Ainsi, pour $k \leq m - 1$, les coefficients devant s , s^2 et s^3 ne changeront pas lorsque $A^\dagger c$ sera soustrait. Par

conséquent, pour $\tilde{z}_{1,k}^{(3)}$ et $1 \leq k \leq m-1$, il est possible de vérifier que

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{1,k}^{(3)} = & \bar{L}_0 \left[(\bar{x}_0^{(1)} * w^{(2)})_{k\pm 1} + (w^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \\ & + s \left(v_L \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(2)} + \Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(2)} + v_L \left[(\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right. \\ & + \bar{L}_0 \left[(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] + \Delta \bar{L} \left[(\bar{x}_0^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \left. \right) \\ & + s^2 \left(\Delta \bar{L} \left[(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] + v_L (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right), \end{aligned}$$

où

$$(\bar{x}_0^{(i)} w^{(j)})_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ |k_2| \geq m}} \bar{x}_{0,k_1}^{(i)} v_{k_2}^{(j)} \quad (3.12)$$

est le produit de convolution duquel a été soustrait les termes $v_k^{(j)}$ d'indices k inférieurs à m . Ces termes ne sont pas dans la somme car la soustraction de $A^\dagger c$ les annule. A^\dagger étant la dérivée exacte seulement dans la partie finie, il est impossible de se départir du produit de convolution en entier.

Remarque 3.2.5. *Dans le cas de la borne pour la variété au chapitre précédent de tels termes n'apparaissent pas. Cette différence provient du fait que le produit de Cauchy ne font pas survenir de termes de dimension supérieures à la projection tandis que c'est le cas pour les produits de convolutions.*

On s'intéresse maintenant aux termes de dimensions supérieurs. Si $k = m-1$, un certain nombre de termes qui étaient annulés par A^\dagger ne le sont plus malgré le fait que l'on n'ait pas encore dépassé la dimension de la projection, il est possible d'obtenir que

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{1,k}^{(3)} = & s^2 \left(\Delta \bar{L} \left[(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] + v_L (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right) + \bar{L}_0 \left[(\bar{x}_0^{(1)} * w^{(2)})_{k\pm 1} \right. \\ & + (v^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + v_{k\pm 1}^{(2)} \left. \right] + s \left(v_L \left[\Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right. \\ & \left. + \bar{L}_0 \left[(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] + \Delta \bar{L} \left[v_{k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_{1,0} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right). \end{aligned}$$

Et finalement, pour $k \geq m$, la soustraction de A^\dagger n'a d'effet que sur le terme dominant que l'on a choisit de garder sur la diagonale. Il est possible de vérifier que

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{1,k}^{(3)} = & \bar{L}_0 \left[(\bar{x}_0^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + v_{k\pm 1}^{(2)} \right] + v_L \left[(\bar{x}_0^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + \delta_{k,m} \bar{x}_{0,k-1}^{(2)} \right] \\ & + s \left(\bar{L}_0 \left[(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] + \Delta \bar{L} \left[v_{k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right. \\ & \left. + v_L \left[\delta_{k,m} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} \right] \right) \\ & + s^2 \left(\Delta \bar{L} \left[(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right] + v_L (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right). \end{aligned}$$

Encore une fois, $\delta_{k,m}$ représente la fonction delta de Kronecker. On la retrouve puisque les approximations numériques sont nulles pour les dimensions supérieures, les termes associés n'apparaissent donc que pour une seule valeur de k . Les mêmes argument s'appliquent aux cas $\tilde{z}_{1,k}^{(4)}$, $\tilde{z}_{1,k}^{(5)}$ et $\tilde{z}_{1,k}^{(6)}$, il est possible de vérifier que

$$\tilde{z}_{1,k}^{(4)} = \begin{cases} s[\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(3)} + v_L \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}] & , \text{ pour } 1 \leq k \leq m-2 \\ \bar{L}_0 v_{k+1}^{(3)} + s[\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(3)} + v_L \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}] & , \text{ pour } k = m-1 \\ \bar{L}_0 v_{k\pm 1}^{(3)} + v_L \delta_{k,m} \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} + s[\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(3)} + v_L \delta_{k,m} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)}] & , \text{ pour } k \geq m, \end{cases}$$

$$\tilde{z}_{1,k}^{(5)} = \begin{cases} s[\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(4)} + v_L \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(4)}] & , \text{ pour } 1 \leq k \leq m-2 \\ \bar{L}_0 v_{k+1}^{(4)} + s[\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(4)} + v_L \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(4)}] & , \text{ pour } k = m-1 \\ \bar{L}_0 v_{k\pm 1}^{(4)} + v_L \delta_{k,m} \bar{x}_{0,k-1}^{(4)} + s[\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(4)} + v_L \delta_{k,m} \Delta \bar{x}_{k-1}^{(4)}] & , \text{ pour } k \geq m, \end{cases}$$

et

$$\tilde{z}_{1,k}^{(6)} = \begin{cases} s \left(v_L [\Delta \beta \bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(1)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}] + \Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(1)} \right. \\ \left. + [\bar{L}_0 \Delta \beta + \beta_0] v_{k\pm 1}^{(3)} \right) + s^2 [v_L \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{L} \Delta \beta v_{k\pm 1}^{(3)}] & , \text{ pour } 1 \leq k \leq m-2 \\ s \left(v_L [\Delta \beta \bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(1)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}] + [\bar{L}_0 \Delta \beta + \beta_0] v_{k\pm 1}^{(3)} \right) \\ + \Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(1)} + \bar{L}_0 [\beta_0 v_{k+1}^{(3)} + v_{k+1}^{(1)}] + s^2 [v_L \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{L} \Delta \beta v_{k\pm 1}^{(3)}] & , \text{ pour } k = m-1 \\ \delta_{k,m} v_L [\beta_0 \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} + \bar{x}_{0,k-1}^{(1)}] + \bar{L}_0 [\beta_0 v_{k\pm 1}^{(3)} + v_{k\pm 1}^{(1)}] \\ + s \left(\delta_{k,m} v_L [\Delta \beta \bar{x}_{0,k-1}^{(3)} + \Delta \bar{x}_{k-1}^{(1)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)}] + \Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(1)} \right. \\ \left. + [\bar{L}_0 \Delta \beta + \beta_0] v_{k\pm 1}^{(3)} \right) + s^2 [\Delta \bar{L} \Delta \beta v_{k\pm 1}^{(3)} + \delta_{k,m} v_L \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k-1}^{(3)}] & , \text{ pour } k \geq m. \end{cases}$$

Les coefficients $\tilde{z}_{2,k}^{(i)}$ et $\tilde{z}_{3,k}^{(i)}$ restent à être déterminés. La soustraction de A^\dagger n'a aucun effet sur ces derniers. Pour $k \neq 0$, ils se trouvent dans la table 3.2. Le cas $k = 0$, qui faisait intervenir la paramétrisation de la variété stable, a été traité précédemment.

Coefficients devant r^2 , pour $k \geq 1$	
$\tilde{z}_{2,k}^{(3)}$	$v_L((\bar{x}_0^{(1)} * u^{(2)})_{k\pm 1} + (u^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + s[(\Delta\bar{x}^{(1)} * u^{(2)})_{k\pm 1} + (u^{(1)} * \Delta\bar{x}^{(2)})_{k\pm 1}] + u_{k\pm 1}^{(2)})$ $+ u_L((\bar{x}_0^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1} + s[(\Delta\bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * \Delta\bar{x}^{(2)})_{k\pm 1}] + v_{k\pm 1}^{(2)})$ $+ s\Delta\bar{L}((u^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * u^{(2)})_{k\pm 1}) + \bar{L}_0((u^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + (v^{(1)} * u^{(2)})_{k\pm 1})$
$\tilde{z}_{2,k}^{(4)}$	$u_L v_{k\pm 1}^{(3)} + v_L u_{k\pm 1}^{(3)}$
$\tilde{z}_{2,k}^{(5)}$	$u_L v_{k\pm 1}^{(4)} + v_L u_{k\pm 1}^{(4)}$
$\tilde{z}_{2,k}^{(6)}$	$u_L(\beta_s v_{k\pm 1}^{(3)} + v_{k\pm 1}^{(1)}) + v_L(\beta_s u_{k\pm 1}^{(3)} + u_{k\pm 1}^{(1)})$
Coefficients devant r^3 , pour $k \geq 1$	
$\tilde{z}_{3,k}^{(3)}$	$u_L(u^{(1)} * v^{(2)})_{k\pm 1} + u_L(u^{(2)} * v^{(1)})_{k\pm 1} + v_L(u^{(1)} * u^{(2)})_{k\pm 1}$
$\tilde{z}_{3,k}^{(4)}$ $\tilde{z}_{3,k}^{(5)}$ $\tilde{z}_{3,k}^{(6)}$	0

TABLE 3.2: Coefficients $\tilde{z}_{2,k}^{(i)}$ et $\tilde{z}_{3,k}^{(i)}$ pour $k \neq 0$.

Ainsi, il est possible de définir $\tilde{z}_1^{(i)} = \{\tilde{z}_{1,k}^{(i)}\}_{k \geq 0}$, $\tilde{z}_2^{(i)} = \{\tilde{z}_{2,k}^{(i)}\}_{k \geq 0}$ et $\tilde{z}_3^{(i)} = \{\tilde{z}_{3,k}^{(i)}\}_{k \geq 0}$. Les valeurs spécifiques de $\tilde{z}_{1,0}^{(i)}$ et $\tilde{z}_{2,0}^{(i)}$ ne sont pas connues explicitement, mais (3.10) et (3.11) nous permettent de les borner. Ce qui sera suffisant. On définit aussi $\tilde{z}_{3,0}^{(i)} = 0$. Rappelons que le but est d'obtenir une borne de la forme (1.13). Pour $l = 1, 2$, on obtient que

$$\begin{aligned}
& \left| \left(A[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c] \right)^{(l)} \right| \\
& \leq \sum_{i=1}^2 \left| A_{l,i}[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]^{(i)} \right| + \sum_{i=3}^6 \left| A_{l,i}[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]^{(i)} \right| \\
& \leq \sum_{i=1}^2 \frac{|A_{l,i}|}{\nu^m} r + \sum_{i=3}^6 \left(\left| A_{l,i} \tilde{z}_1^{(i)} \right| r + \left| A_{l,i} \tilde{z}_2^{(i)} \right| r^2 + \left| A_{l,i} \tilde{z}_3^{(i)} \right| r^3 \right) \\
& \leq \left(\sum_{i=1}^2 \frac{|A_{l,i}|}{\nu^m} + \sum_{i=3}^6 \left| A_{l,i} \tilde{z}_1^{(i)} \right| \right) r + \sum_{i=3}^6 \|A_{l,i}\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \left(\|\tilde{z}_2^{(i)}\|_{1,\nu} r^2 + \|\tilde{z}_3^{(i)}\|_{1,\nu} r^3 \right),
\end{aligned}$$

et pour $l = 3, 4, 5, 6$

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(A[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c] \right)^{(l)} \right\|_{1,\nu} \\
& \leq \sum_{i=1}^2 \left\| A_{l,i}[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]^{(i)} \right\|_{1,\nu} + \sum_{i=3}^6 \left\| A_{l,i}[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c]^{(i)} \right\|_{1,\nu} \\
& \leq \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\|A_{l,i}\|_{1,\nu}}{\nu^m} + \sum_{i=3}^6 \left\| A_{l,i} \tilde{z}_1^{(i)} \right\|_{1,\nu} \right) r + \sum_{i=3}^6 \|A_{l,i}\|_{B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)} \left(\left\| \tilde{z}_2^{(i)} \right\|_{1,\nu} r^2 + \left\| \tilde{z}_3^{(i)} \right\|_{1,\nu} r^3 \right).
\end{aligned}$$

Les termes quadratiques et cubiques n'ont pas besoin d'être évalué avec beaucoup de précision. C'est pourquoi ils seront calculés différemment du terme devant r . Ceci permet de simplifier grandement les calculs et ainsi d'accélérer l'algorithme lorsqu'il sera le temps d'effectuer les preuves à l'aide de l'ordinateur. Il est d'abord utile de constater que pour $y \in \ell_\nu^1$, on a que

$$\sum_{k \geq 1} |y_{k \pm 1}| \nu^k = \frac{1}{\nu} \sum_{k \geq 2} |y_k| \nu^k + \nu \sum_{k \geq 0} |y_k| \nu^k \leq \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \sum_{k \geq 0} |y_k| \nu^k = \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \|y\|_{1,\nu},$$

ce qui permet de calculer simplement les termes survenant dans les termes d'ordre supérieur. Dans le cas particulier de r^2 , en calquant cette démarche ainsi qu'en utilisant les estimés sur les produits de convolution, pour le calcul de $\left\| \tilde{z}_2^{(3)} \right\|_{1,\nu}$, on obtient

$$\sum_{k \geq 1} |\tilde{z}_{2,k}^{(3)}| \nu^k \leq 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\left\| \bar{x}_0^{(1)} \right\|_{1,\nu} + \left\| \bar{x}_0^{(2)} \right\|_{1,\nu} + \left\| \Delta \bar{x}^{(1)} \right\|_{1,\nu} \right. \\
\left. + \left\| \Delta \bar{x}^{(2)} \right\|_{1,\nu} + 1 + \bar{L}_0 + \Delta \bar{L} \right).$$

De même, dans les autres cas, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 1} |\tilde{z}_{2,k}^{(4)}| \nu^k & \leq 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right), \\
\sum_{k \geq 1} |\tilde{z}_{2,k}^{(5)}| \nu^k & \leq 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right), \\
\sum_{k \geq 1} |\tilde{z}_{2,k}^{(6)}| \nu^k & \leq 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) (\beta_1 + 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant ceci ainsi que la borne sur $z_{i,0}^{(2)}$ définie en (3.11), on trouve que

$$\left\| \tilde{z}_2^{(3)} \right\|_{1,\nu} \leq \rho \Lambda^{(1)} + 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \left(\left\| \bar{x}_0^{(1)} \right\|_{1,\nu} + \left\| \bar{x}_0^{(2)} \right\|_{1,\nu} + \left\| \Delta \bar{x}^{(1)} \right\|_{1,\nu} \right. \\
\left. + \left\| \Delta \bar{x}^{(2)} \right\|_{1,\nu} + 1 + \bar{L}_0 + \Delta \bar{L} \right), \quad (3.13)$$

$$\left\| \tilde{z}_2^{(4)} \right\|_{1,\nu} \leq \rho \Lambda^{(2)} + 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right), \quad (3.14)$$

$$\left\| \tilde{z}_2^{(5)} \right\|_{1,\nu} \leq \rho \Lambda^{(3)} + 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right), \quad (3.15)$$

$$\left\| \tilde{z}_2^{(6)} \right\|_{1,\nu} \leq \rho \Lambda^{(4)} + 2 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) (\beta_1 + 1). \quad (3.16)$$

Quant au terme devant r^3 , seul $\tilde{z}_i^{(3)}$ est non nul. Il n'y a rien à calculer dans les cas $i = 4, 5, 6$. Pour le terme non nul, la démarche à suivre est la même que pour r^2 , on obtient donc

$$\begin{aligned} \|\tilde{z}_3^{(3)}\|_{1,\nu} &= \sum_{k \geq 1} \left(u_L(u^{(1)} * v^{(2)})_{k \pm 1} + u_L(u^{(2)} * v^{(1)})_{k \pm 1} + v_L(u^{(1)} * u^{(2)})_{k \pm 1} \right) \nu^k \\ &\leq 3 \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right). \end{aligned}$$

Pour ce qui est du terme devant r , on tente de garder le plus de termes possible réunis ensemble afin d'obtenir une borne qui sera suffisamment petite. Dans le cas $l = 1, 2$, on a que

$$\sum_{i=3}^6 \left| A_{l,i} \tilde{z}_i^{(1)} \right| \leq \sum_{i=3}^6 |(A_{l,i})_0| \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} + \frac{1}{\nu^m} \right) + \sum_{i=3}^6 \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,i})_k \tilde{z}_{1,k}^{(i)} \right|.$$

Ce sont des sommes finies, en effet la queue de $(A_{l,i})_k \tilde{z}_{1,k}^{(i)}$ est constituée de 0 pour les dimensions supérieures par définition de $(A_{l,i})_k$. Ces sommes peuvent être évaluées directement en remplaçant les $\tilde{z}_{i,k}^{(1)}$ par les valeurs données précédemment. On obtient que

$$\left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_k \tilde{z}_{1,k}^{(3)} \right| = \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_k \begin{pmatrix} \bar{L}_0 [(\bar{x}_{1,0} * w^{(2)})_{k \pm 1} + (w^{(1)} * \bar{x}_{2,0})_{k \pm 1} + \delta_{k,m-1} (v^{(2)})_{k \pm 1}] \\ + s(v_L [(\Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1} + (\bar{x}_{1,0} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_{2,0})_{k \pm 1}] \\ + \Delta \bar{L} [v_{k \pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_{1,0} * v^{(2)})_{k \pm 1} + (v^{(1)} * \bar{x}_{2,0})_{k \pm 1}] \\ + \bar{L}_0 [(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k \pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1}] \\ + s^2 (v_L (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1} \\ + \Delta \bar{L} [(\Delta \bar{x}^{(1)} * v^{(2)})_{k \pm 1} + (v^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1}]) \end{pmatrix} \right|.$$

Rappelons que dans le cas des suites de coefficients de Tchebychev, on peut étendre la définition de $a \in \ell_\nu^1$ à $a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ où $a_k = a_{-k}$. Pour borner le produit de convolution plusieurs choix sont possibles. En effet, afin de faire disparaître la dépendance de certains termes en v , un point quelconque dans une boule autour de l'approximation, et d'obtenir une borne uniforme qui permet de majorer le suprémum, on peut simplement toujours utiliser le fait que $|v_{\infty}^{(i)}| \leq 1$ et calculer le produit de convolution de notre approximation avec la suite $\omega = \left\{ \frac{\delta_{k \geq m}}{\nu^k} \right\}_{k=0}^{\infty}$. Ce qui est une borne valide pour tous les points dans la boule unité. Ce choix est généralement fait pour simplifier le tout. Cependant, le résultat suivant peut être utilisé afin de gagner de la précision dans les approximations.

Lemme 3.2.6. *Soit $v \in \ell_\nu^1$ tel que $\|v\|_{1,\nu} = 1$ et $\bar{x} = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_{m-1}, 0, \dots)$. Alors pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a*

$$|(v * \bar{x})_j| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|\bar{x}_{|j-k|}|}{\nu^k}.$$

Remarque 3.2.7. *Comme $|\bar{x}_{|j-k|}| \neq 0$ seulement si $|j-k| < m$, on cherche en fait la valeur maximale parmi un nombre fini de valeurs non nulles. Donc ce suprémum existe et est aisément calculable.*

Démonstration. Par la remarque, il est clair que $\bar{x} \in \ell_\nu^\infty$ on a que

$$|(v * \bar{x})_j| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k \bar{x}_{|j-k|} \right|.$$

Il est alors possible d'appliquer le Lemme 1.2.8. Ce qui fournit le résultat voulu. \square

Dans le cas présenté ici, le choix de la borne est celle obtenue via le Lemme 3.2.6. D'abord, il est utile de remarquer que pour $v \in \ell_\nu^1$ tel que $\|v\|_{1,\nu} = 1$, on a que pour tout $k \geq 1$

$$|v_{k+1} - v_{k-1}| \leq |v_{k+1}| + |v_{k-1}| \leq \frac{1}{\nu^{k+1}} + \frac{1}{\nu^{k-1}} \leq \frac{2}{\nu^{k-1}}.$$

Certains termes feront tous intervenir un tel inconnu, c'est pourquoi il sera nécessaire de prendre la valeur absolue pour chacun d'eux. Dans le but d'alléger la notation, $|A_{i,j}|$ dénotera le sous bloc $A_{i,j}$ de A auquel chaque entrée a été remplacée par sa valeur absolue. Aussi, pour $k \geq 1$, on pose

$$\begin{aligned} z_k^{(3)} &\stackrel{\text{def}}{=} |\Delta \bar{L}| \left[\frac{2}{\nu^{k-1}} + \omega_{k\pm 1}^{(1)} + \omega_{k\pm 1}^{(2)} \right] + [\bar{L}_0 + |\Delta \bar{L}|] [\Delta \omega_{k\pm 1}^{(1)} + \Delta \omega_{k\pm 1}^{(2)}] + \bar{L}_0 [\omega_{k\pm 1}^{(1,I)} + \omega_{k\pm 1}^{(2,I)}], \\ z_k^{(4)} &\stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{\Delta \bar{L}}{\nu^{k-1}}, \quad z_k^{(5)} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{\Delta \bar{L}}{\nu^{k-1}}, \quad z_k^{(6)} \stackrel{\text{def}}{=} 2 \frac{(|\bar{L}_0 \Delta \beta + \Delta \bar{L} \beta_0| + |\Delta \bar{L}|)}{\nu^{k-1}} + 2 \frac{|\Delta \bar{L} \Delta \beta|}{\nu^{k-1}}. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir les bornes sur la partie finie. Les bornes $\omega_{k\pm 1}^{(i)}$ sont les bornes sur les produits de convolution faisant intervenir $\bar{x}^{(i)}$ obtenues en appliquant le Lemme 3.2.6 (respectivement $\Delta \omega^{(i)}$ avec $\Delta \bar{x}^{(i)}$ et $\omega^{(i,I)}$ avec la convolution $(\bar{x}^{(i)} w^{(j)})_k$). Dans le cas $l = 1, 2$, on a que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_k \tilde{z}_{3,k}^{(1)} \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_k (\Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k\pm 1}) \right| \\ &\quad + |A|_{l,3}^{(m)} z^{(3,m)} + \frac{(|A|_{l,3})_{m-1} \bar{L}_0}{\nu^m} + \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_k (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right| \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,3}, \end{aligned}$$

où chaque v_i a été éliminé. Ce qui fournit une borne indépendante du suprémum, tel que voulu. De plus, en appliquant la même méthode dans les autres cas, on a que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,4})_k \tilde{z}_{4,k}^{(1)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,4})_k (\bar{L}_0 \delta_{k,m-1} v_{k+1}^{(3)} + s [\Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(3)} + v_L \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}]) \right| \\ &\leq \frac{(|A|_{l,4})_{m-1} \bar{L}_0}{\nu^m} + |A|_{l,4}^{(m)} z^{(4,m)} + \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,4})_k \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} \right| \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,4}, \\ \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,5})_k \tilde{z}_{5,k}^{(1)} \right| &\leq \frac{(|A|_{l,5})_{m-1} \bar{L}_0}{\nu^m} + |A|_{l,5}^{(m)} z^{(5,m)} + \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,5})_k \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(4)} \right| \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,5}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,6})_k \tilde{z}_{6,k}^{(1)} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,6})_k \left(\begin{aligned} &\delta_{k,m-1} \bar{L}_0 [\beta_0 v_{k+1}^{(3)} + v_{k+1}^{(1)}] \\ &+ s(v_L [\Delta \beta \bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(1)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}] + \Delta \bar{L} v_{k\pm 1}^{(1)} \\ &+ [\bar{L}_0 \Delta \beta + \Delta \bar{L} \beta_0] v_{k\pm 1}^{(3)}) + s^2 [v_L \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{L} \Delta \beta v_{k\pm 1}^{(3)}] \end{aligned} \right) \right| \\
&\leq (|A|_{l,6})_{m-1} \left(\frac{\bar{L}_0}{\nu^m} [\beta_0 + 1] \right) + |A|_{l,6}^{(m)} z^{(6,m)} \\
&\quad + \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,6})_k (\Delta \beta \bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)} + \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(1)} + \beta_0 \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)}) \right| + \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,6})_k \Delta \beta \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} \right| \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,6}.
\end{aligned}$$

Dans le cas $l = 3, 4, 5, 6$, on s'intéresse à la norme ℓ_ν^1 puisque l'image que l'on tente de borner est dans cet espace. On sépare $\|A_{l,i} \tilde{z}_i^{(1)}\|_{1,\nu}$ en 3 termes. Cette séparation étant justifiée par la manière dont la borne $z_{i,0}^{(1)}$ et l'opérateur A ont été définis. Grâce à (3.11), on obtient que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=3}^6 \|A_{l,i} \tilde{z}_i^{(1)}\|_\nu &\leq \sum_{i=3}^6 \left(|(A_{l,i} \tilde{z}_i^{(1)})_0| + \sum_{j=1}^{m-1} |(A_{l,i} \tilde{z}_i^{(1)})_j| \nu^j + \sum_{j \geq m} |(A_{l,i} \tilde{z}_i^{(1)})_j| \nu^j \right) \\
&\leq \left(\frac{8\pi \rho r_m^I}{\nu_s \ln \left(\frac{\nu_s}{\rho} \right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) \sum_{i=3}^6 \sum_{j=0}^{m-1} |(A_{l,i})_{j,0}| \\
&\quad + 2 \sum_{i=3}^6 \left(\sum_{j=1}^{m-1} |(A_{l,i}^{(m)} \tilde{z}_i^{(1,m)})_j| \nu^j \right) + 2 \sum_{j \geq m} \frac{1}{2^j} |\tilde{z}_{l,j}^{(1)}| \nu^j. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Le premier terme de (3.17) représente la somme de tous les termes ci-dessous, traités en quatre cas différents. La méthode afin de majorer ce terme est similaire aux cas $l = 1, 2$. Ainsi, on définit $\mathcal{Z}_{l,i}$ pour $i = 3, 4, 5, 6$. Ces bornes étant très longues et similaires aux cas précédents, elle se trouve à l'Annexe A afin d'alléger un peu la lecture.

Pour ce qui est du dernier terme dans (3.17), on utilise la même technique pour le borner que dans le cas des coefficients z^2 et z^3 pour borner les termes qui ne font pas intervenir ν_L . Quant aux autres, on procède de la même façon que pour la définition de la borne \tilde{Y} . Ainsi,

on trouve que

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq m} \frac{|\tilde{z}_{3,j}^{(1)}|}{j} \nu^j &\leq \frac{1}{2m} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) (\bar{L}_0 + |\Delta \bar{L}|) \left(\|\bar{x}_0^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\bar{x}_0^{(2)}\|_{1,\nu} + \|\Delta \bar{x}^{(1)}\|_{1,\nu} + \|\Delta \bar{x}^{(2)}\|_{1,\nu} + 1 \right) \\
&\quad + \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{\nu^k}{k} \cdot \left(|(\bar{x}_0^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k \pm 1}| + |(\bar{x}_0^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1}| + |(\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_0^{(2)})_{k \pm 1}| \right) \\
&\quad + \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{\nu^k}{k} \cdot |(\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k \pm 1}| + \frac{\nu^m}{m} \left(|\Delta \bar{x}_{m-1}^{(2)}| + |\bar{x}_{0,m-1}^{(2)}| \right) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{z}_3^\infty, \\
\sum_{j \geq m} \frac{|\tilde{z}_{4,j}^{(1)}|}{j} \nu^j &\leq \frac{1}{2m} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) (\bar{L}_0 + |\Delta \bar{L}|) + \frac{\nu^m}{m} \left(|\bar{x}_{0,m-1}^{(3)}| + |\Delta \bar{x}_{m-1}^{(3)}| \right) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{z}_4^\infty, \\
\sum_{j \geq m} \frac{|\tilde{z}_{5,j}^{(1)}|}{j} \nu^j &\leq \frac{1}{2m} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) (\bar{L}_0 + |\Delta \bar{L}|) + \frac{\nu^m}{m} \left(|\bar{x}_{0,m-1}^{(4)}| + |\Delta \bar{x}_{m-1}^{(4)}| \right) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{z}_5^\infty, \\
\sum_{j \geq m} \frac{|\tilde{z}_{6,j}^{(1)}|}{j} \nu^j &\leq \frac{1}{2m} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) (\bar{L}_0 + |\Delta \bar{L}|) (1 + \beta_1) \\
&\quad + \frac{\nu^m}{m} \left(\beta_1 \left(|\bar{x}_{0,m-1}^{(3)}| + |\Delta \bar{x}_{m-1}^{(3)}| \right) + |\bar{x}_{0,m-1}^{(1)}| + |\Delta \bar{x}_{m-1}^{(1)}| \right) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{z}_6^\infty.
\end{aligned}$$

Comme tous les termes sont maintenant bornés par une des quantités données explicitement ci-haut, il est désormais possible de définir la borne \tilde{Z} qui satisfait la condition donnée par (1.13). Encore une fois, on traite les cas dans \mathbb{R} et les cas dans ℓ_ν^1 séparément. Les bornes utilisées dans la définition de $\tilde{Z}_2^{(l)}$, définies en (3.13),(3.14),(3.15) et (3.16), ne seront pas réécrites afin d'alléger l'écriture. Dans le premier cas, c'est-à-dire pour $l = 1, 2$, on pose

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_1^{(l)} &= \sum_{i=1}^2 \frac{|A_{l,i}|}{\nu^m} + \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) \sum_{i=3}^6 |(A_{l,i})_0| + \sum_{i=3}^6 \mathcal{Z}_{l,i}, \\
\tilde{Z}_2^{(l)} &= \sum_{i=3}^6 \|A_{l,i}\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \|\tilde{z}_2^{(i)}\|_{1,\nu}, \\
\tilde{Z}_3^{(l)} &= 3 \|A_{l,3}\|_{\infty, \frac{1}{\nu}} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right),
\end{aligned}$$

et dans le cas $l = 3, 4, 5, 6$, on pose

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_1^{(l)} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\|A_{l,i}\|_{1,\nu}}{\nu^m} + \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) \sum_{i=3}^6 \sum_{j=1}^{m-1} |(A_{l,i})_{j,0}| + \sum_{i=3}^6 \mathcal{Z}_{l,i} + \tilde{z}_l^\infty, \\
\tilde{Z}_2^{(l)} &= \sum_{i=3}^6 \|A_{l,i}\|_{B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)} \|\tilde{z}_2^{(i)}\|_{1,\nu}, \\
\tilde{Z}_3^{(l)} &= 3 \|A_{l,3}\|_{B(\ell_\nu^1, \ell_\nu^1)} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right).
\end{aligned}$$

Finalement, grâce à la démarche suivie dans cette section, on sait que pour tout $i = 1, \dots, 6$ on a

$$\sup_{b,c \in B(r)} \left\| (DT(\bar{x} + b)c)^{(i)} \right\|_{X^{(i)}} \leq \left(\tilde{Z}_0^{(i)} + \tilde{Z}_1^{(i)} \right) r + \tilde{Z}_2^{(i)} r^2 + \tilde{Z}_3^{(i)} r^3.$$

Ce qui est le résultat voulu. Maintenant qu'on a défini toutes les bornes définies en (1.12) et (1.13), il est possible de définir les polynômes de rayon.

3.2.3 Utilisation du principe de contraction uniforme

Soient les bornes \tilde{Y} et \tilde{Z} telles que définies précédemment, on pose

$$\tilde{P}^{(l)}(r) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{Y}^{(l)} + \left(\tilde{Z}_0^{(l)} + \tilde{Z}_1^{(l)} - 1 \right) r + \tilde{Z}_2^{(l)} r^2 + \tilde{Z}_3^{(l)} r^3.$$

Alors, trouver $r > 0$ tel que $\tilde{P}^{(i)}(r)$ est négatif pour tout $i = 1, \dots, 6$ fournit les conditions nécessaires à l'application du Théorème 1.4.6, grâce à la Proposition 1.4.8. Comme ces bornes sont valides pour tout s dans l'intervalle $[0, 1]$, ceci permet de conclure qu'il existe une connexion homocline à 0 pour l'équation du pont suspendu, et ce, pour tout $\beta = \beta_s \in [\beta_0, \beta_1]$. Le rayon nous fournit aussi une borne sur l'erreur.

Proposition 3.2.8. *Pour tout $s \in [0, 1]$, on définit \bar{x}_s une approximation obtenue numériquement des coefficients de Tchebychev dans le cas $\beta = \beta_s$. Ainsi, la solution approchée de l'équation du pont suspendu est donnée par*

$$\bar{v}_s^{(i)}(t) = \bar{x}_{s,0}^{(i)} + 2 \sum_{k=0}^{m-1} \bar{x}_{s,k}^{(i)} T_k(t).$$

On définit $\bar{v}_s = \left(\bar{v}_s^{(1)}, \bar{v}_s^{(2)}, \bar{v}_s^{(3)}, \bar{v}_s^{(4)} \right)$. De plus, on suppose que \bar{L}_s et $\bar{\psi}_s$ sont tels que

$$\left(\begin{array}{c} \bar{v}_s^{(2)}(-1) \\ \bar{v}_s^{(4)}(-1) \\ \bar{v}_s(t) + \bar{L}_s \int_t^1 \Psi(\bar{v}_s(w)) dw - P_s^{(N)}(\bar{\psi}_s) \end{array} \right) \approx 0.$$

On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $1 \leq i \leq 6$, on a que $\tilde{P}^{(i)}(r) < 0$. Alors, on a montré que, pour tout $s \in [0, 1]$, il existe $x_s = \left(L_s, \psi_s, \left\{ x_{s,k}^{(1)} \right\}_{k \geq 0}, \left\{ x_{s,k}^{(2)} \right\}_{k \geq 0}, \left\{ x_{s,k}^{(3)} \right\}_{k \geq 0}, \left\{ x_{s,k}^{(4)} \right\}_{k \geq 0} \right)$ une solution au problème du pont suspendu pour $\beta = \beta_s$, avec

$$v_s^{(i)}(t) = x_{s,0}^{(i)} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} x_{s,k}^{(i)} T_k(t),$$

telle que

$$\left(\begin{array}{c} v_s^{(2)}(-1) \\ v_s^{(4)}(-1) \\ v_s(t) + L_s \int_t^1 \Psi(v_s(w)) dw - P_s(\psi_s) \end{array} \right) = 0,$$

et ce, pour tout $s \in [0, 1]$. De plus, P_s est la paramétrisation exacte de la variété stable locale pour $\beta = \beta_s$.

Démonstration. La Proposition 1.4.8 garanti que, pour chaque $s \in [0, 1]$, il existe une unique solution x_s au problème $F_s = 0$ dans la boule de rayon r autour de l'approximation calculée numériquement. Cette solution est donnée par

$$x_s = \left(L_s, \psi_s, \left\{ x_{s,k}^{(1)} \right\}_{k \geq 0}, \left\{ x_{s,k}^{(2)} \right\}_{k \geq 0}, \left\{ x_{s,k}^{(3)} \right\}_{k \geq 0}, \left\{ x_{s,k}^{(4)} \right\}_{k \geq 0} \right).$$

Ainsi, par définition de F_s , les suites obtenues constituent les coefficients de Tchebychev de la connexion homocline recherchée. De plus, on a que

$$\max \left\{ |L_s - \bar{L}_s|, |\psi_s - \bar{\psi}_s|, \max_{i=1,2,3,4} \|x_s^{(i)} - \bar{x}_s^{(i)}\|_{1,\nu} \right\} = \|x_s - \bar{x}_s\|_X \leq r.$$

Ce qui permet d'obtenir la série d'inégalités suivante

$$\begin{aligned} \left\| v_s^{(i)}(t) - \bar{v}_s^{(i)}(t) \right\|_{\infty} &= \left\| x_{s,0}^{(i)} - \bar{x}_{s,0}^{(i)} + 2 \sum_{k \geq 1} \left(x_{s,k}^{(i)} - \bar{x}_{s,k}^{(i)} \right) T_k(t) \right\|_{\infty} \\ &\leq \left| x_{s,0}^{(i)} - \bar{x}_{s,0}^{(i)} \right| + 2 \sum_{k \geq 1} \left| x_{s,k}^{(i)} - \bar{x}_{s,k}^{(i)} \right| \nu^k \\ &= \left\| x_{s,k}^{(i)} - \bar{x}_{s,k}^{(i)} \right\|_{1,\nu} \\ &\leq r. \end{aligned}$$

□

Remarquons qu'il est difficile d'obtenir le même genre d'estimation d'erreur en norme infinie lorsque l'on considère la solution dans l'échelle de temps initiale puisque la valeur exacte du changement d'échelle de temps n'est pas connue. De plus le changement de variable $v^{(1)} = e^{u^{(1)}} - 1$ agrandit grandement l'erreur pour des temps loins de zéro si on tente de considérer l'erreur d'approximation de la solution du premier système qui avait été obtenu au Chapitre 1, donné par (1.1) . C'est pourquoi il est difficile de tracer la solution dans le système initial avec l'erreur associée en chaque temps. Cependant, la méthode a garanti l'existence d'une telle solution.

Le chapitre suivant est consacré à la présentation de résultats et d'astuces à utiliser afin d'obtenir la preuve avec succès.

Chapitre 4

Application de la méthode et résultats

On s'intéresse d'abord aux détails concernant la recherche des approximations et certains résultats sont présentés.

4.1 Obtention des approximations

L'application des techniques élaborées aux Chapitres 2 et 3 nécessite avant tout une approximation numérique de la solution. On s'intéresse d'abord aux coefficients de la variété stable locale pour une valeur fixe de β . Comme les premiers coefficients dépendent de l'équilibre et des vecteurs propres, qui sont connus, il est possible d'appliquer la méthode de Newton avec ces données comme point de départ ainsi que des zéros comme approximation des coefficients d'ordre supérieurs. On peut alors augmenter le nombre de coefficients en appliquant à nouveau la méthode de Newton au point obtenu à l'étape précédente. Une fois qu'une approximation a été obtenue pour une valeur de β , il est possible de l'utiliser comme point de départ pour obtenir une approximation pour une valeur de β différente mais suffisamment près. Ainsi, une seule approximation doit être obtenue à partir de rien.

Un autre aspect important du calcul de la variété stable locale est la grosseur de l'image de l'approximation obtenue. En effet, comme les valeurs propres obtenues sont des conjugués complexes, on sait que l'orbite s'approchera de l'équilibre en spirale. Il est alors préférable d'avoir à inclure le moins possible de cette spirale dans la partie couverte par les polynômes de Tchebychev puisque cette partie de la trajectoire pourrait compliquer le calcul des coefficients de Tchebychev. En d'autres mots, plus la variété obtenue sera grande, plus la partie restante sera facile à prouver en utilisant la technique du Chapitre 3. Ainsi, on utilise la technique développée dans Breden *et al.* (2015) afin de maximiser l'image de la variété stable locale calculée. Cette méthode est basée sur l'observation suivante. Si

$$P(\theta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha \theta^\alpha$$

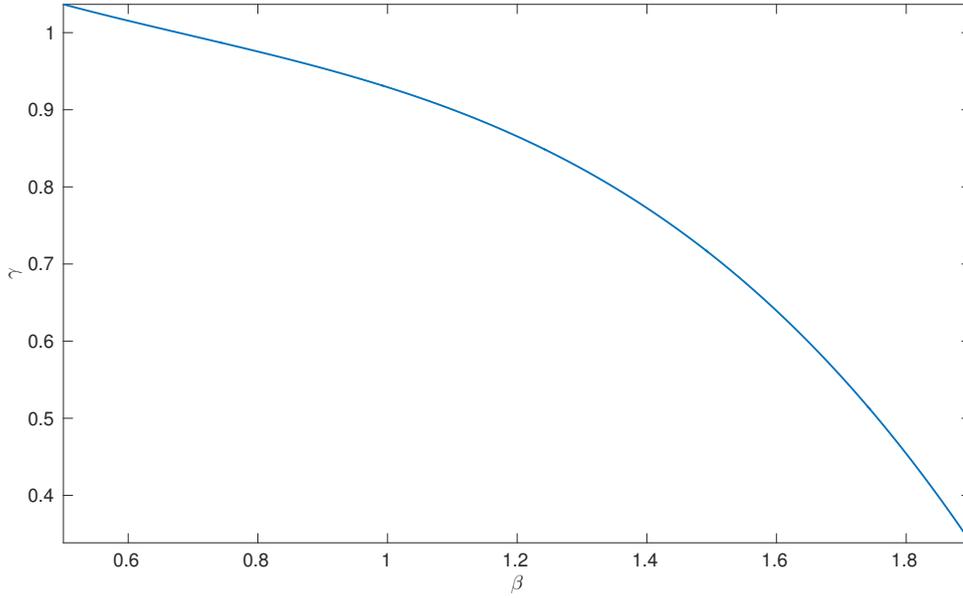


FIGURE 4.1: Interpolation avec un polynôme de degré 5 des facteurs γ utilisés pour l'approximation en β .

est la paramétrisation de la variété stable locale pour une certaine valeur de β , alors pour tout $\gamma > 0$,

$$\tilde{P}(\theta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \tilde{a}_\alpha \theta^\alpha, \quad \text{avec} \quad \tilde{a}_\alpha = \gamma^{|\alpha|} a_\alpha,$$

est aussi une paramétrisation de la variété stable locale pour la même valeur de β . Ainsi, si ces paramétrisations sont toutes deux valides pour $|\theta|_\infty \leq \nu$, l'image de \tilde{P} sera plus grande (resp. plus petite) que celle de P si $\gamma > 1$ (resp. $\gamma < 1$). Une autre manière d'obtenir une plus grande image serait de changer la valeur de ν , qui détermine le domaine de paramétrisation. Cependant, prendre $\nu \gg 1$ ou $\nu \ll 1$ amène une instabilité dans les calculs numériques. C'est pourquoi ν est toujours fixé près de 1 et la technique de changement d'échelle γ est introduite. Les valeurs de γ utilisées pour les preuves sont à la Figure 4.1. Un autre résultat de [Breden et al. \(2015\)](#) qui sera très utile est le fait que les bornes Y et Z , nécessaires à l'application de la méthode des polynômes de rayon, dépendent directement du changement d'échelle γ , ce qui permet de recalculer ces dernières rapidement pour différentes valeurs de γ . En pratique, on utilise le processus suivant :

- Calculer une approximation de la paramétrisation P pour $\beta = \beta_0$ (c'est-à-dire, les coefficients a_α).
- Calculer les bornes Y et Z pour β_0 sans la continuation, donc que $\Delta a = 0$ et $\Delta \beta = 0$ dans tous les estimés.
- Trouver la plus grande valeur de γ pour laquelle la preuve fonctionne. C'est-à-dire qu'il

est possible de déterminer $r > 0$ tel que $p^{(i)}(r) < 0$ pour chaque i , les polynômes de rayon associés aux coefficients $\tilde{a}_\alpha = \gamma^{|\alpha|} a_\alpha$. De plus, on s'assure que chaque terme de degré 1 des polynômes de rayon $p^{(i)}$ soit plus petit qu'une certaine valeur $\eta \in (-1, 0)$.

- Utiliser la paramétrisation \tilde{P} avec γ maximisé comme point de départ pour la continuation et utiliser les paramétrisations obtenues pour le problème aux conditions limites déterminant les coefficients de Tchebychev.

On s'intéresse désormais à l'introduction de la valeur η . Pour trouver une valeur négative des polynômes il faut absolument que le coefficient de degré 1 soit négatif puisque les autres sont tous positifs par construction. Or, si ce terme est déjà très près de 0 sans inclure les termes qui dépendront de la continuation, il faudra prendre $\Delta\beta$ très petit afin que le coefficient demeure négatif dans le cas de la preuve uniforme. On tente cependant de prendre $\Delta\beta$ le plus grand possible afin de minimiser le nombre de preuves nécessaires afin de démontrer l'existence d'une connexion homocline à 0 pour toutes les valeurs de $\beta \in [0.5, 1.9]$. Ainsi, l'ajout du paramètre η est un compromis : on obtient une variété plus petite que ce qui aurait pu être pris pour une preuve ponctuelle, ce qui rend la preuve du problème de Tchebychev plus compliquée, mais il est possible de prendre un plus grand pas sur β , ce qui rend la preuve en entier plus rapide au final.

Une fois l'approximation obtenue pour la valeur β_0 , on utilise cette dernière pour obtenir l'approximation en $\beta_1 > \beta_0$ et ainsi obtenir une approximation pour tout l'intervalle $[\beta_0, \beta_1]$. Il faut utiliser la même valeur de γ sur tout l'intervalle, cependant il est possible de changer cette valeur pour un autre intervalle. Pour ce qui est de l'orbite, on peut aisément obtenir une approximation de départ à partir de valeurs choisies au hasard. Une bonne approximation est facilement reconnaissable par le fait que les coefficients décroissent rapidement. De plus, une fois qu'une solution est obtenue elle est utilisable comme point de départ de la méthode de Newton pour les autres valeurs de β ou pour obtenir une approximation de dimension supérieure. Finalement, on s'intéresse à la largeur des intervalles sur lesquels la preuve retourne un rayon positif. Ce qui est possible de voir à la Figure 4.2.

4.2 Décroissance des coefficients et choix des bornes pour Tchebychev

Tel que mentionné, les approximations sont obtenues en appliquant la méthode de Newton au problème en dimension finie. Dans le cas des coefficients de la paramétrisation de la variété stable locale, la dimension du problème est telle que mentionné à la Remarque 2.1.4. Pour ce qui est du problème avec Tchebychev, si on garde m coefficients dans chaque série, le problème est de taille $4m + 2$. Le choix de m est fait de telle sorte que les derniers coefficients de chacune des quatre suites soient du même ordre que la précision machine. Il peut cependant

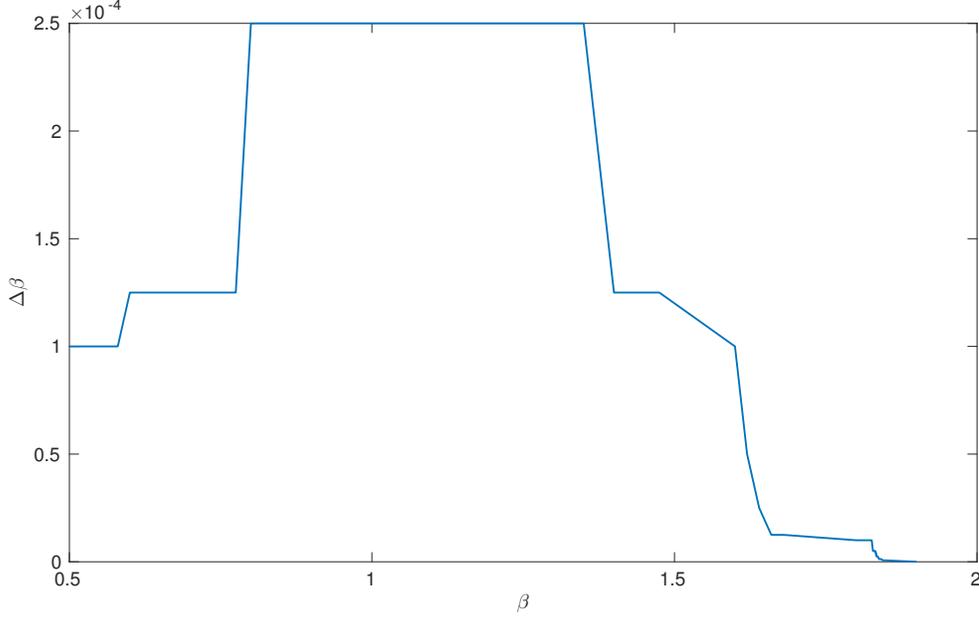


FIGURE 4.2: Valeur de $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_0$ en fonction de β .

être pratique de considérer une plus grosse projection.

Rappelons que la borne Z_1 doit être strictement inférieure à 1 pour que la technique des polynômes de rayon soit appliquée avec succès. Lorsque cette borne est légèrement supérieure à la valeur désirée il est possible de régler ce problème rapidement. En effet, certains termes dans les polynômes de rayon décroissent lorsque m augmente. Par exemple, dans la borne $\tilde{Z}_1^{(l)}$ pour $l = 1, 2$, on retrouve

$$\sum_{i=3}^6 |(A_{li})_0| \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln(\frac{\nu_s}{\rho})} + \frac{1}{\nu^m} \right),$$

qui est grandement affecté par la valeur de m . En effet, on prendra $\nu > 1$, ce qui a pour conséquence que si le terme $|(A_{li})_0| \cdot \frac{1}{\nu^m}$ est de trop grande taille, il est possible d'obtenir une valeur plus petite en imposant m de plus grande taille. Il en est de même pour

$$z_4^\infty = \frac{1}{2m} \left(\nu + \frac{1}{\nu} \right) \left(L_0 + |\Delta L| + |\bar{x}_{0,m}^{(3)}| + |\Delta \bar{x}_m^{(3)}| \right),$$

qui décroît lorsque m grandit. En effet, l'ajout de zéros à la fin de chaque suite de coefficients des approximations changera les valeurs de $|\bar{x}_{0,m}^{(3)}|$ et $|\Delta \bar{x}_m^{(3)}|$ pour zéro en plus du fait que le coefficient par lequel les termes non-nuls sont multipliés décroît. Un autre élément qui rend utile une telle manipulation est que les valeurs L_0 et $|\Delta L|$ ne sont pas affectées par l'augmentation de la dimension via l'ajout de zéros à la fin de chacune des suites de coefficients de Tchebychev. Quant au choix de ν , on sait de par le Théorème de Paley-Wiener (Théorème 1.3.5) que la suite des coefficients sera dans l'espace ℓ_ν^1 pour un certain ν qui dépend du taux de décroissance des

coefficients. Ce dernier dépend de la largeur de la bande sur laquelle la fonction est analytique, une condition qui est impossible à vérifier à priori puisque la solution n'est pas connue.

Dans la pratique, pour tenter d'obtenir une bonne approximation de la plus grande valeur de ν pour laquelle il sera envisageable de tenter la preuve, on considère la pente de la droite des moindres-carrés qui passe par le logarithme des coefficients. En effet, dans la preuve de (1.3.5) on obtient que

$$|a_n| \leq C\tilde{\nu}^{-n}.$$

En prenant le logarithme de chaque côté et en utilisant ses propriétés on remarque que cette approximation fournit un estimé de $\tilde{\nu}$. Le cas $\beta = 1$ est utilisé comme exemple pour illustrer ceci.

TABLE 4.1: 11 Coefficients de chaque série de Tchebychev de l'approximation de la solution pour $\beta = 1$.

k	$\bar{x}_k^{(1)}$	$\bar{x}_k^{(2)}$	$\bar{x}_k^{(3)}$	$\bar{x}_k^{(4)}$
0	$3.7474 \cdot 10^{-2}$	2.0351	$6.1081 \cdot 10^{-1}$	$-6.3165 \cdot 10^{-1}$
5	$3.9983 \cdot 10^{-2}$	$-9.4201 \cdot 10^{-3}$	$3.5110 \cdot 10^{-2}$	$3.9558 \cdot 10^{-2}$
10	$2.3777 \cdot 10^{-4}$	$-1.1440 \cdot 10^{-4}$	$2.4631 \cdot 10^{-4}$	$2.0104 \cdot 10^{-3}$
15	$1.7392 \cdot 10^{-6}$	$-2.8337 \cdot 10^{-6}$	$5.9193 \cdot 10^{-6}$	$9.0704 \cdot 10^{-5}$
20	$5.0623 \cdot 10^{-6}$	$-6.1177 \cdot 10^{-8}$	$2.5820 \cdot 10^{-7}$	$3.4046 \cdot 10^{-6}$
25	$5.4551 \cdot 10^{-7}$	$-1.0255 \cdot 10^{-9}$	$1.1075 \cdot 10^{-8}$	$9.7882 \cdot 10^{-8}$
30	$3.1510 \cdot 10^{-8}$	$-7.7730 \cdot 10^{-12}$	$3.7353 \cdot 10^{-10}$	$1.7737 \cdot 10^{-9}$
35	$1.2082 \cdot 10^{-9}$	$2.3136 \cdot 10^{-13}$	$9.4832 \cdot 10^{-12}$	$6.6904 \cdot 10^{-13}$
40	$3.2402 \cdot 10^{-11}$	$1.1862 \cdot 10^{-14}$	$1.7343 \cdot 10^{-13}$	$-1.2670 \cdot 10^{-12}$
45	$5.8564 \cdot 10^{-13}$	$3.0566 \cdot 10^{-16}$	$1.9175 \cdot 10^{-15}$	$-5.1968 \cdot 10^{-14}$
50	$1.7951 \cdot 10^{-14}$	$-2.3318 \cdot 10^{-17}$	$1.9288 \cdot 10^{-16}$	$5.9163 \cdot 10^{-15}$

À la Table 4.1 on retrouve des coefficients de chacune des quatre suites obtenues numériquement. Le choix des indices donnés dans la table à été fait afin d'observer la décroissance des coefficients. On remarque que la première suite de coefficients n'a pas encore atteint la précision machine en $k = 50$, donc que le choix de $m = 51$ ne serait probablement pas suffisant afin d'effectuer la preuve avec succès. La Figure 4.3 montre le logarithme de la valeur absolue des 50 premiers coefficients de Tchebychev. La droite tracée en rouge est celle des moindres carrés. Les pentes obtenues sont respectivement de -0.6222 , -0.7842 , -0.7320 et -0.6799 . Donc que le ν qui pourrait fonctionner est

$$\tilde{\nu} \approx e^{0.6222} \approx 1.8630.$$

La preuve a été effectuée avec succès sur l'intervalle $\beta \in [1, 1.00005]$ avec $\nu = 1.013$ et le point milieu de l'intervalle sur lequel les polynômes de rayon sont tous négatifs est donné par $r = 2.2646 \cdot 10^{-4}$. La réussite de la preuve pour $\nu = 1.013$ alors que l'approximation obtenue

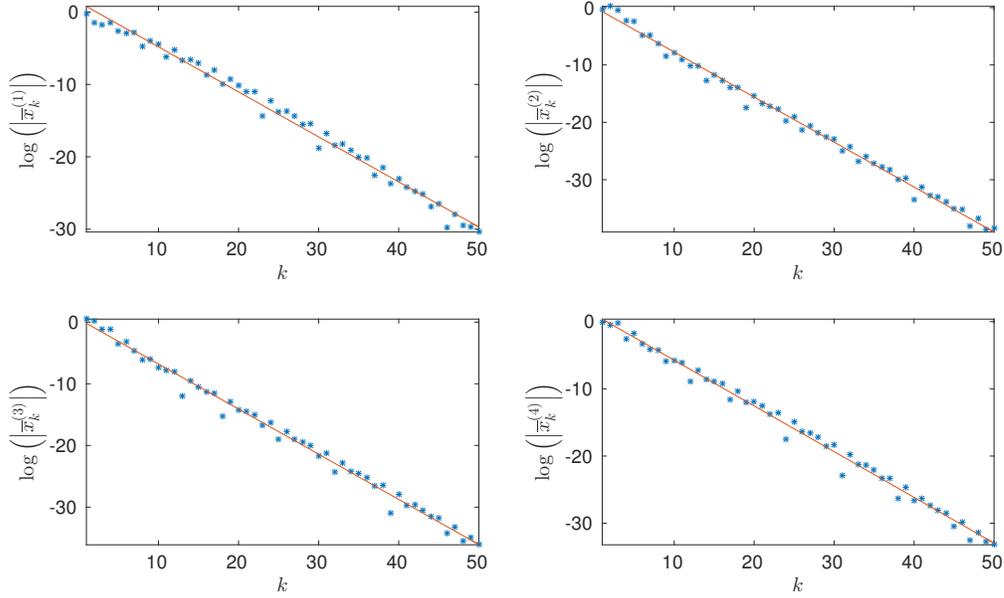


FIGURE 4.3: Logarithme de la valeur absolue des 50 premiers termes de chaque série de coefficients en fonction de leur indice et droite des moindres carrés pour $\beta = 1$

$\tilde{\nu} \approx 1.8630$ est largement plus grande ne contredit en rien le résultat obtenu en théorie puisque si $a \in \ell_{\tilde{\nu}^1}$ on a que

$$\begin{aligned} \|a\|_{1,\nu} &= |x_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \nu^k \\ &< |a_0| + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \tilde{\nu}^k = \|a\|_{1,\tilde{\nu}} < \infty. \end{aligned}$$

Ce qui permet d'affirmer que $a \in \ell_{\tilde{\nu}^1}$. Ce qui concorde avec le résultat obtenu via la méthode des polynômes de rayon.

Dans le cas de la connexion homocline, on remarque que l'opérateur $T_s(x) = x - AF_s(x)$ a été défini avec A l'approximation de l'inverse pour la valeur β à gauche de l'intervalle, donc indépendant de s . Un tel choix limite les espoirs de réussir la preuve sur un intervalle large. En effet, A serait plus approprié s'il était aussi variable, de telle sorte que l'opérateur A serait le meilleur choix possible pour tout $s \in [0, 1]$ alors que dans le cas fixe il ne l'est que pour $s = 0$. Cependant, les bornes nécessaires pour définir les polynômes de rayon deviendraient bien plus complexes à calculer puisqu'il faudrait inverser une matrice qui dépend de s . C'est pourquoi le choix de prendre A fixe a été fait.

De plus, le choix de A est fortement lié à celui de A^\dagger . Rappelons que pour la borne Z il faut borner

$$DT_s(\bar{x}_s + b)c = [I - AA^\dagger]c - A[DF_s(\bar{x}_s + b)c - A^\dagger c].$$

Le premier terme n'est pas source d'inquiétude puisque les choix de A et A^\dagger font que leur multiplication diffère de l'identité seulement à cause de la précision machine. Ce qui ne serait plus le cas si on changeait l'un ou l'autre des deux opérateurs. Aussi, l'opérateur A^\dagger a pour but d'annuler certains termes de $DF_s(\bar{x}_s + b)c$ qui causeraient un grand problème pour obtenir une borne assez petite s'ils étaient considérés. En effet, on a que $A^\dagger \approx DF_0(\bar{x}_0)$. On pourrait donc penser prendre $A^\dagger \approx DF_s(\bar{x}_s)$ mais la dépendance en s causerait les mêmes problèmes que pour A . En bref, de tels choix sont faits pour éviter d'empirer les calculs qui sont déjà très longs. De plus, ils sont faits au détriment de la largeur de l'intervalle $[\beta_0, \beta_1]$ mais sont essentiels au succès de la preuve.

Finalement, le graphe de la solution est présenté. À la Figure 4.4, le tracé de l'orbite pour l'intervalle de temps $[-L_0, L_0]$ a été esquissé avec l'approximation de la variété stable locale. La quatrième composante a été omise. On aperçoit donc l'orbite $(v^{(1)}(t), v^{(2)}(t), v^{(3)}(t))$. Cependant ce système a été obtenu via le changement de variable $v^{(1)} = e^{u^{(1)}} - 1$ après avoir été ramené à un système d'équations différentielles ordinaires d'ordre un plutôt qu'une équation différentielle ordinaire d'ordre quatre. C'est pourquoi à la Figure 4.5, seulement la première composante a été tracée. Les axes sont le temps t et la valeur prise par $v^{(1)}(t)$. Rappelons

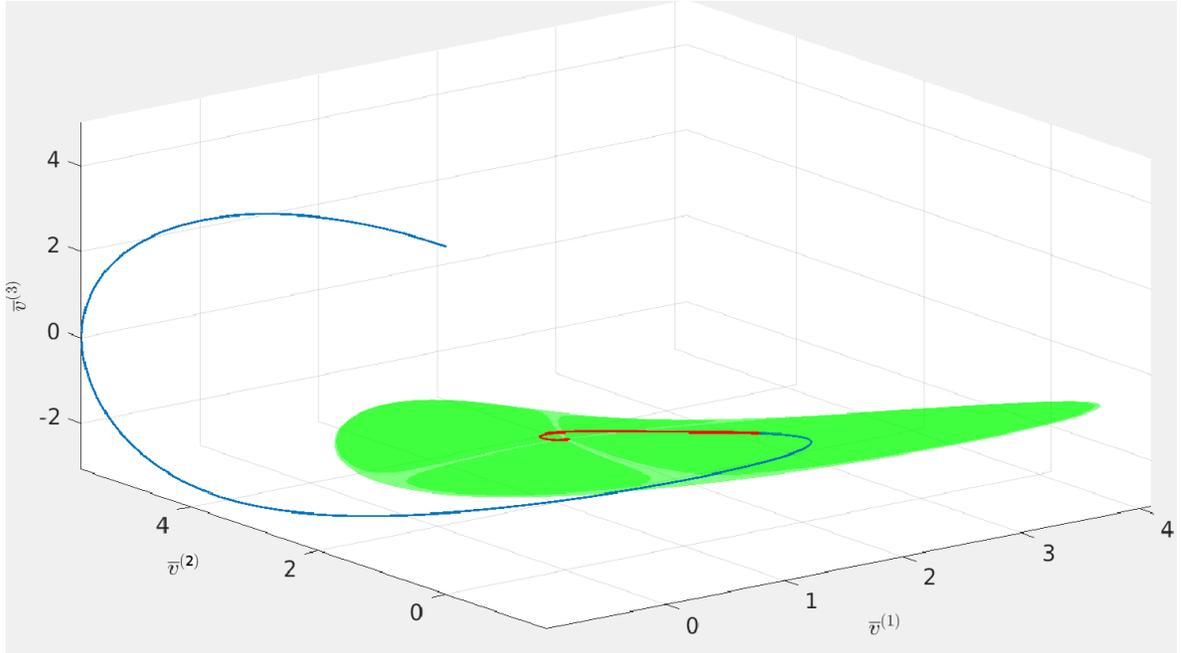


FIGURE 4.4: Affichage des trois premières dimensions de l'orbite obtenue pour $\beta = 1$ avec la variété stable locale

qu'on cherchait à obtenir une solution symétrique en temps. On a donc tracé la même solution en t et $-t$ pour tout temps. À la Figure 4.5, la solution semble passer à travers l'équilibre $v = 0$ près du temps $t = 3$, ce qui est normal, puisque les autres dimensions $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ et $v^{(4)}$ ne sont pas toutes nulles en même temps, ce que l'on remarque aisément à la Figure 4.4. Dans les deux cas, la partie en bleu est tracée en utilisant les polynômes de Tchebychev alors que la

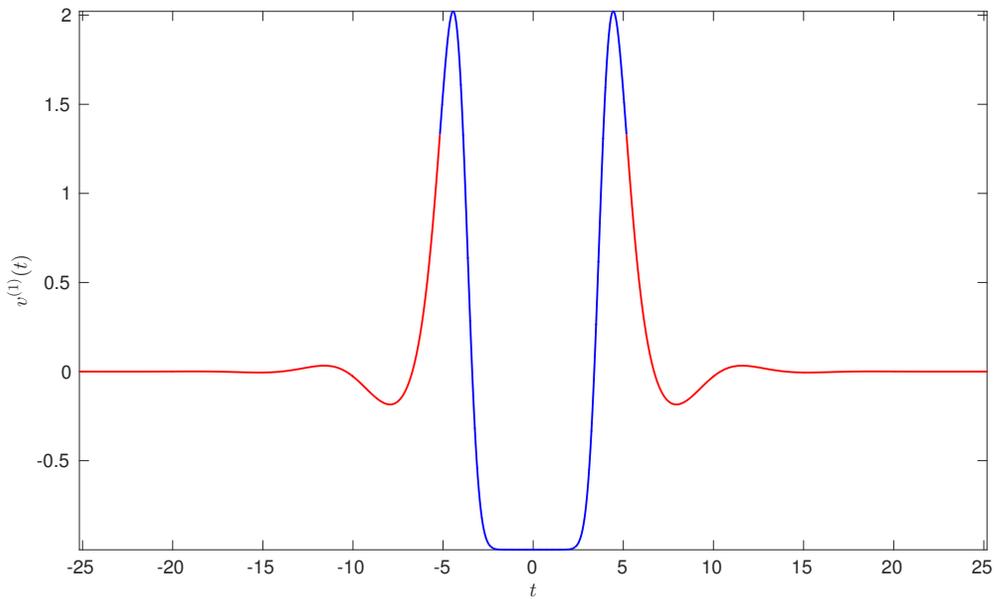


FIGURE 4.5: Affichage de $\bar{v}^{(1)}$ la solution pour $\beta = 1$.

partie en rouge est obtenue en utilisant la paramétrisation complexe de la variété stable. La dernière section explique brièvement comment tracer cette courbe.

4.3 Profil de solution via la paramétrisation de la variété stable locale

Rappelons d'abord qu'au Chapitre 3 l'évaluation de la paramétrisation se faisait en $\theta = (\rho \cos(\psi), \rho \sin(\psi))$ afin de s'assurer qu'on l'évalue pour des valeurs couvertes par la preuve faite au Chapitre 2. La Figure 4.6 permet de voir que c'est bel et bien le cas. En effet l'approximation de la variété vérifiée à partir de la technique des polynômes de rayon est illustrée en vert alors qu'en prenant $\rho = 0.9$ on l'évalue le long de la ligne rouge. Ainsi, on obtient un point de départ sur la variété stable locale validée et il est possible de tenter de tracer la solution. Soit Q la paramétrisation complexe de la variété stable locale. Par définition, cette dernière satisfait

$$\varphi(Q(\theta), t) = Q(e^{\Lambda t} \theta).$$

Cette relation permet d'approximer la partie non bornée de l'orbite à partir de l'approximation de la variété stable, et ce, sans connaître le flot exact. De plus, on cherche à savoir quelles valeurs de t il faut prendre afin de calculer la partie en rouge. Remarquons d'abord que pour

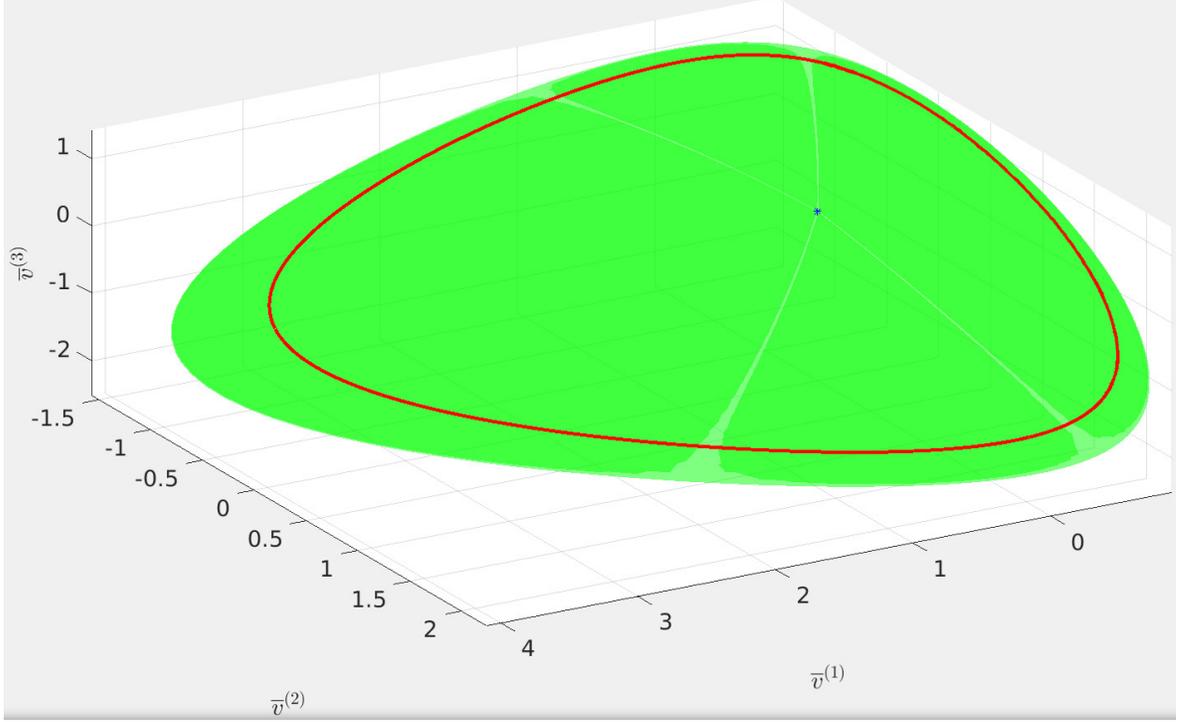


FIGURE 4.6: Variété stable locale pour $\beta = 1$ et partie sur laquelle elle est évaluée pour $\rho = 0.9$.

tout v et pour tout temps t_1, t_2 le flot φ satisfait

$$\begin{aligned}\varphi(v, 0) &= v, \\ \varphi(\varphi(v, t_2), t_1) &= \varphi(v, t_1 + t_2).\end{aligned}$$

Rappelons d'abord que l'on utilise la paramétrisation complexe Q d'une manière particulière afin d'obtenir les valeurs réelles. On a que

$$P(\theta) = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha (\theta_1 + \mathbf{i}\theta_2)^{\alpha_1} (\theta_1 - \mathbf{i}\theta_2)^{\alpha_2} = Q(\rho e^{\mathbf{i}\psi}, \rho e^{-\mathbf{i}\psi}).$$

Pour tout β , on sait que l'orbite que l'on cherche à tracer est déterminée par x_β , la solution fournie par le Théorème 4.3.1. On a alors

$$\varphi(v_\beta(-1), L_\beta) = Q_\beta(\rho e^{\mathbf{i}\psi}, \rho e^{-\mathbf{i}\psi}),$$

où $v_\beta(-1) \in \mathbb{R}^4$ est l'évaluation en -1 de chacune des fonctions $v_\beta^{(i)}$ données par des expansions complètes de Tchebychev, c'est-à-dire la valeur de l'orbite au temps 0. Ainsi, pour obtenir la partie infinie de l'orbite recherchée, c'est-à-dire pour tout temps $L_\beta + t$ avec $t \geq 0$, on utilise le fait que

$$\varphi(v_\beta(-1), L_\beta + t) = \varphi(\varphi(v_\beta(-1), L_\beta), t) = \varphi(Q_\beta(\rho e^{\mathbf{i}\psi}, \rho e^{-\mathbf{i}\psi}), t) = Q_\beta(e^{\Lambda_\beta t} \Theta_\beta),$$

où

$$\Theta_\beta = \begin{pmatrix} \rho e^{i\psi_\beta} \\ \rho e^{-i\psi_\beta} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il suffit de calculer $Q_\beta(e^{\Lambda_\beta t}\Theta_\beta)$ pour $t \geq 0$. Ce qui est possible de faire, rappelons que

$$\Lambda_\beta = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2-\beta} + i\frac{1}{2}\sqrt{2+\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2-\beta} - i\frac{1}{2}\sqrt{2+\beta} \end{pmatrix}.$$

Donc en utilisant ceci, on obtient que

$$e^{\Lambda_\beta t}\Theta_\beta = \begin{pmatrix} e^{t(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\beta} + i\frac{1}{2}\sqrt{2+\beta})} \rho e^{i\psi_\beta} \\ e^{t(-\frac{1}{2}\sqrt{2-\beta} - i\frac{1}{2}\sqrt{2+\beta})} \rho e^{-i\psi_\beta} \end{pmatrix}.$$

Ce qui permet de tracer la partie en rouge aux Figures 4.4 et 4.5. Dans les deux cas le graphe a été tracé avec $t \in [0, 20]$. On remarque que tel qu'anticipé, la solution se rapproche de l'origine en spirale. Ce qui confirme que la solution obtenue est une bonne approximation d'une connexion homocline à zéro, donc qu'on a bel et bien obtenu ce qui était recherché. Finalement, on conclut la présentation des résultats par le théorème suivant.

Théorème 4.3.1. *Pour toutes les valeurs du paramètre $\beta \in [0.5, 1.9]$, (2) admet une connexion homocline symétrique.*

Démonstration. La méthode décrite aux chapitres précédents peut être appliquée en utilisant le code MATLAB dont les détails sont à l'Annexe B. On suppose que cette méthode a été appliquée avec succès pour chacun des sous-intervalles $[\beta_0, \beta_1]$ recouvrant $[0.5, 1.9]$. La Proposition 3.2.8 fournit alors l'existence de $x_\beta = \left(L_\beta, \psi_\beta, \{x_{\beta,k}^{(1)}\}_{k \geq 0}, \{x_{\beta,k}^{(2)}\}_{k \geq 0}, \{x_{\beta,k}^{(3)}\}_{k \geq 0}, \{x_{\beta,k}^{(4)}\}_{k \geq 0} \right)$ une solution au problème du pont suspendu pour tout $\beta \in [0.5, 1.9]$. En effet, par construction on a que

$$V_\beta(t) = \left(v_\beta^{(1)}(t), v_\beta^{(2)}(t), v_\beta^{(3)}(t), v_\beta^{(4)}(t) \right),$$

où pour tout $i = 1, 2, 3, 4$

$$v_\beta^{(i)}(t) = x_{\beta,0}^{(i)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} x_{\beta,k}^{(i)} T_k(t),$$

est une solution au problème

$$\begin{pmatrix} v_\beta^{(2)}(-1) \\ v_\beta^{(4)}(-1) \\ V_\beta(t) + L_\beta \int_t^1 \Psi_\beta(V_\beta(w)) dw - P_\beta(\psi_\beta) \end{pmatrix} = 0,$$

et ce, pour tout $t \in [-1, 1]$. Ainsi, pour Ψ_β donné par (1.2), $V_\beta(t)$ est une solution de

$$\dot{v} = \Psi_\beta(v)$$

sur l'intervalle de temps $[-L_\beta, L_\beta]$ et est telle que $V_\beta(L_\beta) = P_\beta(\psi_\beta)$. Or, P_β satisfait

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_\beta(P_\beta(\theta), t) = 0, \quad (4.1)$$

où φ est le flot solution de $\dot{v} = \Psi_\beta(v)$. Ceci est satisfait pour tout θ dans le domaine de paramétrisation de P_β (voir la Remarque 1.1.2 pour la preuve de (4.1)). En particulier, $P_\beta(\psi_\beta) = P_\beta(\rho \cos(\psi_\beta), \rho \sin(\psi_\beta))$ est dans le domaine de paramétrisation étant donné que ρ a été choisi plus petit que la valeur ν_s utilisée pour la construction des polynômes de rayon. Ainsi, l'orbite donnée par V sur l'intervalle $[-L_\beta, L_\beta]$ et déterminée par $P_\beta(\psi_\beta)$ sur l'intervalle $[L_\beta, \infty)$ est une connexion homocline symétrique. Pour tout t , en utilisant le changement de variables

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t) &= \ln(v^{(1)}(t) + 1), \\ u^{(2)}(t) &= v^{(2)}(t), \\ u^{(3)}(t) &= v^{(3)}(t), \\ u^{(4)}(t) &= v^{(4)}(t), \end{aligned}$$

on obtient une connexion homocline de (2), ce qui est le résultat voulu. □

On remarque grâce à ce théorème que la technique décrite aux chapitres précédents fournit une preuve au théorème énoncé à l'introduction.

Conclusion

La méthode des polynômes de rayon a permis d'obtenir une preuve au résultat suivant.

Théorème. *Pour toutes les valeurs du paramètre $\beta \in [0.5, 1.9]$, (2) admet une connexion homocline symétrique.*

Bien que la solution exacte ne soit pas fournie, il a été possible de déterminer le voisinage autour de notre approximation dans lequel se trouve la solution. Ainsi, en traçant l'approximation dans un tube du même rayon que fourni par les polynômes, il est possible d'affirmer que la solution réelle se trouve entièrement dans ce tube. De plus, cette validation est valide pour toutes la valeurs du paramètre dans le même intervalle $[\beta_0, \beta_1]$ pour lequel une preuve a été réalisée.

Malgré la réussite de la preuve, cette méthode n'a pas que des avantages. En effet, le temps de calcul est très grand et il est crucial d'optimiser les algorithmes. La démarche peut être faite parallèlement, cependant les polynômes de rayons (de la variété et de la connexion homocline) doivent être réévalués pour chaque intervalle différent. Or, la largeur maximale des intervalles $[\beta_0, \beta_1]$ utilisés pour laquelle la technique permet d'obtenir une valeur négative des polynômes de rayon, et ainsi que la preuve réussisse, était de 10^{-4} . Ce qui fait que pour faire la preuve sur $[0.5, 1.9]$ en entier il faut exécuter l'algorithme plus de 14000 fois! Ce qui peut prendre énormément de temps, compte tenu que l'extension INTLAB du logiciel MATLAB rend les calculs plus longs en utilisant l'arithmétique des intervalles qui tient compte de la répercussion de l'erreur machine. Il est cependant primordial de tenir compte de cette erreur, qui pourrait potentiellement fausser certains des résultats obtenus.

Somme toute, la méthode a été appliquée avec succès à ce problème et, bien qu'elle soit particulière au problème étudié, il est envisageable de l'appliquer à d'autres problèmes de résolution d'équations différentielles. Ou même de tenter de l'étendre au calcul de connexions hétéroclines reliant des orbites périodiques. Une question survenant dans la mécanique céleste, dans le problème des 3 ou 4 corps par exemple.

Annexe A

Bornes $\mathcal{Z}_{l,i}$

On considère $l = 3, 4, 5, 6$. Le cas $i = 3$ est donné par

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_{l,3})_{j,k} \tilde{z}_{1,k}^{(3)} \right| \nu^j &\leq \sum_{j=1}^{m-1} \left(|(A_{l,3})_{j,0}| \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) + |(A_{l,3})_{j,m-1}| \frac{\bar{L}_0}{\nu^m} \right) \nu^j \\ &+ \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_{j,k} \left(\Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(2)} + (\bar{x}_{1,0} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} + (\Delta \bar{x}^{(1)} * \bar{x}_{2,0})_{k\pm 1} \right) \right| \nu^j \\ &+ \left\| |A_{l,3}^{(m)} z^{(3,m)}| \right\|_{1,\nu} + \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,3})_{j,k} (\Delta \bar{x}^{(1)} * \Delta \bar{x}^{(2)})_{k\pm 1} \right| \nu^j \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,3}, \end{aligned}$$

alors que le cas $i = 4$ est

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_{l,4})_{j,k} \tilde{z}_{1,k}^{(4)} \right| \nu^j &\leq \sum_{j=1}^{m-1} \left(|(A_{l,4})_{j,0}| \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) + |(A_{l,4})_{j,m-1}| \frac{\bar{L}_0}{\nu^m} \right) \nu^j \\ &+ \left\| |A_{l,4}^{(m)} z^{(4,m)}| \right\|_{1,\nu} + \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,4})_{j,k} \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} \right| \nu^j \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,4}, \end{aligned}$$

que le cas $i = 5$ est

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_{l,5})_{j,k} \tilde{z}_{1,k}^{(5)} \right| \nu^j &\leq \sum_{j=1}^{m-1} \left(|(A_{l,5})_{j,0}| \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) + |(A_{l,5})_{j,m-1}| \frac{\bar{L}_0}{\nu^m} \right) \nu^j \\ &+ \left\| |A_{l,5}^{(m)} z^{(5,m)}| \right\|_{1,\nu} + \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,5})_{j,k} \Delta \bar{x}_{k\pm 1}^{(4)} \right| \nu^j \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,5}, \end{aligned}$$

et finalement le cas $i = 6$ est donné par

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=0}^{m-1} (A_{l,6})_k \tilde{z}_{1,k}^{(6)} \right| \nu^j &\leq \sum_{j=1}^{m-1} \left(|(A_{l,6})_{j,0}| \left(\frac{8\pi\rho r_m^I}{\nu_s \ln\left(\frac{\nu_s}{\rho}\right)} + \frac{1}{\nu^m} \right) + |(A_{l,6})_{j,m-1}| \left(\frac{\bar{L}_0}{\nu^m} [\beta_0 + 1] \right) \right) \nu^j \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,6})_{j,k} \left(\Delta\beta \bar{x}_{0,k\pm 1}^{(3)} + \Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(1)} + \beta_0 \Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} \right) \right| \nu^j \\
&+ \sum_{j=1}^{m-1} \left| \sum_{k=1}^{m-1} (A_{l,6})_{j,k} \Delta\beta \Delta\bar{x}_{k\pm 1}^{(3)} \right| \nu^j + \left\| |A|_{l6}^{(m)} z^{(6,m)} \right\|_{1,\nu} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{Z}_{l,6}.
\end{aligned}$$

Annexe B

Programmes MATLAB

Le code peut être téléchargé à l'adresse :

<http://archimede.mat.ulaval.ca/jplessard/ChenMcKenna>.

Une approximation valide pour $\beta = 1$ est aussi fournie avec tout les éléments nécessaires à l'exécution de la preuve sur $[1, 1.00025]$. Avant l'exécution des codes, l'extension de MATLAB utilisant l'arithmétique des intervalles nommée INTLAB doit être démarrée. Il est possible de l'obtenir en consultant Rump (1999). Le code contient deux script exécutables directement. Le premier, *script1to11.m*, permet d'obtenir les approximations avec la méthode de Newton et de déterminer un rayon négatif des polynômes de rayon qui permettra d'appliquer la Proposition 1.4.8 et d'ensuite utiliser le principe de contraction d'uniforme afin d'obtenir l'existence d'une solution. Cette solution est ensuite utilisée pour conclure avec le Théorème 4.3.1. Les éléments essentiels pour exécuter ce code sont :

1. *deltabeta* ; la largeur de l'intervalle sur lequel la preuve est exécutée. En cas d'échec, le code divise l'intervalle en intervalles moins larges, et ce, jusqu'à un maximum de 10 sous-intervalles. Lorsque le maximum est atteint il est recommandé de ré-exécuter le code avec une valeur de *deltabeta* plus petite.
2. *nuS* = 1 est la valeur de ν pour la preuve du Chapitre 2. Tel que discuté au Chapitre 4, il est préférable d'utiliser 1 et de faire varier gamma, qui est l'échelle pour le vecteur propre.
3. *tol* = 10^{-17} est la tolérance utilisée pour les méthodes de Newton.
4. *rmax* = 10^{-8} est une borne supérieure au rayon que doit retourner la preuve ponctuelle de la variété stable. Ceci permet de se débarrasser de cas pour lesquels la preuve uniforme échoue car la preuve ponctuelle n'était pas suffisamment précise.
5. *linmax* = -0.5 est la valeur η décrite au chapitre 4.
6. *nu* = 1.013 est la valeur de ν utilisée dans la preuve du chapitre 3.
7. la structure Approximation contient les approximation initiales en $\beta_0 = 1$ et $\beta_1 = 1.00025$. C'est une variable du type 'structure' qui contient les approximations aux deux

extrémités sous forme de vecteurs colonnes, les valeurs de β et γ , le rayon pour lequel la méthode réussit et le nombre de zéros à ajouter à la fin de chaque série de Tchebychev (*.pad*). Il y a aussi le nombre de subdivisions nécessaires pour la preuve sur cet intervalle.

La valeur finale de la variable de boucle i peut être changée dans le cas où l'utilisateur désire effectuer des preuves hors de $[1; 1.1]$. Comme $\Delta\beta = \frac{10^{-3}}{4}$ dans ce cas ci, on a que la boucle stoppe après 400 preuves.

Le second script, *scriptIntlab*, utilise l'arithmétique des intervalles pour valider les résultats fournis par le premier script. La méthode de Newton n'est plus utilisée et il faut avoir des données enregistrées préalablement pour l'exécution de ce script. En effet, l'exécution d'un script contenant les mêmes lignes de code prend considérablement plus de temps lorsque les variables sont des intervalles. C'est pourquoi la preuve initiale est fait séparément et enregistrée dans un fichier *.mat* (nommé *Approximation1.mat* dans le cas fournis). Le script *scriptIntlab* imprime succès dans le cas où le rayon stocké est valide et échec autrement.

Bibliographie

- B. BOLLOBÁS : *Linear Analysis : an introductory course, second edition*. Cambridge mathematical textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. ISBN 0-521-65577-3.
- M. BREDEN, J.-P. LESSARD et J.D. MIRELES JAMES : Computation of maximal local (un)stable manifold patches by the parameterization method. *submitted*, 2015.
- B. BREUER, J. HORÁK, P. J. MCKENNA et M. PLUM : A computer-assisted existence and multiplicity proof for travelling waves in a nonlinearly supported beam. *J. Differential Equations*, 224(1):60–97, 2006. ISSN 0022-0396.
- J. CHEN et P.J. MCKENNA : Travelling waves in a nonlinearly suspended beam : theoretical results and numerical observations. *J. Differential Equations*, 136:325–355, 1997a.
- Y. CHEN et P. J. MCKENNA : Travelling waves in a nonlinearly suspended beam : some computational results and four open questions. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 355(1732):2175–2184, 1997b. ISSN 0962-8428. URL <http://dx.doi.org/10.1098/rsta.1997.0116>.
- S.N. CHOW et J.K. HALE : *Methods of bifurcation theory*, volume 251 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York, 1982. ISBN 0-387-90664-9.
- L.C. EVANS : *Partial Differential equations, second edition*, volume 19 de *graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2010. ISBN 978-0-8218-4974-3.
- G.B. FOLLAND : *Introduction to partial differential equations, second edition*. Princeton university press, 1995. ISBN 0-691-04361-2.
- A. HUNGRIA, J.-P. LESSARD et J.D. MIRELES-JAMES : Rigorous numerics for analytic solutions of differential equations : the radii polynomial approach. *Math. Comp.*, 2015.
- Y. ILYASHENKO et S. YAKOVENKO : *Lectures on analytic differential equations*, volume 86 de *graduate studies in mathematics*. American Mathematical Society, 2007. ISBN 978-0-8218-3667-5.

- P.J. MCKENNA et W. WALTER : Travelling waves in a suspension bridge. *SIAM J. Appl. Math.*, 50:703–715, 1990.
- J.D. MIRELES-JAMES et K. MISCHAIKOW : Rigorous a posteriori computation of (un)stable manifolds and connecting orbits for analytic maps. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2:957–1006, 2013.
- S.M. RUMP : Intlab - interval laboratory, in tibor csendes, editor, developments in reliable computing, pages 77-104. kluwer academic publishers, dordrecht, 1999. URL <http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>.
- S. SANTRA et J. WEI : Homoclinic solutions for fourth order traveling wave equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 41(5):2038–2056, 2009. ISSN 0036-1410. URL <http://dx.doi.org/10.1137/090755047>.
- D. SMETS et J.B. van den BERG : Homoclinic solutions for Swift-Hohenberg and suspension bridge type equations. *J. Differential Equations*, 184(1):78–96, 2002. ISSN 0022-0396. URL <http://dx.doi.org/10.1006/jdeq.2001.4135>.
- R. SZCZELINA et P. ZGLICZYŃSKI : A homoclinic orbit in a planar singular ode-a computer assisted proof. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 12(3):1541–1565, 2013.
- J.B. van den BERG, A. DESCHÊNES, J.-P. LESSARD et J.D. MIRELES JAMES : Stationary coexistence of hexagons and rolls via rigorous computations. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 14(2):942–979, 2015.
- D. WILCZAK : Symmetric heteroclinic connections in the michelson system : a computer assisted proof. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 4(3)(electronic):489–514, 2005.
- D. WILCZAK : The existence of shilnikov homoclinic orbits in the michelson system : a computer assisted proof. *Found. Comput. Math.*, 6(4):495–535, 2006.
- D. WILCZAK et P. ZGLICZYŃSKI : Heteroclinic connections between periodic orbits in planar restricted circular three-body problem - a computer assisted proof. *Comm. Math. Phys.*, 234(1):37–75, 2003.
- K. WÓJCIK et P. ZGLICZYŃSKI : On existence of infinitely many homoclinic solutions. *Monatsh. Math.*, 130(2):155–160, 2000.