JÉRÔME SOUCY

Sur le mouvement holomorphe de l'attracteur d'un système de fonctions itérées

Mémoire présenté
à la Faculté des études supérieures de l'Université Laval
dans le cadre du programme de maîtrise en mathématiques
pour l'obtention du grade de Maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE GÉNIE
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC

Mars 2007

©Jérôme Soucy, 2007

Résumé

La notion de mouvement holomorphe a été introduite en 1983 par Mañé, Sad et Sullivan pour étudier certaines familles de fonctions rationnelles. Dans ce mémoire, on se propose d'utiliser les mouvements holomorphes dans le contexte des systèmes de fonctions itérées (IFS). Dans un premier temps, nous serons amenés à définir l'attracteur d'un IFS. Par la suite, on s'intéressera à la notion de quasiconformité, qui est intimement liée aux mouvements holomorphes. Finalement, après avoir exposé certains résultats de prolongement, nous déterminerons des critères qui nous assurent de l'existence d'un mouvement holomorphe de l'attracteur d'une famille d'IFS.

Avant-propos

Je tiens d'abord à remercier deux professeurs du Cégep de Lévis-Lauzon, messieurs Jacques Carel et Robert Wilson, qui ont éveillé ma curiosité dans leurs cours de mathématiques. C'était une condition nécessaire et suffisante pour que je consacre ma carrière à l'enseignement de cette science. Ils m'ont aussi incité à prendre part à des concours mathématiques, ce qui a certainement été une bonne idée de leur part. La vie a fait en sorte que ces deux hommes deviennent par la suite mes collègues de travail, et à nouveau j'en ai appris beaucoup d'eux.

En deuxième lieu, tout au long des cinq années que j'ai passées à l'Université Laval, j'ai fait la connaissance de gens exceptionnels. Que ce soit au niveau du corps professoral ou de la population étudiante, je me suis fait des amis de valeur. Je tiens particulièrement à remercier les professeurs Claude Lévesque et Jérémie Rostand, avec qui j'ai eu le privilège de travailler comme auxiliaire d'enseignement. Dans une période de doute, j'ai pu alors me convaincre que je serais capable d'enseigner les mathématiques.

Bien entendu, mes plus grands remerciements vont à ma directrice de maîtrise, la professeure Line Baribeau. Celle-ci m'a proposé un sujet d'étude très intéressant à l'été 2004. Ce dernier m'a captivé tout au long de ma maîtrise, ce qui n'est pas peu dire. Bien que Madame Baribeau était en année sabbatique à l'Université d'Oxford durant l'année académique 2005-2006, elle a répondu avec attention et diligence à mes nombreux courriels. Je lui en suis très reconnaissant. De plus, avec le groupe de recherche en analyse, elle a financé ma maîtrise, ce qui m'a permis de me consacrer pleinement à mes études, sans avoir recours à la mendicité.

En terminant, rien de tout cela n'aurait été possible sans le support constant de mes parents, Alain et Claudette. De la maternelle à l'université, ils m'ont toujours aidé et encouragé dans mes projets, même si ces derniers avaient parfois l'air incertains. Je les remercie sincèrement.

À ma famille.

Ce n'est pas l'intuition qui nous trompe,
c'est le manque d'intuition.

- Henri Lebesgue

Table des matières

Table des matières vii

Table des figures viii

1 Introduction 1

2 Systèmes de fonctions itérées 3
- 2.1 Définition d'un IFS . . . 3
- 2.2 L'attracteur d'un IFS . . . 9
- 2.3 Familles holomorphes d'IFS . . . 13
- 2.4 Conditions de chevauchement . . . 14
- 2.5 La dimension de Hausdorff . . . 16

3 La quasiconformité 19
- 3.1 Introduction à la quasiconformité . . . 19
- 3.2 La conformité . . . 20
- 3.3 Quasiconformité régulière . . . 22
- 3.4 La définition géométrique . . . 26
- 3.5 La définition analytique . . . 30
- 3.6 Quasiconformité sur des ensembles d'intérieur vide . . . 33

4 Mouvements holomorphes 34
- 4.1 Origines . . . 34
- 4.2 Définitions . . . 35
- 4.3 Le λ-lemme . . . 37
- 4.4 Le théorème de Słodkowski . . . 41

5 Mouvement holomorphe et IFS **47**
5.1 Compatibilité d'un mouvement holomorphe 47
5.2 Mouvement holomorphe et condition COSC 50
5.3 Mouvement holomorphe et condition OSC 56

6 Conclusion **63**

Bibliographie **65**

Notation **68**

Table des figures

1.1 Modélisation à l'aide d'images fractales 2

2.1 Schéma d'itération d'un IFS particulier 13

3.1 Image du cercle unité par une transformation quasi-conforme 24
3.2 Correspondance entre quadrilatères et rectangles canoniques 29
3.3 La fonction de Cantor 31
3.4 Continuité absolue sur les lignes 32

5.1 Diagramme de compatibilité pour des ensembles auto-similaires 48
5.2 Images d'un ouvert via trois contractions 55

CHAPITRE 1

Introduction

Nous avons tous déjà vu dans la nature des objets composés de plus petites structures qui ont le même aspect que l'objet tout entier. Pensons seulement à la fougère et aux flocons de neige. De telles formes ont été étudiées par les mathématiciens dès le début du vingtième siècle.

Pour effectuer ces diverses modélisations, on a construit différents ensembles, la plupart du temps dans le plan complexe, qui vérifiaient des propriétés d'auto-similarité. Le nom de fractal a été attribué à ces objets. Ce dernier a été contruit à partir de l'étymologie latine *fractus*, qui signifie brisé. À titre d'exemple, la figure 1 illustre la modélisation d'une branche de fougère ainsi que d'un flocon de neige.

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour construire des fractals. Une méthode simple et fructueuse pour obtenir de tels ensembles consiste à itérer plusieurs fonctions simultanément. À cet effet, le deuxième chapitre de ce mémoire concernera l'étude des systèmes de fonctions itérées. On y parlera entre autre de l'attracteur d'un système de fonctions itérées. Celui-ci est un ensemble auto-similaire très important.

Le chapitre trois sera consacré à l'étude des transformations quasi-conformes. Comme leur nom semble le laisser croire, ces dernières ressemblent beaucoup à des transformations conformes. Leur importance sera mise en évidence au quatrième chapitre, alors

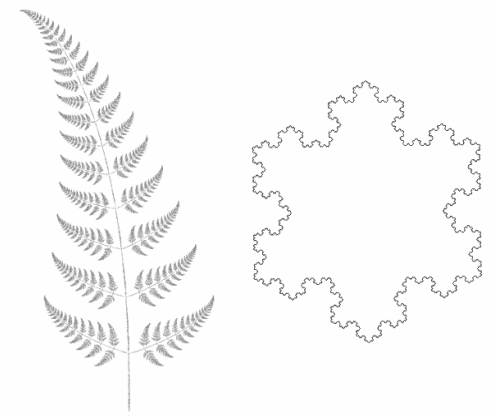


FIG. 1.1 – Modélisation d'un flocon de neige et d'une fougère à l'aide d'images fractales.

que nous discuterons du mouvement holomorphe d'un ensemble. La notion de mouvement holomorphe a été introduite il y a une vingtaine d'années pour décrire l'ensemble de Julia d'une famille de fonctions rationnelles. Cependant, on lui a trouvé d'autres applications par la suite. À ce propos, le cinquième chapitre fera justement le pont entre les systèmes de fonctions itérées et les mouvements holomorphes. On déterminera des conditions sous lesquelles l'attracteur d'une famille de fonctions itérées décrit un mouvement holomorphe.

CHAPITRE 2

Systèmes de fonctions itérées

2.1 Définition d'un IFS

Définition 2.1. Soit (X, d) un espace métrique. Une fonction $f : X \to X$ est une *contraction* s'il existe une constante $c \in (0, 1)$ telle que

$$d\left(f(x), f(y)\right) \leq cd(x, y) \tag{2.1}$$

pour tout $x, y \in X$.

La constante c est souvent appelée un rapport de contraction pour f. Il est important de remarquer que cette dernière n'est pas unique. Lorsqu'on parlera du rapport de contraction de f, il s'agira de la plus petite valeur de c vérifiant l'inégalité (2.1). Un résultat classique d'analyse, le théorème du point fixe de Banach[1], nous assure que toute contraction définie sur un espace métrique complet admet un unique point fixe. On peut démontrer ce résultat sans peine, voir [6] et [7] à cet effet. L'étude des contractions sur un espace métrique complet a permis de donner des preuves élégantes de plusieurs théorèmes importants. Dans la grande majorité des cas, c'est précisément l'existence de l'unique point fixe qui est l'élément clé de la démonstration. Comme l'étude des

[1] Ce résultat est aussi connu comme étant le théorème de contraction.

contractions mène à de grands résultats, certains mathématiciens perspicaces ont obtenu beaucoup de succès en étudiant des familles de contractions. C'est précisément ce sur quoi portera le présent chapitre.

Définition 2.2. Soit X un espace métrique complet et soit $n \in \mathbb{N}$. On dira que $S = \{f_1, f_2, \dots f_n\}$ est un *système de fonctions itérées fini* sur X si chaque f_i est une contraction sur X.

Exemple 2.1. Prenons comme espace métrique $X = (\mathbb{C}, |\ |)$, le plan complexe muni de la métrique euclidienne, et posons $S = \{f_1, f_2\}$, où

$$f_1(z) = \frac{z}{3} \qquad \text{et} \qquad f_2(z) = \frac{z}{3} + \frac{2}{3}\ .$$

Clairement X est un espace métrique complet. De plus, f_1 et f_2 sont des contractions de rapport $\frac{1}{3}$. Ainsi, S est un système de fonctions itérées fini sur X. On peut aussi définir le *rapport de contraction* d'un système de fonctions itérées fini comme étant le maximum des rapports de contraction des éléments qui forment le système. Ainsi, le rapport de contraction de S est égal à $\frac{1}{3}$. D'autres exemples de systèmes de fonctions itérées finis sont présentés dans [7].

Comme c'est souvent le cas en mathématique, on traite le cas fini d'un problème pour ensuite vérifier si les résultats que l'on a obtenus sont aussi valides dans le cas infini. Ainsi, on a d'abord étudié des familles qui comportaient un nombre fini de contractions et plus récemment, nous nous sommes intéressés aux propriétés des familles en comportant un nombre infini. Cependant, il arrive parfois que le passage du cas fini au cas infini entraîne quelques modifications des concepts qui avaient du sens avant la transition, mais qui n'en ont plus vraiment après. Cela a fait en sorte que la première définition d'un système de fonctions itérées a dû être quelque peu adaptée afin de rendre possible l'étude des systèmes possédant un nombre infini de contractions. Par exemple, le rapport de contraction d'un système de fonctions itérées doit être redéfini puisque rien n'indique *a priori* que l'ensemble des rapports de contraction d'un système possède un élément maximal. En fait, si nous ne modifions pas la définition d'un système de fonctions itérées pour le cas infini, deux situations fâcheuses peuvent survenir, si bien que nous ne pourrions pas aller bien loin dans le traitement de ce dernier cas. Voici deux exemples pathologiques illustrant chacune de ces situations.

Exemple 2.2. Prenons comme espace métrique $\mathbb{R}$ avec la métrique euclidienne, et

$$\mathcal{F} = \left\{ f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x : n \in \mathbb{N} \right\}$$

comme famille de contractions. Bien évidemment, $\mathbb{R}$ muni de la métrique euclidienne est un espace métrique complet. On constate que f_n a $1 - \frac{1}{n+1}$ comme rapport de contraction.

Comme l'ensemble des rapports de contraction des éléments de la famille considérée comporte une infinité d'éléments, on ne peut plus définir le rapport de contraction du système comme étant le maximum de ces rapports, car rien nous dit qu'un maximum est atteint. Il est donc naturel de vouloir prendre le supremum des rapports de contraction pour définir le rapport de contraction du système. Or, le supremum des rapports de contraction pour cette famille est égal à 1. Comme nous allons le voir dans la démonstration du théorème 2.2, il est primordial que le rapport de contraction d'un système de fonctions itérées soit strictement inférieur à 1, car sinon cela nous empêche d'utiliser le théorème du point fixe de Banach, si essentiel pour la poursuite des choses. Cependant, si on considère une sous-famille finie de $\mathcal{F}$, appelons-la $\mathcal{S}$, alors le rapport de contraction du système formé par $\mathcal{S}$ est bel et bien inférieur à 1, puisqu'il s'agit du maximum d'un ensemble fini de nombres strictement inférieurs à 1.

Exemple 2.3. Considérons toujours $\mathbb{R}$ muni de la métrique euclidienne, mais cette fois-ci fixons $a \in (1, \infty)$ et considérons la famille

$$\mathcal{F} := \left\{ f_n(x) = \frac{x}{a} + (-a)^n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Les éléments de cette famille sont des contractions de rapport $\frac{1}{a}$. Si nous considérons une sous-famille finie de $\mathcal{F}$, disons $\mathcal{S}$, alors pour tout $f \in \mathcal{S}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons que $d(0, f(x)) < \infty$. Ainsi, $\sup_{f \in \mathcal{S}} d(0, f(x)) = \max_{f \in \mathcal{S}} d(0, f(x)) < \infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Néanmoins, si on considère la famille $\mathcal{F}$, qui comporte une infinité d'éléments, nous avons que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} d(0, f(x)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} d\left(0, \left(\frac{x}{a} + (-a)^n\right)\right) = \infty.$$

Encore une fois, on voit bien que le comportement d'une famille comportant un nombre infini de contractions diffère passablement du cas fini. Cette fois-ci, le fait qu'il n'existe aucun élément x dans l'espace métrique pour lequel

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} d(0, f(x)) < \infty$$

nous empêche de bien définir la fonction de codage associée à la famille $\mathcal{F}$ (voir la définition 2.4).

Après avoir mis en évidence à l'aide de deux exemples que la définition d'un système fini de fonctions itérées doit être modifiée si on veut étudier des systèmes infinis de fonctions itérées, nous sommes maintenant prêts à donner la définition actuelle d'un tel système.

Définition 2.3. Soit I un ensemble dénombrable et soit (X, d) un espace métrique complet. On dira que $S = \{f_i\}_{i\in I}$ est *un système de fonctions itérées sur* X si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. Les f_i sont des contractions de rapport c_i ;
2. $C := \sup_{i\in I} c_i < 1$;
3. $B := \sup_{i\in I} d(0, f_i(x_0)) < \infty$ pour un certain $x_0 \in X$.

Par la suite, nous utiliserons fréquemment l'acronyme IFS pour désigner un système de fonctions itérées, qu'il soit fini ou infini. Cette appelation provient de *Iterated Function System*, la terminologie anglaise la plus fréquemment utilisée.[2] Certains auteurs utilisent le terme IFS pour désigner des familles de fonctions qui ne sont pas nécessairement des contractions. Cependant, nous ne dérogerons pas à la définition 2.3. Pour faire suite aux deux exemples de familles de contractions présentés précédemment, mentionnons qu'ils ne sont pas des IFS. En effet, dans l'exemple 2.1, la famille de contractions ne vérifie pas la deuxième condition, tandis que la famille de l'exemple 2.2 ne rencontre pas la troisième condition. Pour faire un retour sur l'exemple 2.1, mentionnons qu'il s'agit bien d'un IFS. En effet, nous avons que $I = \{1, 2\}$, qui est un ensemble fini, donc dénombrable, et le supremum des rapports de contraction est de $\frac{1}{3}$. Si on pose $x_0 = 0$, alors $B := \sup_{i\in I} d(0, f_i(x_0)) = \max\{0, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3} < \infty$, et la troisième condition est vérifiée.

Nous allons maintenant voir que si $S = \{f_i\}_{i\in I}$ est un IFS sur l'espace métrique X, alors n'importe quel $x_0 \in X$ peut être choisi pour vérifier la troisième condition. En effet, supposons qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $\sup_{i\in I} d(0, f_i(x_0)) = K < \infty$, et choisissons un $x \in X$ arbitraire. En appliquant l'inégalité triangulaire, nous avons que

$$\begin{aligned}
\sup_{i\in I} d(0, f_i(x)) &\leq \sup_{i\in I} d(0, f_i(x_0)) + \sup_{i\in I} d(f_i(x_0), f_i(x)) \\
&\leq K + \sup_{i\in I} c_i d(x_0, x) \\
&\leq K + d(x_0, x) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

À présent, introduisons une autre partie de la terminologie qui sera utilisée pour étudier les IFS. Essentiellement, on utilisera la même approche et la même notation que dans [4]. Tout d'abord, l'ensemble I qui apparaît dans la définition 2.3 se nomme *l'alphabet* de l'IFS. Les éléments de I, quant à eux, sont appelés des *lettres*. Ensuite,

[2] On retrouve aussi l'expression *Iterated Function Scheme* dans [11], mais cette terminologie est moins populaire dans la littérature.

pour chaque entier naturel n, il est possible d'ordonner n lettres de l'alphabet I, formant ainsi un *mot* de longueur n. On utilise le symbole I^n pour représenter l'ensemble des mots de longueur n dont les lettres proviennent de l'alphabet I. De plus, on définit le *mot vide*, noté $\emptyset$, comme étant l'unique mot de longueur 0. Finalement, il serait important d'être en mesure de considérer tous les mots de longueur finie qu'on peut construire à partir de l'alphabet I. Cela peut être fait en définissant I^* de la façon suivante :

$$I^* := \cup_{n\in\mathbb{N}} I^n \cup \{\emptyset\}\,.$$

Dans quelques lignes, nous verrons comment l'introduction de toute cette notation simplifie l'étude des IFS. Cependant, dans la perspective d'étudier le comportement limite d'un IFS, nous devons définir I^∞, l'ensemble des mots infinis à droite dont les lettres appartiennent à l'alphabet I. Ainsi, nous avons que

$$I^\infty := \{\omega : \omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots,\ \text{où } \omega_j \in I\ \forall\ j \in \mathbb{N}\}.$$

De cette façon, la longueur d'un mot ω, noté $|\omega|$, est l'unique élément de l'ensemble $\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ tel que $\omega \in I^{|\omega|}$. Étant donné $\omega \in I^*\cup I^\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \leq |\omega|$, on définit $\omega|_n$ comme étant le mot $\omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_n$, où $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ sont les n premières lettres, dans l'ordre, du mot ω. Voyons maintenant comment cette terminologie peut nous être utile pour étudier les IFS.

En premier lieu, si $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots\omega_{|\omega|} \in I^*$, alors $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{|\omega|}\} \subseteq I$ et on peut définir la fonction $f_\omega : X \to X$ comme suit :

$$f_\omega := f_{\omega_1} \circ f_{\omega_2} \circ f_{\omega_3} \circ \ldots f_{\omega_{|\omega|}}.$$

Notons que f_ω est une contraction de rapport

$$c_\omega := \prod_{j=1}^{|\omega|} c_{\omega_j},$$

où c_{ω_j} est le rapport de contraction de f_{ω_j}. En effet, c_ω est un produit fini de nombres dans l'intervalle $(0, 1)$, donc appartient lui-même à cet ensemble.

Remarque 2.1. Étant donné $\omega \in I^* \cup I^\infty$, on notera toujours par ω_i la i^{e} lettre du mot ω. De même, c_{ω_i} désignera toujours le rapport de contraction pour f_{ω_i}.

Nous allons maintenant définir la fonction de codage associée à un IFS. Cette fonction est indispensable pour bien comprendre le comportement des IFS. À la définition 2.5, elle sera utilisée pour définir l'ensemble limite d'un IFS, puis, dans le chapitre 5, on s'en servira pour construire des mouvements holomorphes.

Définition 2.4. Soit $S = \{f_i\}_{i\in I}$ un IFS sur X. La *fonction de codage associée à* S est définie par

$$\begin{aligned} \pi : I^\infty &\to X \\ \omega &\mapsto \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x_0), \end{aligned}$$

où $x_0 \in X$.

Avant d'être assurés de l'existence de la fonction de codage associée à un IFS, il nous faut démontrer deux choses ; d'abord on doit vérifier que la limite existe bien pour chaque $\omega \in I^\infty$ et chaque $x_0 \in X$, puis ensuite il nous faut montrer que cette limite est indépendante du choix de x_0.

1re étape : $\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x_0)$ *existe pour chaque* $\omega \in I^\infty$ *et chaque* $x_0 \in X$.

D'après ce qui a été fait précédemment dans ce chapitre, si nous avons un IFS sur un espace métrique X, alors pour chaque $x_0 \in X$, il existe une constante B telle que $\sup_{i\in I} d(0, f_i(x_0)) < B$. Soient m et n des entiers positifs tels que $m > n$. En appliquant l'inégalité triangulaire de façon répétitive, on obtient que

$$\begin{aligned} d(f_{\omega|_n}(x_0), f_{\omega|_m}(x_0)) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} d(f_{\omega|_k}(x_0), f_{\omega|_{k+1}}(x_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} c_{\omega|_k} d(x_0, f_{\omega_{k+1}}(x_0)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} C^k \Big(d(0, x_0) + d(0, f_{\omega_{k+1}}(x_0)) \Big) \\ &\leq \frac{C^n}{1-C} \Big(d(0, x_0) + B \Big). \end{aligned}$$

Comme $C = \sup_{i\in I} c_i < 1$, cela montre que $d(f_{\omega|_n}(x_0), f_{\omega|_m}(x_0)) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini. Par conséquent, $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour chaque $x_0 \in X$. Par hypothèse, l'espace métrique X est complet. Ainsi, la suite converge dans X et donc $\pi(\omega)$ existe pour tout $\omega \in I^\infty$ et pour tout $x_0 \in X$.

2e étape : $\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x_0)$ *ne dépend pas du choix de* x_0.

En effet, soit $x_1 \in X$. Nous avons alors que

$$\begin{aligned} d(f_{\omega|_n}(x_0), f_{\omega|_n}(x_1)) &\leq c_{\omega|_n} d(x_0, x_1) \\ &= c_{\omega_1} c_{\omega_2} \dots c_{\omega_n} d(x_0, x_1) \\ &\leq C^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Puisque $C^n d(x_0, x_1) \to 0$ lorsque n tend vers l'infini, il en découle que

$$\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x_1).$$

Définition 2.5. Soit $S = \{f_i\}_{i\in I}$ un IFS sur X. *L'ensemble limite de* S, noté J, est défini par

$$J := \pi(I^\infty).$$

Pour tout $i \in I$ et pour tout $\omega \in I^\infty$, nous avons que

$$\begin{aligned} f_i(\pi(\omega)) &= f_i\Big(\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(x_0)\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_i \circ f_{\omega|_n}(x_0) \qquad \text{(car les } f_i \text{ sont continues)} \\ &= \lim_{n\to\infty} f_{i\omega|_n}(x_0) \\ &= \pi(i\omega). \end{aligned}$$

Cette observation nous permet de voir que l'ensemble limite J d'un IFS est tel que $J = \cup_{i\in I} f_i(J)$. Un ensemble vérifiant cette propriété est dit *auto-similaire*.

2.2 L'attracteur d'un IFS

Lorsqu'on étudie les IFS, un des problèmes les plus importants auquel on fait face consiste à déterminer la nature de l'attracteur d'un système de fonctions itérées donné. Cependant, avant de définir cette notion, il nous faudra rappeler quelques résultats et surtout démontrer le théorème 2.2. En premier lieu, si X est un espace métrique, on note par $\kappa(X)$ l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles compacts non-vides de X. Comme nous allons le voir, il est possible de munir $\kappa(X)$ d'une métrique, de telle sorte que $\kappa(X)$ équipé de celle-ci soit un espace métrique complet si X est lui-même un espace métrique complet.

Définition 2.6. Soit (X, d) un espace métrique et soit $A \in \kappa(X)$. Pour chaque $x \in X$, la *distance de* x *à l'ensemble* A, est définie par

$$d(x, A) := \min_{a\in A} d(x, a).$$

Remarque 2.2. *A priori*, rien n'indique que pour chaque x fixé, il existe un $\hat{a} \in A$ tel que $d(x, \hat{a}) \leq d(x, a)$ pour tout $a \in A$. Cela découle de la compacité de l'ensemble A et de la continuité de la fonction $d(x, \cdot)$ vue comme fonction de A dans $[0, \infty)$. On retrouve les détails de cette preuve dans [7]. C'est ce même argument qui nous permet de définir la distance entre deux éléments de $\kappa(X)$ à la définition 2.7.

Définition 2.7. Soit (X, d) un espace métrique et soient $A, B \in \kappa(X)$. La *distance de l'ensemble A à l'ensemble B* est définie par

$$\text{dist}(A, B) := \max_{a \in A} d(a, B).$$

Malheureusement pour nous, cette fonction, qui est définie sur $\kappa(X) \times \kappa(X)$, n'est pas une métrique pour l'espace $\kappa(X)$. En effet, si on choisit comme espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la métrique euclidienne, alors en prenant les compacts $A = \{0\}$ et $B = [1, 2]$ dans $\kappa(\mathbb{R})$, on trouve que $d(A, B) = 1$ et $d(B, A)$=2, et donc $d(A, B) \neq d(B, A)$. Afin de donner à $\kappa(X)$ une structure d'espace métrique, nous devons le munir de la métrique présentée à la définition 2.8.

Définition 2.8. Soit (X, d) un espace métrique. On définit la *métrique de Hausdorff* sur $\kappa(X)$ par

$$d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

On montre facilement dans [7] que d_H est bien une métrique sur $\kappa(X)$. Afin de donner une interprétation plus géométrique de la métrique de Hausdorff, on définit la δ-enveloppe de $A \in \kappa(X)$ par $A_\delta := \{x \in X : d(x, A) \leq \delta\}$. On montre dans [11] que la distance de Hausdorff entre deux compacts A et B correspond à la plus petite valeur de δ telle que l'on ait à la fois $B \subseteq A_\delta$ et $A \subseteq B_\delta$.

Il est facile de montrer que si X est un espace métrique, alors $(\kappa(X), d_H)$ en est aussi un. Cependant, on ne sait pas si cet espace métrique est complet. Le résultat suivant, dont la démonstration demande assez de travail, concerne la complétude de l'espace $(\kappa(X), d_H)$. Comme il s'agit d'un résultat classique, on laissera le soin au lecteur de consulter [7] et [13] pour en connaître la démonstration.

Théorème 2.1. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Alors $(\kappa(X), d_H)$ est aussi un espace métrique complet.*

C'est précisément grâce à ce dernier résultat que nous pouvons démontrer le théorème suivant, qui mène finalement à la définition de l'attracteur d'un IFS.

Théorème 2.2. *Soit $S = \{f_i\}_{i \in I}$ un IFS sur X. Alors la fonction*

$$\begin{aligned} F : \kappa(X) &\to \kappa(X) \\ K &\mapsto \overline{\cup_{i \in I} f_i(K)}, \end{aligned}$$

appelée fonction d'attraction de S, est une contraction et possède un unique point fixe dans $\kappa(X)$.

Preuve. Soient $K, L \in \kappa(X)$ et soit $\epsilon > 0$. Pour tout $y \in F(K)$, il existe $i \in I$ et $u \in K$ pour lesquels $d(y, f_i(u)) < \epsilon$. Prenons un $v \in L$ qui vérifie $d(u, L) = d(u, v)$. On peut choisir un tel v puisque L est compact. Ainsi, pour chaque $y \in F(K)$, nous avons que

$$\begin{aligned} d(y, F(L)) &\leq d(y, f_i(v)) \\ &\leq d(y, f_i(u)) + d(f_i(u), f_i(v)) \\ &\leq \epsilon + Cd(u, v) \qquad (\text{où } C \text{ est un rapport de contraction pour } S) \\ &\leq \epsilon + Cd_H(K, L). \end{aligned}$$

Donc $\text{dist}(F(K), F(L)) = \max_{y \in F(K)} d(y, F(L)) \leq \epsilon + Cd_H(K, L)$. En laissant tendre ϵ vers 0, on obtient que $\text{dist}(F(K), F(L)) \leq Cd_H(K, L)$. De la même façon, on montre que $\text{dist}(F(L), F(K)) \leq Cd_H(K, L)$. Ainsi,

$$\max\{\text{dist}(F(K), F(L)), \text{dist}(F(L), F(K))\} \leq Cd_H(K, L),$$

d'où l'on conclut que $d_H(F(K), F(L)) \leq Cd_H(K, L)$. Puisque C est le rapport de contraction de S, il suit que $C < 1$ et donc F est une contraction sur $\kappa(X)$. Par définition d'un IFS, X est complet et donc d'après le théorème 2.1, $(\kappa(X), d_H)$ est un espace métrique complet. Finalement, d'après le théorème du point fixe de Banach, toute contraction sur un espace métrique complet admet un unique point fixe. ■

Nous pouvons maintenant définir l'attracteur d'un IFS. D'après le théorème 2.2, nous sommes assurés que ce dernier est bien défini. Par la suite, nous verrons que l'attracteur et l'ensemble limite d'un IFS sont intimement liés.

Définition 2.9. Soit S un système de fonctions itérées. L'unique point fixe de sa fonction d'attraction s'appelle *l'attracteur de* S.

Corollaire 2.1. *Soit* $S = \{f_i\}_{i \in I}$ *un IFS. Alors l'attracteur de* S *correspond à la fermeture de son ensemble limite.*

Preuve. D'après la définition 2.9, il suffit de montrer que $F(\overline{J}) = \overline{J}$, où F est la fonction d'attraction de S, et J son ensemble limite. À la page 9, nous avons vu que J était auto-similaire, i.e. $J = \cup_{i \in I} f_i(J)$. Ainsi,

$$\overline{J} = \overline{\cup_{i \in I} f_i(J)} \subseteq \overline{\cup_{i \in I} f_i(\overline{J})} = F(\overline{J}).$$

D'autre part, nous avons aussi que

$$F(\overline{J}) = \overline{\cup_{i \in I} f_i(\overline{J})} \subseteq \overline{\cup_{i \in I} \overline{f_i(J)}} \subseteq \overline{\overline{\cup_{i \in I} f_i(J)}} = \overline{J}.$$

On a donc bien que $F(\overline{J}) = \overline{J}$. ■

Bien que nous sachions que chaque système de fonctions itérées possède un attracteur, il serait intéressant de pouvoir le déterminer. En fait, si on regarde attentivement la preuve du théorème du point fixe de Banach (voir [6]), on s'aperçoit qu'elle nous donne le chemin à suivre pour obtenir le point fixe tant désiré. Étant donnés un espace métrique complet X et une contraction f sur X, alors l'unique point fixe de f, disons x', peut être obtenu en prenant la limite des itérés de f évalués en n'importe quel point de X. En termes plus mathématiques, cela signifie que

$$x' = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$$

pour tout $x_0 \in X$. On peut ainsi appliquer cette méthode pour déterminer l'attracteur d'un IFS. En effet, soit $S = \{f_i\}_{i\in I}$ un IFS sur X. Si F désigne la fonction d'attraction de S, en remarquant que

$$\cup_{i\in I} f_i\left(\cup_{j\in I} f_j(K)\right) = \cup_{\omega\in I^2} f_\omega(K),$$

on montre par induction que $F^n(K) = \overline{\cup_{\omega\in I^n} f_\omega(K)}$ et donc

$$A = \lim_{n\to\infty} \overline{\cup_{\omega\in I^n} f_\omega(K)}$$

est l'attracteur de S pour tout $K \in \kappa(X)$. Voici comment on peut obtenir l'attracteur de l'IFS présenté à l'exemple 2.1.

Pour déterminer l'attracteur de cet IFS, il nous faut d'abord choisir un compact $K \in \kappa(\mathbb{C})$ et calculer les itérés de F, la fonction d'attraction de S. Prenons $K = \overline{\mathbb{D}}$, le disque unité fermé. Ainsi,

$$\begin{aligned}
F^0(K) &= \overline{\mathbb{D}}(0,1),\\
F^1(K) &= \overline{\mathbb{D}}\left(0,\tfrac{1}{3}\right) \cup \overline{\mathbb{D}}\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3}\right),\\
F^2(K) &= \overline{\mathbb{D}}\left(0,\tfrac{1}{9}\right) \cup \overline{\mathbb{D}}\left(\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{9}\right) \cup \overline{\mathbb{D}}\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{9}\right) \cup \overline{\mathbb{D}}\left(\tfrac{8}{9},\tfrac{1}{9}\right).
\end{aligned}$$

En poursuivant ce processus, on obtient le schéma d'itération présenté à la figure 2.1.

Il est facile de voir que l'ensemble limite de l'IFS est l'ensemble de Cantor C construit à partir de l'intervalle $[0,1]$. À la première étape de la construction, on enlève l'intervalle $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Puis, aux étapes suivantes, on enlève l'ensemble ouvert formant le tiers central de chacune des composantes connexes de l'ensemble obtenu à l'étape précédente de la construction. Il est alors clair que $C = f_1(C) \cup f_2(C)$. Il est aussi possible de montrer que l'ensemble de Cantor est l'ensemble des nombres dans l'intervalle $[0,1]$ dont la représentation en base 3 ne comporte jamais le chiffre 2. Ainsi, on peut en déduire que la cardinalité de l'ensemble de Cantor est $2^{\aleph_0}$. Cet ensemble est donc non-dénombrable.

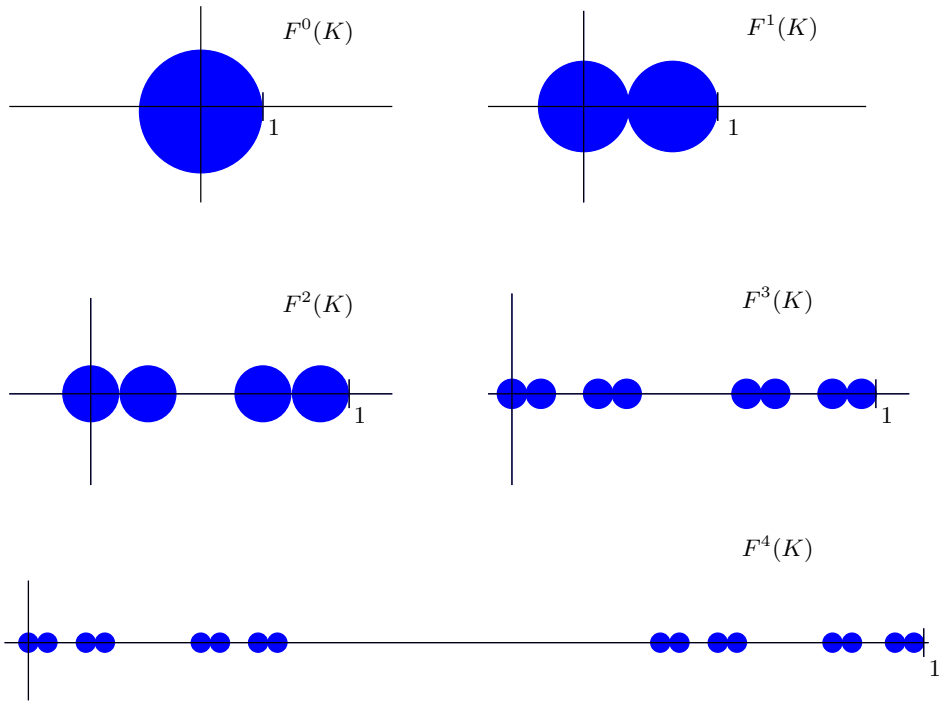


FIG. 2.1 – Schéma d'itération de l'IFS

2.3 Familles holomorphes d'IFS

Jusqu'à présent, tous les résultats que nous avons démontrés étaient valables pour des IFS définis sur un espace métrique complet quelconque. Nous allons maintenant nous restreindre au cas particulier où les IFS sont définis sur $(\mathbb{C}, |\ |)$, le plan complexe muni de la métrique euclidienne. Pour l'instant cette particularisation peut sembler superflue, mais nous utiliserons plus loin des théorèmes d'analyse complexe qui sont valables seulement dans ce cas singulier, et donc nous devons quitter le cas, somme toute assez général, des espaces métriques complets. Ainsi, lorsqu'on utilisera l'abbréviation IFS, cela voudra dire qu'on considère un système de fonctions itérées sur $\mathbb{C}$. Si on reprend la définition 2.3, dire que $S = \{f_i\}_{i\in I}$ est un IFS sur $\mathbb{C}$ revient à exiger les trois conditions suivantes :

1. $|f_i(z) - f_i(w)| \leq c_i|z - w|$ pour tout $i \in I,\ z, w \in \mathbb{C}$ et où $c_i \in (0, 1)$;
2. $C := \sup_{i\in I} c_i < 1$;
3. $B := \sup_{i\in I} |f_i(z_0)| < \infty$ pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$.

Comme le titre de cette section l'indique, nous souhaitons définir ce qu'on entend par famille holomorphe d'IFS, objet d'étude principal de ce mémoire. Pour y arriver, nous devrons paramétriser les contractions d'un IFS. Ainsi, pour un λ_0 fixé, $S_{\lambda_0} = \{f_{i,\lambda_0}\}_{i\in I}$.

On notera par $c_i(\lambda_0)$ le rapport de contraction pour f_{i,λ_0}. On fait alors la définition suivante.

Définition 2.10. Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. On dira que la famille $S_\Lambda = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ est une *famille holomorphe d'IFS d'alphabet I* si

1. S_λ est un IFS d'alphabet I pour tout $\lambda \in \Lambda$;
2. Les fonctions

$$\begin{aligned} \Upsilon_{i,z_0} : \Lambda &\to \mathbb{C} \\ \lambda &\mapsto f_{i,\lambda}(z_0) \end{aligned}$$

   sont holomorphes pour tout $i \in I$, $z_0 \in \mathbb{C}$.
3. Si $|I| = \infty$, alors pour chaque $\lambda_0 \in \Lambda$, il existe un voisinage $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ de λ_0 tel que

$$C(\lambda_0) := \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \sup_{i\in I} |c_i(\lambda)| < 1$$

   et

$$B(\lambda_0) := \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \sup_{i\in I} |f_{i,\lambda}(z_0)| < \infty \text{ pour un certain } z_0 \in \mathbb{C}.$$

Voici maintenant un court exemple de façon à illustrer cette longue définition.

Exemple 2.4. Prenons $\Lambda = \mathbb{D}$ et $I = \{1, 2\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{D}$, on définit $f_{1,\lambda}(z) = \frac{\lambda z}{2}$ et $f_{2,\lambda}(z) = \frac{\lambda z}{3} + 5$. Pour chaque valeur de $\lambda \in \mathbb{D}$, $f_{1,\lambda}$ et $f_{2,\lambda}$ sont des contractions. Par conséquent,

$$S_\Delta = \left\{ \left\{ \tfrac{\lambda z}{2}, \tfrac{\lambda z}{3} + 5 \right\} : \lambda \in \mathbb{D} \right\}$$

est une famille d'IFS. En fait, il s'agit d'une famille holomorphe d'IFS , car les fonctions

$$\Upsilon_{1,z_0}(\lambda) = \frac{\lambda z_0}{2} \qquad \text{et} \qquad \Upsilon_{2,z_0}(\lambda) = \frac{\lambda z_0}{3} + 5$$

sont holomorphes sur le disque unité ouvert pour toute valeur de $z_0 \in \mathbb{C}$.

2.4 Conditions de chevauchement

En étudiant les IFS, on s'est vite rendu compte qu'il y a une situation où certains résultats étaient plus faciles à démontrer. La condition que doit vérifier le système de fonctions itérées concerne le chevauchement potentiel des images des contractions. Voici plus précisément ce qu'on entend par cette condition.

Définition 2.11. Soit $S = \{f_i\}_{i\in I}$ un IFS. On dira que S *satisfait la condition OSC* s'il existe un ouvert non-vide $U \subseteq \mathbb{C}$ tel que

1. $f_i(U) \subseteq U$ pour tout $i \in I$;
2. $f_i(U) \cap f_j(U) = \emptyset$ pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$.

On dira aussi qu'un tel U *réalise la condition OSC* pour S.

Cette condition fut introduite en 1946 par P. A. P. Moran afin d'étudier la dimension de Hausdorff d'un attracteur. Par la suite, plusieurs conditions du même genre ont été considérées, toujours dans la perspective de démontrer certaines propriétés de l'attracteur d'un système de fonctions itérées. Voici ces conditions, que nous utiliserons ultérieurement.

Définition 2.12. Soit $S = \{f_i\}_{i\in I}$ un IFS. On dira que S *satisfait la condition COSC* s'il existe un ouvert non-vide $U \subseteq \mathbb{C}$ tel que

1. U réalise la condition OSC pour S ;
2. $f_i(\overline{U}) \cap f_j(\overline{U}) = \emptyset$ pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$.

Définition 2.13. Soit S un IFS. On dira que S *satisfait la condition SOSC* s'il existe un ouvert U réalisant la condition OSC et qui contient des points limites de S, i.e. $U \cap J \neq \emptyset$.

Les noms de ces trois conditions sont inspirés de la terminologie anglaise. Les conditions OSC, COSC et SOSC sont respectivement les acronymes de *Open Set Condition*, *Closed Open Set Condition* et *Strong Open Set Condition*. Bien évidemment, il existe des liens entre ces différentes conditions. Clairement, nous avons que

$$\text{COSC} \Rightarrow \text{OSC} \qquad \text{et} \qquad \text{SOSC} \Rightarrow \text{OSC}.$$

Il est même possible de montrer que les conditions OSC et SOSC sont équivalentes dans le cas d'un IFS de type fini (voir[27]). Il est alors naturel de se demander si nous avons l'implication OSC $\Rightarrow$ SOSC pour les IFS infinis. Tout récemment, en 2005, T. Szarek et S. Wedrychowicz ont levé le voile sur cette question en démontrant que la condition OSC n'entraîne pas la condition SOSC pour le cas infini (voir [33]).

Nous allons à nouveau considérer l'exemple 2.1. On peut se poser la question suivante : Est-ce que S satisfait les conditions OSC, COSC et SOSC ? La réponse est affirmative. Par exemple, si on choisit l'ouvert $U = \mathbb{D}$, alors U réalise SOSC. En fait, on vérifie facilement que U vérifie OSC, et on remarque par exemple que $0 \in J \cap U$.

Cependant, cet ouvert ne réalise pas COSC puisqu'on a alors $f_1(\overline{U}) \cap f_2(\overline{U}) = \{\frac{1}{3}\} \neq \emptyset$ et $\overline{U} = \overline{\mathbb{D}}$. Néanmoins, si on choisi plutôt $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$ comme ouvert, on peut vérifier sans peine que ce dernier réalise les conditions OSC, COSC et SOSC.

2.5 La dimension de Hausdorff

En pratique, il est passablement difficile de vérifier si un système de fonctions itérées vérifie la condition OSC. Cependant, dans la situation où le système est un ensemble fini de similitudes, nous avons une condition nécessaire pour que la condition OSC soit vérifiée. Néanmoins, avant d'énoncer ce critère, nous devons introduire le concept de dimension de Hausdorff. C'est à Moran que revient l'idée de calculer la dimension de Hausdorff de l'attracteur d'un IFS (voir [25]). Par contre, on reprendra la présentation plus contemporaine de cette théorie présentée dans [11].

Définition 2.14. Soit U un ouvert non-vide du plan complexe. Le *diamètre de* U est défini par

$$\operatorname{diam}(U) = \sup\{|z - w| : z, w \in U\}.$$

Définition 2.15. Soit E un sous-ensemble du plan complexe et soit $\delta > 0$. Une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, où $U_i \subset \mathbb{C}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, est un *δ-recouvrement de E* si

1. $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} U_i$;
2. $0 < \operatorname{diam}(U_i) \leq \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Avec ces deux définitions, nous sommes maintenant prêts à introduire une mesure qui est définie pour tous les sous-ensembles du plan complexe. L'idée d'utiliser des recouvrements pour construire une mesure remonte à 1914, et on la doit à C. Carathéodory. Cependant, la mesure que nous allons définir ici provient des travaux de F. Hausdorff et a été introduite en 1919.

Définition 2.16. Soient $E \subset \mathbb{C}$, $\delta > 0$ et $s \geq 0$. On définit $H^s_\delta(E)$ par

$$H^s_\delta(E) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(U_i))^s : \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E\right\}.$$

Remarquons qu'en diminuant la valeur de δ, il y a de moins en moins de δ-recouvrement admissibles, de telle sorte que $H^s_\delta(E)$ augmente. Cette observation motive la prochaine définition.

Définition 2.17. Soient $E \subset \mathbb{C}$ et $s \geq 0$. La *s-mesure de Hausdorff* de l'ensemble E est définie par

$$H^s(E) := \lim_{\delta \to 0^+} H^s_\delta(E).$$

On peut vérifier qu'il s'agit d'une mesure extérieure. Ainsi, $H^s(E)$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. C'est à partir des s-mesures qu'on définit la dimension de Hausdorff d'un ensemble. On peut montrer (voir [11]) que pour un ensemble $E \subset \mathbb{C}$ donné, il existe un unique $s^\star \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tel que

$$H^s(E) = \begin{cases} \infty & \text{si } s < s^\star, \\ 0 & \text{si } s > s^\star. \end{cases} \tag{2.2}$$

Définition 2.18. Soit $E \subset \mathbb{C}$. L'unique valeur de $s^\star$ satisfaisant l'équation 2.2 s'appelle la *dimension de Hausdorff de* E, et on la note $\dim_H E$. On peut aussi écrire

$$\dim_H E = \inf\{s \geq 0 : H^s(E) = 0\}.$$

Nous n'aurons pas besoin de résultats avancés sur la dimension de Hausdorff. Le lecteur intéressé à en savoir davantage peut consulter l'ouvrage de Falconer (voir [11]) et l'article de Hutchinson (voir [16]). Cependant, nous allons avoir besoin du fait que la dimension de Hausdorff d'un singleton est zéro.

Soit $E = \{z_0\}$, où $z_0 \in \mathbb{C}$. Posons $U = B\left(z_0, \frac{\delta}{2}\right)$. Alors $\{U\}$ est un δ-recouvrement de E pour tout $\delta > 0$. Ainsi, $H^s_\delta(E) = (\text{diam}(U))^s = \delta^s$. De cela nous pouvons conclure que

$$H^s(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } s > 0, \\ 1 & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Nous avons donc, par définition de la dimension de Hausdorff, que $\dim_H E = 0$.

Voici maintenant un résultat qui fait un lien entre la condition OSC et la dimension de Hausdorff de l'attracteur d'un IFS. Notons cependant que ce résultat n'est valide que pour des IFS comportant un nombre fini de similitudes.

Théorème 2.3. *Soit $S = \{f_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ un IFS qui satisfait la condition OSC et pour lequel les f_i sont des similitudes. Soit c_i le rapport de contraction de f_i. Si A désigne l'attracteur de S et s sa dimension de Hausdorff, alors s satisfait*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^s = 1. \tag{2.3}$$

De plus, $0 < H^s(A) < \infty$.

On peut se référer à [11] pour connaître la démonstration de ce théorème. Pour un IFS formé uniquement de similitudes, la valeur de s satisfaisant l'équation 2.3 s'appelle la dimension de similarité. Le théorème nous affirme donc que la dimension de similarité et la dimension de Hausdorff de l'attracteur d'un IFS formé d'un nombre fini de similitudes ont la même valeur dans le cas où le système satisfait la condition OSC. Il existe une autre dimension, la dimension de *box-counting*, qui peut être définie pour ce type d'IFS. Une fois de plus, on peut montrer que dans ce cas précis elle correspond à la valeur de s dans l'équation 2.3 (voir [11]).

Revenons une dernière fois sur l'exemple 2.1, cette fois-ci pour déterminer la dimension de Hausdorff de l'attracteur de S. En effet, puisque S est un IFS formé d'un nombre fini de contractions qui sont des similitudes et qu'il satisfait la condition OSC, le théorème 2.3 nous permet de déterminer la dimension de Hausdorff de son attracteur, c'est-à-dire de l'ensemble de Cantor. En effet, selon ce théorème, la dimension de Hausdorff de l'ensemble de Cantor est la valeur de s satisfaisant l'équation

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1.$$

Cette dernière se résout facilement, et on trouve que

$$s = \dim_H C = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

CHAPITRE 3

La quasiconformité

3.1 Introduction à la quasiconformité

Les transformations quasi-conformes, d'abord définies sur le plan complexe et ensuite sur des surfaces de Riemann quelconques, sont le résultat d'une généralisation des transformations conformes. Heureusement, il ne s'agit pas là de définir un objet mathématique dans l'unique but de généraliser un concept déjà établi. Nous verrons dans ce chapitre trois définitions de la quasiconformité, selon l'ordre chronologique. Disons seulement pour l'instant qu'une transformation quasi-conforme est un homéomorphisme défini sur un domaine du plan complexe qui ne « déforme » pas trop ce domaine. Par exemple, l'image d'un cercle infinitésimal après lui avoir appliqué une transformation quasi-conforme est une ellipse infinitésimale. Nous serons par la suite amenés à mesurer cette déformation, en introduisant un coefficient de dilatation. C'est alors qu'on verra qu'une transformation conforme est un cas particulier des transformations quasi-conformes. L'objectif de ce chapitre est simplement de donner une bonne idée au lecteur de la notion de quasiconformité. Pour cette raison, certains résultats en fin de chapitre seront simplement énoncés. Le lecteur désireux de ne rien laisser au hasard pourra donc se référer aux ouvrages [2], [21] et [20] pour complémenter cette section. Voici maintenant quelques raisons qui peuvent nous motiver à faire l'étude des transformations quasi-conformes.

1. Certains théorèmes concernant les transformations conformes peuvent être démontrés seulement sous les hypothèses de la quasiconformité. Il devient donc intéressant de savoir dans quels cas ces résultats sont valides, en faisant seulement l'hypothèse que les transformations considérées sont quasi-conformes.

2. Étant moins rigides que les transformations conformes, les transformations quasi-conformes peuvent être utilisées comme outils dans des contextes plus variés.

3. Des méthodes utilisant la théorie des transformations quasi-conformes sont utilisées pour établir des résultats importants dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles de type elliptique (voir [22]).

Il y a d'autres bonnes raisons d'étudier la quasiconformité (voir [2] et [19]). En ce qui nous concerne, les transformations quasi-conformes interviendront lorsque nous ferons l'étude des mouvements holomorphes.

On reconnaît généralement que la notion de quasiconformité fut introduite par Herbert Grötzsch en 1928. Néanmoins, le sens que ce dernier donnait à la quasiconformité était un peu moins général que celui que nous y donnons aujourd'hui. Pendant les premières années qui suivirent la publication des travaux de Grötzsch sur la quasiconformité, le sujet était considéré comme étant une simple curiosité. Cependant, vers 1935 Lavrentiev s'en servit pour étudier des équations aux dérivées partielles. Deux ans plus tard, en 1937, Teichmüller parvint à démontrer des résultats importants en utilisant les transformations quasi-conformes. À partir de cet instant, la quasiconformité fut l'objet d'intenses recherches. C'est durant les années cinquante que l'étude des transformations quasi-conformes était à son apogée ; plusieurs résultats importants sur la quasiconformité ont alors été démontrés. Dans les années soixante, Lars V. Ahlfors publia une monographie sur le sujet (voir [2]), tout comme Lehto et Virtanen (voir [21]). À partir de ce moment, la théorie des transformations quasi-conformes possédait de solides assises et il était de plus en plus fréquent qu'on en fasse mention dans des articles.

3.2 La conformité

Avant de définir la quasiconformité, il serait convenable de rappeler au lecteur quelques faits importants sur les transformations conformes. En général, on dit que $w = f(z)$ est une transformation conforme en z_0 si f préserve l'angle entre deux courbes passant par z_0, ainsi que l'orientation. On peut montrer sans trop de peine (voir [15]) que si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors $f : U \to \mathbb{C}$ est une transformation conforme sur U si et

seulement si f est holomorphe et $f'(z_0) \neq 0$ pour tout $z_0 \in U$. À partir de cette constatation, nous allons illustrer une propriété géométrique importante des transformations conformes, propriété qui n'est pas vérifiée lorsqu'on est en présence d'une transformation quasi-conforme. Pour effectuer cela, nous devons d'abord introduire la notation et quelques définitions.

Définition 3.1. On dit que $f : D \to \mathbb{C}$ est un difféomorphisme si f est un homéomorphisme possédant des dérivées partielles continues et un jacobien non-nul.

Soit $w = f(z)$ un difféomorphisme défini sur un domaine D. Si $z = x + iy$ est un système de coordonnées sur D et que $w = u + iv$ en est un sur $f(D)$, alors on peut écrire

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

où u et v sont des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On peut donc trouver une approximation linéaire locale de f en un point $z_0 \in D$ avec la différentielle

$$\begin{aligned} df &= f_x dx + f_y dy \\ &= u_x dx + u_y dy + iv_x dx + iv_y dy. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant introduire les *dérivées partielles formelles* de f. Ces dernières n'ont pas d'interprétation en termes de limites, mais facilitent grandement les calculs. En considérant le fait que

$$x = \Re(z) = \frac{(z + \overline{z})}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

il devient possible de représenter f selon les variables z et $\overline{z}$, de telle sorte qu'en définissant f_z et $f_{\overline{z}}$ par

$$f_z = \tfrac{1}{2}(f_x - if_y) \qquad \text{et} \qquad f_{\overline{z}} = \tfrac{1}{2}(f_x + if_y),$$

nous avons que

$$df = f_z dz + f_{\overline{z}} d\overline{z}.$$

Considérons la situation où f est une transformation conforme en $z_0 \in D$. Cela entraîne donc que f est holomorphe et que $f'(z_0) \neq 0$. Un résultat classique de l'analyse complexe nous dit qu'une fonction f est holomorphe si et seulement si les équations de Cauchy-Riemann sont vérifiées. Si $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, ces équations s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ v_x &= -u_y. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Par ailleurs, par définition de $f_{\overline{z}}$, un calcul direct montre que les équations 3.1 sont satisfaites si et seulement si

$$f_{\overline{z}} = 0.$$

Ainsi, si f est une transformation conforme en z_0, alors

$$df(z_0) = f_z(z_0)dz.$$

Examinons maintenant de quelle façon df transforme les cercles. Soit

$$C = \left\{ z_0 + re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi] \right\},$$

un cercle de rayon r centré en z_0. Nous avons ainsi que $df(z) = f_z(z_0)dz$, d'où

$$df(C) = \left\{ f_z(z_0) re^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} dz.$$

Comme $f_z(z_0) \neq 0$, $df(C)$ est un cercle de rayon $|f_z(z_0)|r$. On peut donc dire qu'une transformation conforme envoie un cercle infinitésimal sur un cercle infinitésimal.

3.3 Quasiconformité régulière

Nous allons présenter dans cette section la quasiconformité telle que considérée par Grötzsch en 1928. Comme nous l'avons mentionné en guise d'introduction, les transformations quasi-conformes envoient un cercle infinitésimal vers une ellipse infinitésimale. Pour faire suite à la section précédente, reconsidérons l'équation

$$df(z_0) = f_z(z_0)dz + f_{\overline{z}}(z_0)d\overline{z}.$$

Nous avons vu que dans le cas où f est une transformation conforme en z_0, $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$. Cela nous avait permis de constater que f envoie un un cercle infinitésimal sur un cercle infinitésimal. Dans la situation où f est un difféomorphisme général, puisque rien n'indique que $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, il y a un minimum de travail à faire pour avoir une idée de la façon avec laquelle f transforme les cercles infinitésimaux. Par contre, si $f_{\overline{z}}(z_0) \neq 0$ et que $f_z(z_0) = 0$, la situation ressemble beaucoup au cas où $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$. En effet, f envoie alors un cercle infinitésimal vers un cercle infinitésimal, à la différence que cette fois-ci l'orientation n'est pas préservée.

Remarque 3.1. À partir de maintenant, on s'intéressera seulement aux difféomorphismes préservant l'orientation. Cela est équivalent à affirmer que le jacobien des transformations étudiées sera strictement positif.

Exemple 3.1. Soit $f(z) = 2z^2 + \overline{z}$. On peut aussi écrire f de la façon suivante :

$$f(x+iy) = 2x^2 + x - 2y^2 + i(4xy - y).$$

En posant $u(x,y) = 2x^2 + x - 2y^2$ et $v(x,y) = 4xy - y$, nous pouvons déterminer J_f, le jacobien de cette transformation.

$$J_f = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x+1 & -4y \\ 4y & 4x-1 \end{vmatrix} = 16x^2 + 16y^2 - 1.$$

Ainsi, nous avons que

$$J_f(z) \begin{cases} < 0 & \text{si } |z| < 1/4; \\ = 0 & \text{si } |z| = 1/4; \\ > 0 & \text{si } |z| > 1/4. \end{cases}$$

Choisissons un $z_0 \in \mathbb{C}$ et examinons le comportement de f dans un voisinage de z_0. En fait, pour faire suite à la section 3.2, nous nous intéressons à la façon avec laquelle df transforme un cercle infinitésimal. Prenons $z_0 = 1+i$. Nous avons que $J_f(1+i) = 31 > 0$, donc f est localement un difféomorphisme en $z_0 = 1 + i$. Avec les formules respectives pour f_z et $f_{\overline{z}}$, on trouve que

$$df(z_0) = f_z(z_0)dz + f_{\overline{z}}(z_0)d\overline{z} = 4z_0 dz + d\overline{z} = 4(1+i)dz + d\overline{z}.$$

En exprimant $df(z_0)$ en termes de x et y, on trouve que le cercle unité est envoyé sur le lieu géométrique représenté à la figure 3.1. On peut montrer qu'il s'agit d'une ellipse d'équation $25x^2+41y^2 = 16xy+961$. En utilisant la dérivée directionnelle, il est possible de montrer que $df(z_0)$ envoie toujours un cercle infinitésimal sur une ellipse (voir [19]). Celle-ci est souvent appelée *l'ellipse de déformation de f en z_0*.

Nous voulons maintenant introduire une fonction permettant de déterminer l'importance avec laquelle df déforme un cercle infinitésimal. Pour ce faire, il est raisonnable de caractériser cette quantité en prenant l'excentricité de l'ellipse de déformation. Celle-ci correspond au rapport du grand axe de l'ellipse de déformation sur son petit axe. En effet, lorsque df déformera beaucoup un cercle infinitésimal, alors ce rapport sera grand, tandis que si df le déforme peu, il sera légèrement supérieur à 1. À partir de l'équation

$$df(z_0) = f_z(z_0)dz + f_{\overline{z}}(z_0)d\overline{z},$$

une application de l'inégalité triangulaire nous donne le droit d'écrire que

$$|f_z(z_0)||dz| - |f_{\overline{z}}(z_0)||d\overline{z}| \leq |df(z_0)| \leq |f_z(z_0)||dz| + |f_{\overline{z}}(z_0)||d\overline{z}|.$$

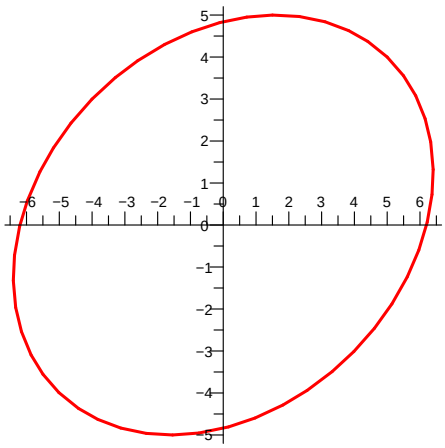


FIG. 3.1 – Image du cercle unité par $df(1+i)$

Définition 3.2. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ un difféomorphisme et soit $z_0 \in D$. Le quotient de dilatation de f en z_0 est défini par

$$D_f(z_0) = \frac{|f_z(z_0)| + |f_{\overline{z}}(z_0)|}{|f_z(z_0)| - |f_{\overline{z}}(z_0)|}.$$

Regardons de plus près cette définition ainsi que ses conséquences immédiates. D'abord, comme on se limite à considérer des difféomorphismes préservant l'orientation, nous avons que $J_f(z_0) > 0$. Ensuite, en faisant appel aux définitions de $f_z(z_0)$ et $f_{\overline{z}}(z_0)$, on montre facilement que

$$J_f(z_0) = |f_z(z_0)|^2 - |f_{\overline{z}}(z_0)|^2.$$

Nous avons donc que

$$\begin{aligned} J_f(z_0) > 0 &\iff |f_z(z_0)|^2 - |f_{\overline{z}}(z_0)|^2 > 0, \\ &\iff (|f_z(z_0)| + |f_{\overline{z}}(z_0)|)\,(|f_z(z_0)| - |f_{\overline{z}}(z_0)|) > 0, \\ &\iff |f_z(z_0)| - |f_{\overline{z}}(z_0)| > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, le quotient de dilatation est toujours positif. Par ailleurs, d'après les équations de Cauchy-Riemann, on sait que f est une transformation conforme en z_0 si et seulement si $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$. Donc en un point de conformité, le quotient de dilatation vaut toujours 1.

Définition 3.3. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ un difféomorphisme et soit $K \geq 1$. On dira que f est une *transformation K-quasi-conforme régulière sur D* si

$$D_f(z) \leq K$$

pour tout $z \in D$.

De façon générale, si le quotient de dilatation d'un difféomorphisme f est borné sur un domaine D, on dira simplement que f est une transformation quasi-conforme régulière sur D. Il devient maintenant clair que la classe des transformations conformes est une sous-classe des transformations quasi-conformes régulières. En fait, les transformations conformes sont précisément les transformations 1-quasi-conformes régulières. Par ailleurs, on peut démontrer quelques propriétés élémentaires des transformations quasi-conformes régulières.

Propriétés des transformations quasi-conformes régulières

1. Si $f : D \to f(D)$ est K-quasi-conforme régulière, alors $f^{-1} : f(D) \to D$ l'est aussi.
2. Si $f_1 : D \to f(D)$ et $f_2 : f_1(D) \to (f_2 \circ f_1)(D)$ sont respectivement K_1-quasi-conforme régulière et K_2-quasi-conforme régulière, alors $(f_2 \circ f_1) : D \to (f_2 \circ f_1)(D)$ est K_1K_2-quasi-conforme régulière.

Une conséquence importante de la deuxième propriété est que si on compose une transformation K-quasi-conforme régulière avec une transformation conforme, on obtient une transformation qui est encore K-quasi-conforme régulière. Cette propriété d'invariance jouera un rôle crucial par la suite.

Retournons maintenant à l'exemple 3.1. Nous avons que

$$\begin{aligned} f_z(1+i) &= \tfrac{1}{2}(f_x(1,1) - if_y(1,1)) \\ &= \tfrac{1}{2}(u_x(1,1) + iv_x(1,1) - iu_y(1,1) + v_y(1,1) \\ &= 4 + 4i. \end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on obtient que $f_{\overline{z}}(1+i) = 1$. Ainsi,

$$D_f(1+i) = \frac{|f_z(1+i)| + |f_{\overline{z}}(1+i)|}{|f_z(1+i)| - |f_{\overline{z}}(1+i)|} = \frac{4\sqrt{2}+1}{4\sqrt{2}-1} \approx 1.429 \ .$$

Si on avait plutôt considéré la fonction $g(z) = 2z^2 + 2\overline{z}$, nous aurions obtenu que $D_g(1+i) \approx 2.094$. Le fait qu'on obtienne ici une valeur supérieure à $D_f(1+i)$ n'est pas surprenant. En effet, le fait d'augmenter le coefficient de $\overline{z}$ rend notre transformation « de moins en moins conforme ».

3.4 La définition géométrique

La définition géométrique est plus générale que celle considérée par Grötzsch. Elle est indissociable du concept de quadrilatère, dont voici la définition.

Définition 3.4. Un *quadrilatère* $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est un domaine de Jordan $Q \subset \mathbb{C}$ que l'on a muni d'une suite de quatre points appartenant à ∂Q, qu'on appelle les sommets du quadrilatère.

Soient $Q_1(z_1, z_2, z_3, z_4)$ et $Q_2(w_1, w_2, w_3, w_4)$ deux quadrilatères dans $\mathbb{C}$. On dira que ces deux quadrilatères sont conformément équivalents s'il existe une transformation conforme h telle que

1. $h(\overline{Q_1}) = \overline{Q_2}$;
2. $h(z_i) = w_i$ pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

C'est donc dire que h envoie $\overline{Q_1}$ sur $\overline{Q_2}$ et fait correspondre les sommets des quadrilatères. Nous allons maintenant ramener l'étude des quadrilatères à celle des rectangles, au sens habituel du terme. En premier lieu, rappelons une conséquence importante du théorème de correspondance de Riemann. En effet, si on considère un quadrilatère $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$, il est toujours possible de déterminer une transformation conforme h qui envoie Q sur le disque unité ouvert. De plus, si on spécifie la valeur que prendra h sur trois points appartenant à ∂Q, la fonction h sera uniquement déterminée. On ne peut donc pas forcer la fonction h à prendre des valeurs particulières sur quatre points de ∂Q. Ainsi, il y a des situations où on ne peut pas trouver une transformation conforme entre deux quadrilatères qui fait correspondre les quatre sommets. En effet, on peut seulement choisir l'image de trois points de la frontière du quadrilatère que nous voulons envoyer sur la frontière de l'autre quadrilatère, le quatrième point étant automatiquement déterminé.

La théorie des fonctions elliptiques nous donne, entre autre, les outils nécessaires pour construire une transformation conforme qui envoie un quadrilatère donné vers un rectangle. À ce sujet, on peut consulter [1] et [21]. Si $R(w_1, w_2, w_3, w_4)$ est un rectangle obtenu comme étant l'image d'un quadrilatère $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ par une transformation conforme, on dira que $R(w_1, w_2, w_3, w_4)$ est un *rectangle canonique* associé à $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Il est clair que si $R_1(w_1, w_2, w_3, w_4)$ et $R_2(t_1, t_2, t_3, t_4)$ sont deux rectangles canoniques associés à un même quadrilatère, alors il existe une transformation conforme f entre $R_1(w_1, w_2, w_3, w_4)$ et $R_2(t_1, t_2, t_3, t_4)$. De plus, f est nécessairement de la forme

$$f(z) = \alpha z + \beta, \qquad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{C}. \tag{3.2}$$

La preuve de cette affirmation se fait en utilisant le principe de symétrie de Schwarz. Géométriquement, une transformation de cette forme peut être interprétée comme étant une rotation suivie d'une homothétie, puis d'une translation. Ainsi, si h envoie le quadrilatère $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ sur le rectangle $R(w_1, w_2, w_3, w_4)$, il est possible de construire une fonction f de la forme 3.2 telle que la fonction $f \circ h$ soit une transformation conforme envoyant $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ sur un rectangle de la forme $R'(0, a, a + bi, bi)$, où $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Définition 3.5. Soient $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ un quadrilatère et $R(0, a, a+bi, bi)$ un rectangle canonique associé à $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Le *module de* $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est défini par

$$M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = \frac{a}{b}.$$

Remarque 3.2. Bien qu'il existe plusieurs rectangles canoniques associés à un quadrilatère donné, nous venons de voir que ces rectangles sont équivalents à une rotation, une homothétie et une translation près. Comme ces transformations ne modifient pas le rapport des côtés d'un rectangle, la notion de module d'un rectangle est bien définie.

Remarque 3.3. Si $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ est un quadrilatère, alors en faisant un réarrangement des sommets, on obtient les identités suivantes :

$$M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)) = M(Q(z_3, z_4, z_1, z_2)) = \frac{1}{M(Q(z_4, z_1, z_2, z_3))} = \frac{1}{M(Q(z_2, z_3, z_4, z_1))}.$$

Définition 3.6. Soient D un domaine de Jordan et $f : D \to \mathbb{C}$ un homéomorphisme préservant l'orientation. La *dilatation maximale* de f sur D est définie par

$$K_f(D) = \sup_{\overline{Q} \subset D} \frac{M(f(Q(z_1, z_2, z_3, z_4)))}{M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))}.$$

Définition 3.7. Un homéomorphisme f sur D qui préserve l'orientation est dit *quasi-conforme* si $K_f(D) < \infty$. De plus, si $K_f(D) \leq K$, on dira que f est *K-quasi-conforme* sur D.

C'est précisément cette définition qu'on appelle la définition géométrique de la quasi-conformité. Elle fut introduite au début des années cinquante. Mentionnons que les propriétés vérifiées par les transformations quasi-conformes régulières qui sont présentées à la page 25 sont aussi valides pour les transformations quasi-conformes. Voici maintenant un théorème caractérisant la convergence d'une suite de transformations quasi-conformes.

Théorème 3.1. *Soit (f_n) une suite de transformations K-quasi-conformes sur D. Si (f_n) converge localement uniformément vers la fonction f dans D, alors f est une transformation K-quasi-conforme sur D, ou bien constante sur D.*

On retrouve une démonstration de ce théorème dans [21]. Celle-ci fait appel au théorème de Radó qui concerne la convergence d'une suite de domaines de Jordan au sens de Fréchet. Le théorème 3.1 est important pour développer la théorie de la quasiconformité. Pour faire un parallèle, mentionnons que l'équivalent de ce théorème n'est pas vrai dans le contexte des transformations quasi-conformes régulières. En effet, il est possible de construire une suite de fonctions K-quasi-conformes régulières sur un domaine D qui converge uniformément vers f sur tous les sous-ensembles compacts de D, mais où f n'est pas K-quasi-conforme régulière. C'est sans doute pour cette raison qu'on a cherché à caractériser la quasiconformité d'une autre façon. Montrons maintenant qu'une transformation K-quasi-conforme régulière est une transformation K-quasi-conforme au sens de la définition 3.7.

Théorème 3.2. *Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une transformation K-quasi-conforme régulière. Alors f est K-quasi-conforme.*

Preuve. En partant de l'hypothèse que $\sup_{z\in D} D_f(z) \leq K$, il nous faut ici montrer que pour un quadrilatère arbitraire $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ vérifiant $\overline{Q} \subset D$, l'inégalité

$$K_f(D) \leq K$$

est vérifiée. Soient $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ un quadrilatère vérifiant $\overline{Q} \subset D$, et $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ l'image de $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ par f. On peut trouver une transformation conforme ϕ qui envoie $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$ sur le rectangle $R(0, M, M+i, i)$, où M correspond au module de $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$. De même, on peut trouver une transformation conforme ψ qui envoie $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$ sur le rectangle $R'(0, M', M'+i, i)$, où M' correspond au module de $Q'(w_1, w_2, w_3, w_4)$. La figure 3.4 illustre bien ces diverses correspondances. Nous sommes maintenant amenés à montrer que

$$M' \leq KM. \tag{3.3}$$

Posons $w = \psi \circ f \circ \phi^{-1} : R \to R'$. Puisque f est une transformation K-quasi-conforme régulière et que la composition par des transformations conformes ne modifie pas le quotient de dilatation, il suit que w est une transformation K-quasi-conforme régulière sur R. Donc pour tout $z \in R$, nous avons que

$$\frac{|w_z(z)| + |w_{\overline{z}}(z)|}{|w_z(z)| - |w_{\overline{z}}(z)|} \leq K.$$

Avec cette inégalité, on trouve que

$$\begin{aligned} J_w(z) &= |w_z|^2 - |w_{\overline{z}}|^2 \\ &= (|w_z| - |w_{\overline{z}}|)(|w_z| + |w_{\overline{z}}|) \\ &\geq \tfrac{1}{K}(|w_z| + |w_{\overline{z}}|)^2 \\ &\geq \tfrac{1}{K}(|w_x(z)|)^2. \end{aligned}$$

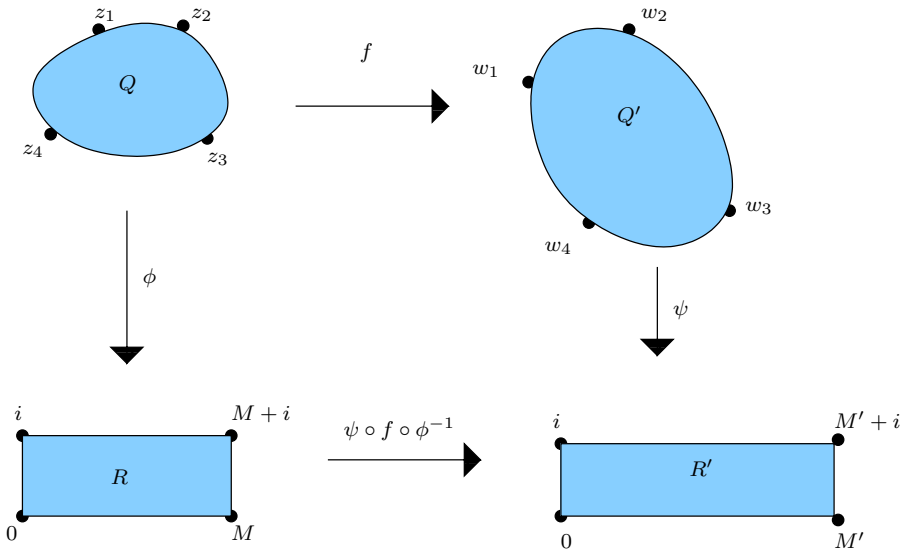


FIG. 3.2 – Correspondance entre quadrilatères et rectangles canoniques

Nous avons choisi le rectangle $R'(0, M', M'+i, i)$ de telle sorte que son aire soit égale à son module. Ainsi, en appliquant le théorème de Fubini, on obtient que

$$M' = \int\int_R J_w(x+iy)dxdy \geq \frac{1}{K}\int_0^1 dy \int_0^M |w_x(x+iy)|^2 dx. \tag{3.4}$$

Puis, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'estimé

$$\int_0^M |w_x(x+iy)|^2 dx \geq \frac{1}{M}\left(\int_0^M |w_x(x+iy)|dx\right)^2. \tag{3.5}$$

Par ailleurs, la quantité

$$\int_0^M |w_x(x+iy)|dx$$

représente la longueur d'une courbe dans R' qui relie les deux côtés verticaux de $R'(0, M', M'+i, i)$, qui sont de longueur 1. Par conséquent, la longueur de cette courbe est au moins aussi grande que la longueur des autres côtés de $R'(0, M', M'+i, i)$. Or, par contruction, cette longueur correspond au module de R'. Ainsi, nous avons que

$$\int_0^M |w_x(x+iy)|dx \geq M'. \tag{3.6}$$

D'après les équations 3.6, 3.5 et 3.4, il suit que

$$M' \geq \frac{M'^2}{KM}.$$

Finalement, cette inégalité est équivalente à 3.3, ce qui termine la démonstration. ■

3.5 La définition analytique

En pratique, il est difficile de vérifier, directement à partir de la définition 3.7, si une transformation est quasi-conforme. Pour cette raison, durant les années cinquantes, plusieurs mathématiciens tentèrent de caractériser la quasiconformité à l'aide de propriétés analytiques. Nous proposons dans cette section de présenter les différents concepts qui ont mené à la définition analytique de la quasi-conformité en 1959.

Pour faire suite au théorème 3.2, mentionnons que si une transformation K-quasi-conforme au sens de la définition 3.7 est dérivable en z_0, alors $D_f(z_0) \leq K$. Ce résultat se démontre en utilisant l'inégalité de Rengel, qui permet d'obtenir une borne supérieure et une borne inférieure pour le module d'un quadrilatère en fonction de l'aire de celui-ci. On peut en trouver une démonstration dans [21]. Cependant, rien n'indique qu'une transformation quasi-conforme se doit d'être dérivable en tout point de son domaine. Pour caractériser la quasiconformité en termes analytiques, on pourrait d'abord se baser sur la définition de la quasiconformité régulière, et examiner ce qui se passe si une fonction est K-quasi-conforme régulière presque partout sur son domaine.

Cette approche porta fruit. En effet, en 1957, A. Mori montra que si f est une transformation K-quasi-conforme sur un domaine D, alors f est dérivable presque partout et

$$D_f(z) = \frac{|f_z(z)| + |f_{\overline{z}}(z)|}{|f_z(z)| - |f_{\overline{z}}(z)|} \leq K$$

presque partout sur D (voir [26]). Voici quelques lignes qui expliquent comment il a obtenu ce résulat. En premier lieu, il a défini la *distorsion circulaire* d'un homéomorphisme f par

$$H_f(z) = \lim_{r \to 0^+} \sup \frac{\max_\theta |f(z + re^{i\theta}) - f(z)|}{\min_\theta |f(z + re^{i\theta}) - f(z)|}.$$

Il a d'abord montré que cette quantité était la même que le quotient de dilation dans le cas d'une transformation quasi-conforme régulière. Par la suite, il a établi la dérivabilité presque partout d'une transformation K-quasi-conforme en montrant que la distorsion circulaire d'une telle transformation définie sur un domaine D est bornée supérieurement par un nombre dépendant de K uniquement. Il a par la suite fait appel au théorème de Rademacher-Stepanoff, qui assure la dérivabilité presque partout d'un fonction qui satisfait la condition de Lipchitz.

Suite à ce résultat, on peut se demander si un homéomorphisme dérivable presque partout avec un quotient de dilatation borné est nécessairement quasi-conforme. La réponse à cette question est négative, et voici un contre-exemple qui provient de [21].

Exemple 3.2. Soient C l'ensemble de Cantor et $c : [0,1] \to [0,1]$ la fonction de

Cantor. Celle-ci est l'unique fonction f définie sur l'intervalle $[0,1]$ qui satisfait les quatre propriétés suivantes :

1. f est croissante ;
2. $f(0) = 0$;
3. $f(x/3) = f(x)/2$;
4. $f(1-x) = 1 - f(x)$.

Il s'agit d'une fonction de type *escalier du diable*. Pour en savoir plus sur ce type de fonctions, voir [34]. Cette terminologie prend tout son sens lorsqu'on considère la figure 3.2, qui illustre la fonction de Cantor. On peut montrer que la fonction c est dérivable en chaque $x \in [0,1] \setminus C$.

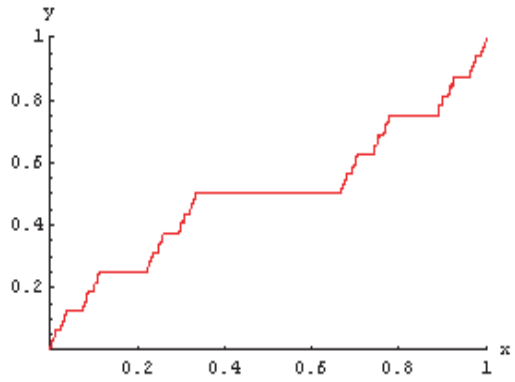


FIG. 3.3 – La fonction de Cantor

Considérons la fonction $h(z) = h(x+iy) = x + i(y + c(x))$. Comme l'ensemble de Cantor est de mesure nulle, la fonction c est dérivable presque partout sur $[0,1]$, et par conséquent, h est dérivable presque partout sur $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \Re(z) \leq 1\}$. Par ailleurs, il découle de la définition de c que $c'(x) = 0$ presque partout. Un calcul direct de h_z et $h_{\overline{z}}$ montre que $D_h(z) = 1$ presque partout. Nous avons donc bien que h est un homéomorphisme dérivable presque partout avec un quotient de dilatation borné. Cependant, comme nous allons le voir, cette fonction ne vérifie pas une propriété de continuité particulière, qui est vérifiée par toutes les transformations quasi-conformes.

Définition 3.8. Soient $R = \{x+iy : a < x < c,\ b < y < d\}$, un rectangle tel que $\overline{R} \subset D$, et $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Pour tout $y \in (b,d)$, on définit le segment $L_y = \{x+iy : a < x < c\}$ et pour tout $x \in (a,c)$, on définit le segment $L_x = \{x+iy : b < y < d\}$. On dit que la fonction f est *absolument continue sur les lignes* si f est absolument continue comme fonction de x sur presque tous les segments L_y et si f est absolument continue comme fonction de y sur presque tous les segments L_x.

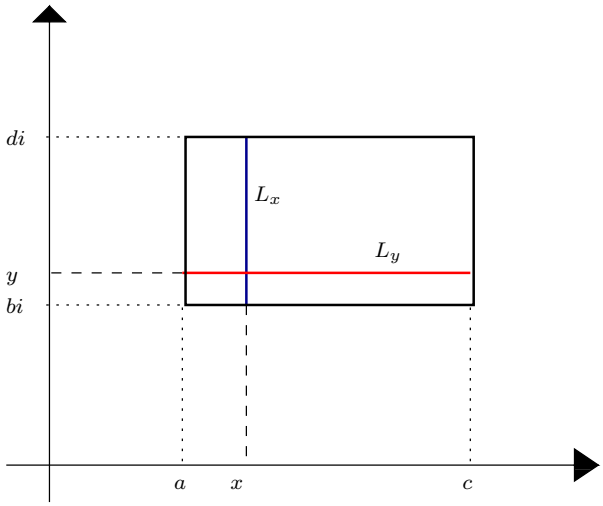


FIG. 3.4 – Continuité absolue sur les lignes

Théorème 3.3. *Une transformation quasi-conforme sur un domaine D est absolument continue sur les lignes dans D.*

Ce résultat fut démontré par K. Strebel en 1955 (voir [31]). On en trouve une démontration simplifiée dans [21], qui est due à A. Pfluger.

Retournons à l'exemple de la fonction de Cantor. D'abord, une fonction f qui est absolument continue sur un intervalle $[a, b]$ vérifie

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx. \tag{3.7}$$

Or, comme la fonction c est croissante et que sa dérivée s'annule presque partout dans l'intervalle $[0, 1]$, il est clair que c ne peut satisfaire une équation du type 3.7 sur cet intervalle. Ainsi, en prenant $R(0, 1, 1 + i, i)$ comme rectangle et en fixant un $y_0 \in (0, 1)$, la fonction h ne sera pas absolument continue sur le segment L_{y_0}. D'après le théorème 3.3, h ne peut être une transformation quasi-conforme.

Comme nous venons de le voir, on ne peut pas caractériser la quasiconformité d'une fonction seulement en exigeant que le coefficient de dilatation de celle-ci soit borné ; il faut tenir compte de la continuité absolue sur les lignes. Finalement, les travaux de L. Bers et Z. Yûjôbô ont permis de montrer que la continuité absolue d'une fonction sur les lignes dans un domaine D, en conjonction avec un coefficient de dilatation borné sur ce même domaine, entraîne la quasiconformité de la fonction sur D. Voici donc, pour clore cette section, la définition analytique de la quasiconformité, qui est équivalente à la définition géométrique.

Définition 3.9. Soit f un homéomorphisme sur un domaine D qui préserve l'orientation. On dira que f est une transformation K-quasi-conforme sur D si

1. f est absolument continue sur les lignes dans D ;
2. La condition $D_f(z) \leq K$ est vérifiée presque partout sur D.

3.6 Quasiconformité sur des ensembles d'intérieur vide

Parmi toutes les définitions de quasiconformité présentées dans ce chapitre, il n'y en a aucune qui peut servir à définir la notion de quasiconformité sur des ensembles finis. En effet, dans tous les cas, les transformations quasi-conformes sont définies sur un domaine dans le plan complexe, c'est-à-dire sur un ouvert connexe.

Définition 3.10. Soient z_1, z_2, z_3 et z_4, quatre éléments distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Le *produit croisé* de z_1, z_2, z_3 et z_4 est défini par

$$\chi(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}.$$

On peut vérifier que le fait d'exiger que les z_i soient distincts entraîne que la fonction χ prend ses valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$. Ensuite, il est possible de montrer que le produit croisé est un invariant pour certaines transformations conformes, à savoir les transformations de Möbius (voir [28]). On reparlera brièvement de ces fonctions au début du chapitre 5. Ainsi, il est raisonnable de vouloir qu'une transformation quasi-conforme ne modifie pas trop le produit croisé d'un quadruplet. Cela nous amène donc à la définition ci-dessous.

Définition 3.11. Soit E un sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$ contenant au moins quatre points. Un homéomorphisme $f : E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est quasi-conforme s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\operatorname{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}} \left(\chi\left(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)\right), \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)\right) \leq M$$

pour tout quadruplet (z_1, z_2, z_3, z_4).

Dans la définition 3.11, $\operatorname{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}$ représente la métrique hyperbolique sur l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0, 1, \infty\}$. Pour en savoir davantage sur l'existence de cette métrique ainsi que ses propriétés, le lecteur pourra se référer à [18]. On peut montrer que cette définition de la quasiconformité est équivalente à la définition géométrique (voir [22]).

CHAPITRE 4

Mouvements holomorphes

4.1 Origines

En topologie, il est fréquent de se demander si deux ensembles sont homéomorphes. En analyse complexe, certains problèmes sont de nature similaire. Un de ceux-ci concerne l'ensemble de Julia d'une fonction rationnelle. En effet, à chaque fonction rationnelle est associé son ensemble de Julia, que l'on note généralement $J(f)$. Supposons qu'on fait varier légèrement les coefficients de f. Cela entraînera donc une perturbation au niveau de son ensemble de Julia. Certaines personnes se sont donc intéressées au comportement de l'ensemble de Julia d'une fonction rationnelle lorsque les coefficients de celle-ci varient. C'est précisément dans ce contexte que la notion de mouvement holomorphe a émergé. Disons pour l'instant qu'un mouvement holomorphe est une fonction qui déplace un sous-ensemble du plan complexe d'une belle façon. On définira cette notion à la section suivante.

Le concept de mouvement holomorphe a aussi été considéré pour étudier les groupes topologiques. Voici comment. Soit G un groupe de transformations de Möbius sur $\widehat{\mathbb{C}}$. On rappelle qu'une transformation de Möbius sur $\widehat{\mathbb{C}}$ est une fonction de la forme

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$. L'ensemble des transformations de Möbius muni de la loi de composition possède une structure de groupe. L'étude de ses différents sous-groupes est une partie importante de la classification des surfaces de Riemann. Une bonne référence sur le sujet est l'ouvrage de A. Beardon (voir [8]).

Soit G un groupe de transformations de Möbius sur $\widehat{\mathbb{C}}$. On dira que p est un *point limite* de G si

$$p = \lim_{n\to\infty} g_n(q),$$

où les g_i sont des éléments distincts de G, et $q \in \widehat{\mathbb{C}}$. À chaque groupe de transformations de Möbius est associé l'ensemble de ses points limites, qu'on note $\Lambda(G)$. S'il existe un $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda(G)$, on dira que G est un *groupe de Klein*.

En modifiant les coefficients des transformations de Möbius qui génèrent un groupe de Klein, son ensemble limite s'en trouvera généralement modifié. Considérons une famille de groupes de Klein paramétrisée par le disque unité ouvert. On entend par là que les coefficients des générateurs du groupe dépendent d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{D}$. On peut montrer que sous certaines conditions, les ensembles limites d'une famille de groupes de Klein décrivent un mouvement holomorphe (voir [3]).

Dans un article publié en 1983 (voir [23]), Mañé, Sad et Sullivan ont donné une condition suffisante pour que les ensembles de Julia de deux fonctions rationnelles soient homéomorphes. Pour y arriver, ils ont introduit des familles de fonctions rationnelles paramétrisées d'une façon bien précise. Avant d'établir ce résultat, les auteurs ont démontré un lemme qui a eu des conséquences importantes. Au début des années quatre-vingt-dix, Z. Słodkowski a démontré un théorème de prolongement qui dresse bien le portrait de ce que peut être un mouvement holomorphe paramétrisé par $\mathbb{D}$. Nous allons discuter de ce résultat un peu plus loin, mais avant, voyons ce qu'on entend par mouvement holomorphe.

4.2 Définitions

Définition 4.1. Soient E un sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$, Λ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $\lambda_0 \in \Lambda$. On dit que

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \Lambda \times E & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ (\lambda, z) & \mapsto & \Phi(\lambda, z) \end{array}$$

est un *mouvement holomorphe* de l'ensemble E paramétrisé par Λ et λ_0 si chacune des conditions suivantes est vérifiée :

1. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, $\Phi(\lambda, \cdot) : E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est injective ;
2. $\Phi(\lambda_0, z)(z) = z$ pour tout $z \in E$;
3. Pour chaque $z \in E$, $\lambda \mapsto \Phi(\lambda, z)$ est holomorphe.

Afin de simplifier l'écriture, nous allons introduire une notation très utile. Le symbole Φ_λ représentera la fonction $\Phi(\lambda, \cdot) : E \to \widehat{\mathbb{C}}$, alors que Φ^z sera utilisé en remplacement de la fonction $\Phi(\cdot, z) : \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Remarque 4.1.

– Le λ_0 qu'on choisit dans Λ s'appelle le *point de base* du mouvement holomorphe.

– Si Φ est un mouvement holomorphe de l'ensemble E paramétrisé par Λ et λ_0, On notera par $E(\lambda)$ l'image de E par la fonction Φ_λ. De même, puisque $\Phi_{\lambda_0} = \mathrm{id}$, on écrira souvent $E(\lambda_0)$ pour désigner l'ensemble qui subit le mouvement holomorphe.

– Par la suite, à moins d'avis contraire, Λ est toujours un ouvert connexe du plan complexe. Par ailleurs, pour des raisons techniques que nous verrons dans la démonstration du théorème 4.3, l'ensemble Λ doit pouvoir supporter une métrique hyperbolique.

Au fil des années, la définition d'un mouvement holomorphe a quelque peu évolué. En effet, au début, on imposait que Λ soit le disque unité ouvert. Par la suite, certains ont considéré le cas où Λ était un disque ouvert de rayon quelconque, avant d'arriver finalement à la définition 4.1. Mentionnons aussi qu'il est possible de définir la notion de mouvement holomorphe de façon beaucoup plus générale en exigeant de Λ qu'elle soit simplement une variété analytique connexe. Cependant, nous n'aurons pas besoin de travailler avec autant de généralité pour obtenir les résultats désirés.

Définition 4.2. Soit E un sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$ tel que $\{0, 1, \infty\} \subseteq E$. On dira que $\Phi : \Lambda \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est un *mouvement holomorphe normalisé* si pour tout $\lambda \in \Lambda$, Φ_λ admet $0, 1$ et ∞ comme points fixes.

Lorsqu'on fait l'étude du mouvement holomorphe d'un ensemble possédant au moins trois points, on ne perd pas de généralité en supposant que celui-ci est normalisé. En effet, soit

$$\begin{aligned} \Phi : \Lambda \times E &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ (\lambda, z) &\mapsto \Phi(\lambda, z), \end{aligned}$$

un mouvement holomorphe de l'ensemble E paramétrisé par Λ et λ_0. Supposons qu'il existe au moins trois points distincts dans E, disons a, b et c. Soit α la transformation de Möbius qui envoie 0 sur a, 1 sur b et ∞ sur c. Un résultat classique d'analyse complexe nous assure qu'il est toujours possible de construire une telle transformation (voir [28]). Pour la même raison, à chaque valeur de $\lambda \in \Lambda$, on peut associer une transformation de Möbius β_λ définie par

$$\beta_\lambda(z) := \frac{z - \Phi(\lambda, a)}{z - \Phi(\lambda, c)} \cdot \frac{\Phi(\lambda, b) - \Phi(\lambda, c)}{\Phi(\lambda, b) - \Phi(\lambda, a)}.$$

Celle-ci envoie $\Phi(\lambda, a)$, $\Phi(\lambda, b)$ et $\Phi(\lambda, c)$ sur $0, 1$, et ∞ respectivement. On constate aussi que pour chaque $z \in E(\lambda)$, la fonction $\lambda \mapsto \beta_\lambda$ est holomorphe. Ainsi,

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi} : \Lambda \times \alpha^{-1}(E) &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ (\lambda, z) &\mapsto \beta_\lambda \circ \Phi(\lambda, \alpha(z)) \end{aligned}$$

est un mouvement holomorphe normalisé. On l'appelle *le normalisé de* Φ *par rapport à* a, b *et* c.

4.3 Le λ-lemme

Dans cette section, nous allons présenter une démonstration du premier résultat d'importance concernant le mouvement holomorphe. Celui-ci est connu sous le nom du λ-lemme de Mañé, Sad et Sullivan. Avant d'en entreprendre la démontration, on se doit d'effectuer quelques rappels concernant certains résultats d'analyse complexe.

Définition 4.3. Soient U un domaine de $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}$ une famille de fonctions $f : U \to \widehat{\mathbb{C}}$. On dira que $\mathcal{F}$ est une famille normale sur U si chaque suite dans $\mathcal{F}$ admet une sous-suite qui converge uniformément sur tous les compacts de U vers une fonction $g : U \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Notons que dans la définition 4.3, on ne demande pas que la fonction g appartienne à la famille $\mathcal{F}$. Les familles normales furent introduites par P. Montel en 1907. Le théorème suivant, dû à ce dernier, a permis de donner des démonstrations élégantes de plusieurs résultats, notamment du grand théorème de Picard (voir [18]).

Théorème 4.1. *Soit U un domaine dans le plan complexe et soient P, Q et R trois points distincts de $\widehat{\mathbb{C}}$. Supposons que $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions holomorphes sur U à valeurs dans $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{P, Q, R\}$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille normale sur U.*

Pour démontrer le théorème 4.3, nous aurons aussi besoin du résultat suivant, que l'on doit à A. Hurwitz. On retrouve une démontration de ce théorème dans la plupart des ouvrages d'introduction à l'analyse complexe, entre autres dans [1] et [18].

Théorème 4.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur U telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) \neq 0$ sur U. Si $f_n \to f$ uniformément sur tous les compacts de U, alors f est identiquement nulle ou bien $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in U$.*

Ces deux résultats sont essentiels pour démontrer le λ-lemme. Voici maintenant l'énoncé de ce résultat, qui, rappelons-le, fut obtenu en 1983 par Mañé, Sad et Sullivan (voir [23]).

Théorème 4.3. *Soit Λ un ouvert connexe du plan complexe et $\lambda_0 \in \Lambda$. Supposons que $\Phi : \Lambda \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est un mouvement holomorphe de $E \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ paramétrisé par Λ et λ_0. Alors Φ est continue et on peut prolonger Φ continûment à $\widetilde{\Phi}$, de telle sorte que $\widetilde{\Phi} : \Lambda \times \overline{E} \to \widehat{\mathbb{C}}$ soit un mouvement holomorphe de la fermeture de E paramétrisé par Λ et λ_0. De plus, pour tout $\lambda \in \Lambda$, $\widetilde{\Phi}_\lambda$ est une transformation quasi-conforme.*

La démonstration de ce théorème se fera en trois étapes. Nous allons montrer en premier lieu un lemme qui nous permettra ensuite d'obtenir la continuité du mouvement holomorphe. Pour ce faire, les théorèmes 4.1 et 4.2 seront nécessaires. Finalement, à l'aide du lemme de Schwarz, nous obtiendrons la propriété de quasi-conformité du mouvement holomorphe.

De plus, puisque le λ-lemme concerne le prolongement du mouvement holomorphe d'un ensemble E à sa fermeture, il est sans conséquence lorsque l'ensemble E est égal à sa fermeture. Ainsi, on peut faire l'hypothèse que E contient au moins trois points, et ainsi supposer que le mouvement holomorphe est normalisé.

Lemme 4.1. *Soit $z \in \overline{E}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans E qui tend vers z. Les fonctions $\Phi^{z_n} : \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$ tendent, uniformément sur tout compact de Λ, vers une fonction $\Phi^z : \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$, indépendante de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. De plus, tout mouvement holomorphe est continu.*

Preuve du lemme 4.1. Sans perte de généralité, on peut supposer que $z \neq \infty$. En effet, le mouvement holomorphe étant normalisé, nous avons que $\Phi^\infty(\lambda) = \infty$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. C'est donc dire que quel que soit $\lambda \in \Lambda$, $\Phi^{z_n}(\lambda) \to \infty$ lorsque $z_n \to \infty$. Le lemme est donc vérifié pour $z = \infty$.

En premier lieu, montrons que les fonctions Φ^{z_n} prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$, ou bien sont constantes.

1^{er} *cas :* $z_n \in \{0, 1, \infty\}$.
Dans cette situation, puisque Φ est normalisé, z_n est un point fixe de Φ_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Par conséquent, $\Phi^{z_n} : \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$ est la fonction constante qui vaut identiquement la valeur z_n.

2^e *cas :* $z_n \notin \{0, 1, \infty\}$.
Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $\zeta \in \Lambda$ et $a \in \{0, 1, \infty\}$ tel que $\Phi^{z_n}(\zeta) = a$. Or, par hypothèse, nous avons que $\Phi^a(\lambda) = a$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. En particulier, nous avons que $\Phi^a(\zeta) = a$. Par définition du mouvement holomorphe, on sait que la fonction $\Phi_\lambda : E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est injective. On doit donc avoir que $a = z_n$, mais cela contredit le choix de z_n.

Montrons maintenant que si $z \neq \infty$, alors $\mathcal{P}_z := \{\Phi^{z_n} : n \in \mathbb{N}\}$ est une famille normale sur Λ. D'abord, il est trivial de constater qu'une famille de fonctions qui sont constantes sur Λ est une famille normale sur ce domaine. Ensuite, d'après le théorème 4.1, une famille de fonctions holomorphes définies sur Λ et qui évitent l'ensemble $\{0, 1, \infty\}$ est normale. Par conséquent, comme l'union de deux familles normales l'est aussi, il suit que $\mathcal{P}_z$ est une famille normale pour tout $z \in \overline{E}$. Il est donc possible d'extraire une sous-suite de la suite Φ^{z_n} qui possède une limite.

Supposons maintenant que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient deux suites qui tendent vers z et pour lesquelles Φ^{z_n} et Φ^{w_n} aient respectivement les fonctions Φ^z et Φ^w comme limite. Posons $\Psi_n := \Phi^{w_n} - \Phi^{z_n}$ et $\Psi := \lim_{n\to\infty} \Psi_n$. Nous avons donc que $\Psi = \Phi^w - \Phi^z$. Par ailleurs, l'injectivité des fonctions $\Phi_\lambda : E \to \widehat{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \Lambda$ entraîne que Ψ_n ne s'annule jamais sur Λ, ou est identiquement nulle. Ainsi, le théorème 4.2 nous permet d'affirmer que Ψ est identiquement nulle, ou prend toujours des valeurs différentes de zéro. Or,

$$\Psi(\lambda_0) = \Phi^w(\lambda_0) - \Phi^z(\lambda_0) = \lim_{n\to\infty} \big(\Phi^{w_n}(\lambda_0) - \Phi^{z_n}(\lambda_0)\big).$$

Puisque par définition du mouvement holomorphe $\Phi^{w_n}(\lambda_0) = w_n$ et $\Phi^{z_n}(\lambda_0) = z_n$, le fait que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient deux suites qui tendent vers z entraîne que $\Psi(\lambda_0) = 0$, d'où on conclut que Ψ est identiquement nulle. Cela montre finalement que $\Phi^z = \Phi^w$.

La continuité du mouvement holomorphe découle du fait que $\lim_{n\to\infty} \Phi_\lambda(z_n) = \Phi_\lambda(z)$ pour toute suite z_n dans E qui tend vers z. Ainsi, si on choisit une suite z_n qui tend vers l'infini, alors la suite de fonctions Φ^{z_n} tend vers la fonction qui vaut identiquement l'infini sur Λ. ■

Preuve du théorème 4.3. Pour $z \in \overline{E}$, on définit

$$\widetilde{\Phi}(\lambda, z) := \lim_{n\to\infty} \Phi(\lambda, z_n),$$

où $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E qui tend vers z. D'après le lemme 4.1, $\widetilde{\Phi}$ est bien définie. D'autre part, pour $z \in E$, nous avons que $\widetilde{\Phi}_\lambda(z) = \Phi_\lambda(z)$. En effet, il suffit de prendre la suite $z_n = z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans le lemme 4.1. Montrons maintenant que

$$\begin{aligned} \widetilde{\Phi} : \Lambda \times \overline{E} &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ (\lambda, z) &\mapsto \widetilde{\Phi}(\lambda, z) \end{aligned}$$

est un mouvement holomorphe de $\overline{E}$ paramétrisé par Λ et λ_0. Tout d'abord, on remarque que $\widetilde{\Phi}_\lambda$ est injective pour toute valeur de $\lambda \in \Lambda$. En effet, soient z et w deux éléments distincts de $\overline{E}$. Si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites dans E qui tendent respectivement vers z et w, alors, pour n assez grand, la fonction $\Psi_n := \Phi^{w_n} - \Phi^{z_n}$ ne s'annule jamais. En effet, cela découle de l'injectivité des fonctions $\Phi_\lambda : E \to \widehat{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \Lambda$. Le théorème 4.2 nous permet alors de conclure que $\Psi := \lim_{n\to\infty} \Psi_n$ ne s'annule jamais, ou est identiquement nulle. Or, $\Psi(\lambda_0) = \widetilde{\Phi}^w(\lambda_0) - \widetilde{\Phi}^z(\lambda_0) = z - w \neq 0$. On peut donc en conclure que Ψ ne s'annule jamais sur Λ, ce qui montre l'injectivité des fonctions $\widetilde{\Phi}_\lambda : \overline{E} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $\lambda \in \Lambda$.

On doit aussi montrer que pour tout $z \in \overline{E}$, la fonction $\lambda \mapsto \widetilde{\Phi}^z(\lambda)$ est holomorphe. Soit z_n une suite dans E qui tend vers z. Les fonctions $\Phi^{z_n} : \Lambda \to \widehat{\mathbb{C}}$ sont holomorphes et, d'après le lemme 4.1, elles tendent vers $\widetilde{\Phi}^z$ uniformément sur tous les compacts de Λ. Par conséquent, $\widetilde{\Phi}^z$ est holomorphe.

Pour montrer que $\widetilde{\Phi}_{\lambda_0}(z) = z$, pour tout $z \in \overline{E}$, il suffit de considérer une suite z_n qui tend vers z. On aura alors que $\Phi_{\lambda_0}(z_n) = z_n \; \forall \; n \in \mathbb{N}$, et par conséquent, en prenant la limite lorsque n tend vers ∞, on trouve que $\widetilde{\Phi}_{\lambda_0}(z) = z$.

Cela montre donc que $\widetilde{\Phi}$ est un mouvement holomorphe de $\overline{E}$ paramétrisé par Λ et λ_0, d'où la continuité de $\widetilde{\Phi}$. Montrons maintenant que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la fonction $\widetilde{\Phi}_\lambda : \overline{E} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est quasi-conforme au sens de la définition 3.11.

Soit (z_1, z_2, z_3, z_4) un quadruplet dont les éléments, qui sont distincts, sont choisis dans $\overline{E}$. On définit la fonction holomorphe suivante :

$$\begin{aligned} g : \Lambda &\to \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\} \\ \lambda &\mapsto \chi(\widetilde{\Phi}_\lambda(z_1), \widetilde{\Phi}_\lambda(z_2), \widetilde{\Phi}_\lambda(z_3), \widetilde{\Phi}_\lambda(z_4)). \end{aligned}$$

Une généralisation du lemme de Schwarz, obtenue par Ahlfors, nous permet d'affirmer que la fonction g est une contraction entre les espaces métriques Λ et $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, munis de leur métrique hyperbolique respective. On peut trouver une démonstration de ce résultat dans [18]. Par conséquent, si on note par dist_Λ et $\mathrm{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}$ les métriques hyperboliques respectives des espaces Λ et $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$, nous avons que pour tout $\lambda, \zeta \in \Lambda$,

$$\mathrm{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}(g(\lambda), g(\zeta)) \leq \mathrm{dist}_\Lambda(\lambda, \zeta).$$

D'autre part, puique $\widetilde{\Phi}_{\lambda_0} = \mathrm{id}$ sur $\overline{E}$, il suit que $g(\lambda_0) = \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$. Il suit que

$$\mathrm{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}(\chi(\widetilde{\Phi}_\lambda(z_1), \widetilde{\Phi}_\lambda(z_2), \widetilde{\Phi}_\lambda(z_3), \widetilde{\Phi}_\lambda(z_4)), \chi(z_1, z_2, z_3, z_4)) \leq \mathrm{dist}_\Lambda(\lambda, \lambda_0).$$

Cela entraîne immédiatemment la quasiconformité de l'application $\widetilde{\Phi}_\lambda$, et termine du même coup la démonstration du théorème 4.3. ■

Le deuxième chapitre de [18] traite en détail des domaines qui admettent des métriques hyperboliques, ainsi que des propriétés de celles-ci. On peut aussi se référer à [32], où l'on discute de ce sujet dans le contexte des mouvements holomorphes.

Remarque 4.2. Par la suite, il sera fréquent d'utiliser le même symbole pour désigner un mouvement holomorphe et son prolongement à la fermeture.

4.4 Le théorème de Słodkowski

Le λ-lemme nous assure qu'un mouvement holomorphe $\Phi : \Lambda \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ peut toujours être prolongé en un mouvement holomorphe $\Phi : \Lambda \times \overline{E} \to \widehat{\mathbb{C}}$. On peut maintenant se demander s'il est possible de prolonger un mouvement holomorphe d'un ensemble E sur un sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$ contenant strictement $\overline{E}$. Si tel est le cas, quel est le plus grand sous-ensemble de $\widehat{\mathbb{C}}$ sur lequel le mouvement peut être prolongé ?

Définition 4.4. Un mouvement holomorphe $\Phi : \Lambda \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est dit *maximal* s'il ne peut être prolongé en un mouvement holomorphe $\Phi : \Lambda \times E' \to \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $E \subsetneq E'$.

Supposons que $E \subseteq E'$. D'après le λ-lemme, si $\Phi : \Lambda \times E' \to \widehat{\mathbb{C}}$ est un mouvement holomorphe maximal de l'ensemble E, alors $\overline{E} \subseteq E'$. Ainsi, un mouvement holomorphe maximal doit déplacer un ensemble fermé. Nous nous proposons ici de présenter un exemple de mouvement holomorphe maximal, pour lequel l'ensemble E est fini. Cependant, il nous faut d'abord obtenir un résultat concernant l'existence d'un point fixe pour certaines fonctions.

Théorème 4.4. *Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, une fonction holomorphe. Alors f possède au moins un point fixe.*

Preuve. Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sans point fixe. Puisque f évite les valeurs $0, 1$ et ∞, le

théorème de Picard nous assure que f ne peut avoir de singularité essentielle en $0, 1$ et ∞. La fonction f définit ainsi une application rationnelle

$$\begin{aligned} f : \widehat{\mathbb{C}} &\to \widehat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{p(z)}{q(z)}, \end{aligned}$$

où p et q sont des polynômes. Notons aussi qu'on ne peut pas avoir $f(z) \equiv \xi$ avec $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, car alors f serait constante et aurait un point fixe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Ainsi, au moins un des deux polynômes p et q est de degré supérieur ou égal à un. Cela entraîne la surjectivité de f. En effet, quel que soit $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, on peut toujours trouver $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ tel que $p(z) = wq(z)$. De plus, comme $f^{-1}(\{0, 1, \infty\}) \subset \{0, 1, \infty\}$, il suit que f induit une bijection de $\{0, 1, \infty\}$ sur lui-même. D'après le théorème de Brouwer, puisque f est une application continue de $\widehat{\mathbb{C}}$ vers $\widehat{\mathbb{C}}$, elle a nécessairement au moins un point fixe. Puisqu'on suppose que f n'a pas de point fixe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, celui-ci doit être dans l'ensemble $\{0, 1, \infty\}$, et, quitte à conjuguer f par une transformation de Möbius, on peut supposer que c'est ∞. Nous avons donc que $f^{-1}(\infty) = \infty$, ce qui veut dire que f est un polynôme. En effet, si le degré de q est supérieur à un, alors q a au moins une racine dans $\mathbb{C}$, disons ζ, ce qui a pour conséquence que $f(\zeta) = \infty$.

Soit d le degré du polynôme f. Comme f fixe ∞, nous avons que $f(\{0, 1\})=\{0,1\}$. Si $f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1}(1) = 1$, alors le polynôme f possède une unique racine de multiplicité d en 0, et donc $f(z) = cz^d$. De même, le polynôme $f(z) - 1$ possède une unique racine de multiplicité d en 1, ce qui entraîne que $f(z) = 1 + k(z - 1)^d$. Ces deux conditions seront vérifiées simulatanément seulement lorsque f se réduit à l'identité. Cela est impossible, car f ne doit pas avoir de point fixe dans $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Si $f^{-1}(0) = 1$ et $f^{-1}(1) = 0$, alors le polynôme f possède une unique racine de multiplicité d en 1, et donc $f(z) = c(z - 1)^d$. Par ailleurs, le polynôme $f(z) - 1$ possède une unique racine de multiplicité d en 0, ce qui a pour conséquence que $f(z) = 1 + kz^d$. Cette fois-ci, ces deux conditions seront satisfaites au même moment seulement si $f(z) = 1 - z$. Comme cette fonction admet $1/2$ comme point fixe, cela démontre qu'il est impossible d'avoir une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sans point fixe. ■

Exemple 4.1. Posons $\Lambda = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ et $E = \{0, 1, \infty, \lambda_0\}$, où $\lambda_0 \in \Lambda$. On définit un mouvement holomorphe $\Phi : \Lambda \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ de la façon suivante : D'abord Φ_λ fixe $0, 1$ et ∞ pour chaque valeur de $\lambda \in \Lambda$. Le mouvement qu'impose Φ à λ_0 est donné par $\Phi(\lambda, \lambda_0) = \lambda$. On vérifie facilement qu'il s'agit bien d'un mouvement holomorphe de E paramétrisé par Λ et λ_0. Supposons qu'il existe $\lambda_1 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ tel qu'on puisse prolonger Φ à $E \cup \{\lambda_1\}$. Par définition de Λ, il suit que $\lambda_1 \in \Lambda$ et $\lambda_1 \neq \lambda_0$. Si on peut prolonger Φ sur $E \cup \{\lambda_1\}$, alors la fonction $\Phi^{\lambda_1} : \Lambda \to \Lambda$ est holomorphe. D'après le théorème 4.4, elle possède un point fixe, disons ξ. Ainsi, $\Phi(\xi, \lambda_1) = \xi$. Finalement, par définition de Φ,

nous avons que $\Phi(\xi, \lambda_0) = \xi$. On en conclut donc que Φ_ξ n'est pas injective, puisqu'elle prend la même valeur en λ_0 et λ_1. Il est donc impossible de prolonger le mouvement holomorphe Φ à l'extérieur de E.

Comme nous l'avons mentionné au début de ce chapitre, la première définition du mouvement holomorphe imposait à Λ d'être le disque unité ouvert. Ainsi, on connaît certains résultats concernant le mouvement holomorphe qui ne sont pas nécessairement vrais lorsque Λ est un ouvert connexe quelconque. Le plus important d'entre eux est sans contredit le théorème de Slodkowski. Ce dernier est en quelque sorte l'aboutissement des travaux concernant le prolongement de mouvements holomorphes paramétrisés par l'ensemble $\mathbb{D}$. Voici un peu comment nous sommes arrivés à la démonstration de ce théorème.

Après la démonstration du λ-lemme, D. P. Sullivan et W. P. Thurston ont obtenu des résultats intéressants concernant le prolongement de mouvements holomorphes paramétrisés par le disque unité ouvert. Le théorème 4.5 est le principal résultat de leur article (voir [32]).

Théorème 4.5. *Il existe une constante universelle $a > 0$ tel que tout mouvement holomorphe Φ d'un ensemble $E \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ paramétrisé par $\mathbb{D}$ et 0 peut être étendu à un mouvement holomorphe*

$$\widetilde{\Phi} : \mathbb{D}(0, a) \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}.$$

Comme le mentionnent les auteurs, la stratégie à employer pour démontrer ce théorème est de diviser pour régner. On montre d'abord comment prolonger le mouvement dans le cas où E est connexe. Pour ce faire, on remarque en premier lieu que le λ-lemme nous permet de supposer que E est fermé. On montre ensuite que pour chaque p dans le complément de E, on peut trouver un voisinage de p et un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{D}$ où l'on peut prolonger le mouvement. Ce qui est important c'est qu'on peut choisir l'ouvert indépendamment de p. Par la suite, avec une partition de l'unité de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus E$, on est en mesure de construire le prolongement souhaité. Lorsqu'on perd la connexité de l'ensemble E, cela rend les choses beaucoup plus compliquées, mais avec certains résultats de géométrie hyperbolique et beaucoup de travail, il est possible de s'en sortir.

De plus, Sullivan et Thurston ont présenté dans cet article un autre résultat d'importance qui simplifie passablement le problème de prolonger un mouvement holomorphe à l'espace ambiant. L'énoncé de celui-ci est connu sous le nom de *l'axiome du choix holomorphe*.

Axiome du choix holomorphe : Si, pour tout ensemble fini $E_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}$ et pour tout $y \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus E_0$, tout mouvement holomorphe $\Phi : \mathbb{D} \times E_0 \to \widehat{\mathbb{C}}$ se prolonge en un mouvement holomorphe $\widetilde{\Phi} : \mathbb{D} \times E_0 \cup \{y\} \to \widehat{\mathbb{C}}$, alors n'importe quel mouvement holomorphe $\Psi : \mathbb{D} \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ se prolonge en un mouvement holomorphe $\widetilde{\Psi} : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$.

Si $\Phi : \mathbb{D} \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est un mouvement holomorphe et que E contient uniquement trois points, alors on peut trouver un mouvement holomorphe $\widetilde{\Phi} : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ qui prolonge Φ. En effet, on peut alors supposer Φ normalisé et poser $\widetilde{\Phi}(\lambda, z) = z$. Par ailleurs, un résultat démontré par C. J. Earle et I. Kra (voir [10]) permet de tirer les mêmes conclusions dans le cas où E possède quatre points au lieu de trois.

En prenant connaissance des résultats de l'article de Sullivan et Thurston, une question nous vient spontanément à l'esprit : Que peut bien valoir la constante universelle a ? Dans un article publié en 1986, L. Bers et H. L. Royden ont réussi à démontrer que $a \geq 1/3$. Voici l'énoncé du théorème principal de leur article (voir [5]). Celui-ci est aujourd'hui connu sous le nom du λ-lemme harmonique.

Théorème 4.6. *Soit $\Phi : \mathbb{D} \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ un mouvement holomorphe avec 0 comme point de base. Alors il existe un unique mouvement holomorphe $\widetilde{\Phi} : \mathbb{D}(0, 1/3) \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ qui prolonge Φ et pour lequel les coefficients de Beltrami de $\widetilde{\Phi}_\lambda(z)$ sont harmoniques sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{E}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$.*

L'énoncé de ce théorème demande des explications. D'abord il est clair que cela entraîne que la constante universelle dont parlent Sullivan et Thurston est supérieure à $1/3$. Cependant, ce qui est intéressant de constater, c'est que nous avons en quelque sorte l'unicité du prolongement si on impose une condition sur les coefficients de Beltrami. Un coefficient de Beltrami sur un domaine D est simplement un élément de la boule unité ouverte de $L_\infty(D)$. Au chapitre 3, nous avons vu que pour une transformation quasiconforme f, $|f_z| > |f_{\overline{z}}|$. Par conséquent, en posant

$$\mu_f = \frac{f_{\overline{z}}}{f_z}, \tag{4.1}$$

on définit un coefficient de Beltrami. Ce dernier s'appelle la dilatation complexe de f, et il est relié au quotient de dilatation de f par l'équation

$$D_f = \frac{1 + |\mu_f|}{1 - |\mu_f|}.$$

Le lien entre ces coefficients et les transformations quasi-conformes est encore plus fort ; il est possible de montrer que pour chaque coefficient de Beltrami μ défini sur un domaine D, il existe une transformation quasi-conforme f sur D, telle que

$$f_z = \mu f_{\overline{z}}. \tag{4.2}$$

Ce résultat, qui a de nombreuses conséquences, possède une longue histoire. En effet, le problème de trouver une fonction f résolvant l'équation 4.2 pour un μ donné remonte à Gauss. Ce dernier avait besoin de la résoudre pour obtenir certains résultats en géométrie différentielle. Cependant, la résolution complète de cette équation est assez récente.

Comme on le sait, d'après le théorème 4.6, il est légitime de parler du coefficient de Beltrami des Φ_λ, car d'après le λ-lemme, ces transformations sont quasi-conformes. Il y a donc une bijection entre les éléments de $L_\infty(D)$ et les transformations quasi-conformes sur D. Le fait qu'un coefficient de Beltrami soit harmonique ou non dépend de sa décomposition en termes de différentielles quadratiques. Une bonne explication de cette propriété nécessiterait l'ajout de nombreuses définitions, c'est pourquoi nous laissons le soin au lecteur de consulter [5] et [24] pour de plus amples détails.

En 1991, soit quelques années après la parution de l'article de Bers et Royden, Słodkowski démontra un théorème qui porte aujourd'hui son nom. Celui-ci a levé le voile sur la constante universelle concernant le prolongement d'un mouvement holomorphe paramétrisé par le disque unité. Il a en fait démontré que $a = 1$. Voici l'énoncé de ce théorème célèbre.

Théorème 4.7. *Soit $\Phi : \mathbb{D} \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$, un mouvement holomorphe. Alors on peut prolonger Φ en un mouvement holomorphe $\widetilde{\Phi} : \mathbb{D} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, la fonction $\widetilde{\Phi}_\lambda : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est K-quasi-conforme, où K satisfait l'inégalité*

$$K \leq \frac{1 + |\lambda|}{1 - |\lambda|}.$$

La propriété de quasiconformité des fonctions $\widetilde{\Phi}_\lambda$ avait déjà été obtenue par Bers et Royden. Elle permet entre autre de montrer que dans certaines situations, nous avons l'unicité du mouvement holomorphe (voir [5]). La preuve qu'a donnée Słodkowski du théorème 4.7 (voir [29]) fait appel à des idées classiques de la théorie des fonctions à plusieurs variables complexes. On fait entre autres intervenir la notion d'enveloppe polynomiale d'un ensemble. Pour obtenir son résultat, Słodkowski a essentiellement démontré l'axiome du choix holomorphe. Finalement, mentionnons qu'il était possible de simplifier quelque peu la preuve originale de Słodkowski. Cela fut réalisé par A. Douady dans [9] (voir aussi [3]). En évitant certains termes techniques de la preuve originale de Słodkowski, l'auteur ramène le problème à celui de la paramétrisation d'une famille de courbes dans le contexte des espaces de Sobolev. Dans chacune des preuves, l'existence du prolongement est obtenu par l'existence d'une solution au problème non-linéaire de Riemann-Hilbert. La preuve de ce résultat est due à A. I. Šnirel'man (voir [30]). Cependant, F. Forstnerič a démontré ce résultat de nouveau en 1988 avec une

approche où apparaissent les enveloppes polynomiales (voir [12]). C'est précisément une reformulation du résultat de Šnirel'man et Forstnerič qui permet de paramétriser correctement une famille de courbes par le disque unité.

CHAPITRE 5

Mouvement holomorphe et IFS

5.1 Compatibilité d'un mouvement holomorphe

Dans le chapitre 2 de ce mémoire, nous avons introduit la notion de famille holomorphe d'IFS (voir la définition 2.10). Supposons que $S_\Lambda = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ soit une telle famille, et soit $\lambda_0 \in \Lambda$. On propose ici d'étudier le comportement de l'ensemble limite et de l'attrateur de l'IFS S_{λ_0}, lorsque le paramètre λ_0 est modifié. Notre objectif sera de déterminer les situations où les ensembles $J(\lambda_0)$ et $A(\lambda_0)$ décrivent un mouvement holomorphe paramétrisé par Λ et λ_0. De plus, on exigera une condition supplémentaire de compatibilité entre le mouvement holomorphe et les éléments de S_Λ. Les résultats qu'on retrouve ici proviennent d'un article publié en 2005 par L. Baribeau et M. Roy (voir [4]).

Définition 5.1. Soit Φ, un mouvement holomorphe de l'ensemble E paramétrisé par Λ et λ_0, et soit $S_\Lambda = \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ une famille holomorphe d'IFS, où $S_\lambda = \{f_{i,\lambda}\}_{i\in I}$. On dira que Φ est un *mouvement holomorphe compatible* avec S_Λ, si pour tout $z \in E$, nous avons que

$$\Phi_\lambda\left(f_{i,\lambda_0}(z)\right) = f_{i,\lambda}\left(\Phi_\lambda(z)\right) \tag{5.1}$$

pour tout $i \in I$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$ lorsque $f_{i,\lambda_0}(z) \in E$.

Remarque 5.1.

– On exige que l'équation 5.1 soit vérifiée uniquement quand $f_{i,\lambda_0}(z) \in E$ lorsque $z \in E$. La raison pour laquelle on procède ainsi est fort simple ; la fonction Φ_λ est définie sur l'ensemble E, et pour s'assurer que la compatibilité soit bien définie, on ne doit pas tenir compte des $z \in E$ pour lesquels $f_{i,\lambda_0}(z) \notin E$.

– Si un mouvement holomorphe $\Phi : \Lambda \times E \to \widehat{\mathbb{C}}$ est compatible avec S_Λ, alors son prolongement $\widetilde{\Phi} : \Lambda \times \overline{E} \to \widehat{\mathbb{C}}$ le sera aussi. Cela découle immédiatement de la continuité d'un mouvement holomorphe.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, nous allons étudier le mouvement holomorphe de l'attracteur d'un IFS. Pour faire suite à la remarque précédente, mentionnons que si E est un ensemble auto-similaire, nous avons que pour tout $z \in E$, $f_{i,\lambda_0}(z) \in E$. Cela a pour conséquence de simplifier la définition de compatibilité d'un mouvement holomorphe défini sur de tels ensembles. En effet, cela revient à exiger que le diagramme à la figure 5.1 soit commutatif pour tout $i \in I$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{array}{ccc} E(\lambda_0) & \xrightarrow{f_{i,\lambda_0}} & E(\lambda_0) \\ {\scriptstyle \Phi_\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Phi_\lambda} \\ E(\lambda) & \xrightarrow{f_{i,\lambda}} & E(\lambda) \end{array}$$

FIG. 5.1 – Diagramme de compatibilité pour des ensembles auto-similaires

Exemple 5.1. Nous allons ici présenter un exemple qui sera utilisé tout au long de ce chapitre pour illustrer les différents scénarios possibles concernant l'existence d'un mouvement holomorphe compatible.

Choisissons deux nombres réels k et m vérifiant

$$0 < k \leq 1/2 \qquad \text{et} \qquad k \leq m \leq 1 - k,$$

et définissons les trois similarités suivantes :

$$f_{1,\lambda}(z) = kz, \qquad f_{2,\lambda}(z) = kz + m\lambda \qquad \text{et} \qquad f_{3,\lambda}(z) = (1-k)z + k.$$

En posant $\Lambda = \mathbb{H}$, où $\mathbb{H}$ est le demi-plan supérieur, et $S_\lambda = \{f_{1,\lambda}, f_{2,\lambda}, f_{3,\lambda}\}$, on montre facilement que S_Λ est une famille holomorphe d'IFS.

Montrons que $\Phi(\lambda, z) := \Re(z) + \lambda\Im(z)$ avec $\lambda_0 = i$ comme point de base est un mouvement holomorphe du plan complexe qui respecte la dynamique[1] de S_Λ.

[1]Dire qu'un mouvement holomorphe respecte la dynamique d'une famille holomorphe d'IFS est équivalent à affirmer que le mouvement holomorphe considéré est compatible avec cette famille.

Montrons en premier lieu que la fonction $\Phi_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est injective pour toute valeur de λ dans $\mathbb{H}$. Soient $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. On doit montrer que $\Phi_\lambda(z_0) = \Phi_\lambda(z_1)$ implique que $z_0 = z_1$. On pose $\lambda = u + iv$. Le fait que $\Phi_\lambda(z_0) = \Phi_\lambda(z_1)$ entraîne que

$$\Re(z_0 - z_1) + u\Im(z_0 - z_1) + iv\Im(z_0 - z_1) = 0. \tag{5.2}$$

On doit maintenant vérifier que l'équation 5.2 implique que $z_0 = z_1$. Puisque $\lambda \in \mathbb{H}$, nous avons que $v \neq 0$. Ainsi, on doit avoir que $\Im(z_0 - z_1) = 0$, d'où $z_0 - z_1 \in \mathbb{R}$. L'équation 5.2 devient donc

$$\Re(z_0 - z_1) = 0.$$

Comme $z_0 - z_1 \in \mathbb{R}$, cela entraîne immédiatement que $z_0 = z_1$, et donc Φ_λ est injective quelle que soit la valeur de $\lambda \in \mathbb{H}$.
En choisissant $\lambda_0 = i$, nous avons que $\Phi_{\lambda_0}(z) = \Re(z) + i\Im(z) = z$. La deuxième condition pour que Φ soit un mouvement holomorphe est donc vérifiée. Finalement, on constate que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda \mapsto \Re(z_0) + \lambda\Im(z_0)$ est holomorphe. Cela nous permet d'affirmer que Φ vérifie les trois conditions pour être un mouvement holomorphe du plan complexe. De plus, dans le cas présent, S_Λ est une famille finie d'IFS. Ainsi, $A(\lambda_0) = J(\lambda_0)$. Par ailleurs, comme $A(\lambda_0)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, la restriction de Φ à $A(\lambda_0)$ constitue un mouvement holomorphe de l'attracteur (et du même coup de l'ensemble limite) de S_{λ_0}.

Il nous faut maintenant vérifier la compatibilité de ce mouvement avec la famille S_Λ. Tout d'abord, nous avons que

$$\Phi_\lambda(f_{1,i}(z)) = \Re(kz) + \lambda\Im(kz) = k\Phi_\lambda(z) = f_{1,\lambda}(\Phi_\lambda(z)).$$

De même,

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(f_{2,i}(z)) = \Re(kz + mi) + \lambda\Im(kz + mi) &= k(\Re(z) + \lambda\Im(z)) + m(\Re(i) + \lambda\Im(i)) \\ &= k\Phi_\lambda(z) + m\lambda = f_{2,\lambda}(\Phi_\lambda(z)). \end{aligned}$$

Finalement, on trouve que

$$\Phi_\lambda(f_{3,i}(z)) = \Re((1-k)z + k) + \lambda\Im((1-k)z + k) = (1-k)\Phi_\lambda(z) + k = f_{3,\lambda}(\Phi_\lambda(z)).$$

Il en découle donc que Φ est un mouvement holomorphe compatible avec la famille holomorphe d'IFS S_Λ.

Nous venons de voir un exemple de famille holomorphe d'IFS dont l'ensemble limite et l'attracteur décrivent un mouvement holomorphe compatible. Cependant, il n'est pas toujours possible de construire un tel mouvement. En effet, au lieu de choisir $\Lambda = \mathbb{H}$ pour

définir notre famille d'IFS, choissisons plutôt $\Lambda = \mathbb{D}(\lambda_0, r)$, le disque ouvert de rayon r centré en λ_0. Nous allons montrer qu'il est impossible de contruire un mouvement holomorphe dans un voisinage de λ_0, si on choisit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que $f_{1,\lambda}$ et $f_{3,\lambda}$ sont en fait indépendantes de λ. Aussi, comme $f_{1,\lambda}([0,1]) \cup f_{3,\lambda}([0,1]) = [0,1]$, il suit que $[0,1]$ est l'attracteur de la sous-famille de S_λ formée uniquement de $f_{1,\lambda}$ et $f_{3,\lambda}$. Ainsi, quel que soit λ, nous avons que $[0,1] \subset A(\lambda)$.

En premier lieu, fixons $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ et supposons qu'il existe un disque ouvert $\mathbb{D}(\lambda_0, r)$ et une fonction Φ tels que $\Phi : \mathbb{D}(\lambda_0, r) \times A(\lambda_0) \to \widehat{\mathbb{C}}$ soit un mouvement holomorphe compatible avec S_Λ, où $\Lambda = \mathbb{D}(\lambda_0, r)$. Choisissons $\lambda \in \mathbb{D}(\lambda_0, r) \setminus \mathbb{R}$. D'après le théorème 4.3, $\Phi_\lambda : A(\lambda_0) \to A(\lambda)$ est un homéomorphisme. De plus, comme $[0,1] \subset A(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il suit que $\Phi_\lambda^{-1}([0,1]) \subset A(\lambda_0)$. Puisque $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, nous avons que $A(\lambda_0) \subset \mathbb{R}$, et donc $\Phi_\lambda^{-1}([0,1])$ est un intervalle de la forme $[a,b]$. En effet, cela découle du fait que les homéomorphismes préservent la compacité et la connexité. Comme la fonction $\Phi_\lambda^{-1}|_{[0,1]} : [0,1] \to [a,b]$ est un homéomorphisme, il s'agit d'une fonction monotone. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'elle est monotone croissante. Nous pouvons donc écrire que $a = \Phi_\lambda^{-1}(0)$ et $b = \Phi_\lambda^{-1}(1)$. De même, nous avons que

$$\Phi_\lambda^{-1}\left(A(\lambda) \setminus [0,1]\right) = A(\lambda_0) \setminus [a,b].$$

Comme $k \in (0,1)$, il suit que $\Phi_\lambda^{-1}(k) \in (a,b)$. D'autre part, le fait que 1 est le point fixe de $f_{3,\lambda}$ entraîne que $\pi_\lambda(3^\infty) = 1$. De plus, puisque $m\lambda/(1-k)$ est le point fixe de $f_{2,\lambda}$, nous avons que $\pi_\lambda(2^\infty) = m\lambda/(1-k)$. Cela nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} k &= f_{1,\lambda}(1) = f_{1,\lambda}\left(\pi_\lambda(3^\infty)\right) = \pi_\lambda(13^\infty) \\ &= \pi_\lambda\left(\lim_{n\to\infty} 13^n 2^\infty\right) = \lim_{n\to\infty} \pi_\lambda(13^n 2^\infty) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_{13^n}\left(\pi_\lambda(2^\infty)\right) = \lim_{n\to\infty} f_{13^n}\left(m\lambda/(1-k)\right). \end{aligned}$$

En remarquant que $f_{13^n}\left(m\lambda/(1-k)\right) \notin \mathbb{R}$ si $\lambda \notin \mathbb{R}$, on trouve que

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda^{-1}(k) &= \Phi_\lambda^{-1}\left(\lim_{n\to\infty} f_{13^n}\left(m\lambda/(1-k)\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \Phi_\lambda^{-1}\left(f_{13^n}\left(m\lambda/(1-k)\right)\right) \\ &\in \overline{\Phi_\lambda^{-1}\left(A(\lambda) \setminus [0,1]\right)} = \overline{A(\lambda_0) \setminus [a,b]} = A(\lambda_0) \setminus (a,b). \end{aligned}$$

Or, cela est une contradiction, puisqu'on a vu précédemment que $\Phi_\lambda^{-1}(k) \in (a,b)$. Il n'existe donc pas de mouvement holomorphe de $A(\lambda_0)$ si on choisit $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

5.2 Mouvement holomorphe et condition COSC

Nous allons établir dans cette section deux résultats concernant l'existence d'un mouvement holomorphe de l'attracteur d'un IFS lorsque la condition COSC est vérifiée.

Voyons d'abord un lemme qui nous sera utile pour démontrer ces résultats.

Lemme 5.1. *Soit $S_\lambda = \{f_{i,\lambda} : i \in I\}$, un IFS d'alphabet I satisfaisant la condition COSC. Alors*

$$f_{i,\lambda}\left(A(\lambda)\right) \cap f_{j,\lambda}\left(A(\lambda)\right) = \emptyset$$

pour tout $i, j \in I, i \neq j$.

Preuve. Tout d'abord, puisque la condition COSC est vérifiée pour S_λ, il existe un ouvert non-vide $U(\lambda)$, tel que

1. $f_{i,\lambda}(U(\lambda)) \subset U(\lambda)$ pour tout $i \in I$;
2. $f_{i,\lambda}(\overline{U(\lambda)}) \cap f_{j,\lambda}(\overline{U(\lambda)}) = \emptyset$ pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$.

Soit $K(\lambda) \in \kappa(U(\lambda))$. Par définition de $A(\lambda)$, nous avons que

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \lim_{m\to\infty} F^m(K(\lambda)) \\ &= \lim_{m\to\infty} \overline{\cup_{\omega\in I^m} f_\omega(K(\lambda))} \\ &\subset \lim_{m\to\infty} \overline{\cup_{\omega\in I^m} U(\lambda)} \\ &= \overline{U(\lambda)}. \end{aligned}$$

Ainsi, $A(\lambda) \subset \overline{U(\lambda)}$. Comme $f_{i,\lambda}(\overline{U(\lambda)}) \cap f_{j,\lambda}(\overline{U(\lambda)}) = \emptyset$ lorsque $i \neq j$, il suit que $f_{i,\lambda}\left(A(\lambda)\right) \cap f_{j,\lambda}\left(A(\lambda)\right) = \emptyset$ si $i \neq j$. ■

Théorème 5.1. *Soit S_Λ une famille holomorphe d'IFS satisfaisant la condition COSC et soit $\lambda_0 \in \Lambda$. Alors l'ensemble limite $J(\lambda_0)$ et l'attracteur $A(\lambda_0)$ décrivent un mouvement holomorphe compatible avec S_Λ.*

Preuve. Nous allons montrer que la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \Lambda \times J(\lambda_0) &\to J(\lambda) \\ (\lambda, \pi_{\lambda_0}(\omega)) &\mapsto \pi_\lambda(\omega) \end{aligned}$$

est en fait un mouvement holomorphe de l'ensemble limite de S_{λ_0} compatible avec S_Λ.

Soient $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ et $\omega' = \omega'_1\omega'_2\omega'_3\ldots$, deux éléments distincts de I^∞. Il existe donc un plus petit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_{n_0} \neq \omega'_{n_0}$. Par définition de la fonction de codage, nous avons que

$$\pi_\lambda(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n,\lambda}(z_0) \qquad \text{et} \qquad \pi_\lambda(\omega') = \lim_{n\to\infty} f_{\omega'|_n,\lambda}(z_0),$$

où $z_0 \in \mathbb{C}$. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la valeur de $\pi_\lambda(\omega)$ est indépendante du choix de z_0. Ainsi, en choisissant $z_0 \in U(\lambda)$, on a que

$$\begin{aligned} f_{\omega|_n,\lambda}(z_0) &= f_{\omega_1,\lambda} f_{\omega_2,\lambda} \dots f_{\omega_{n_0},\lambda} f_{\omega_{n_0+1},\lambda} \dots f_{\omega_n,\lambda}(z_0) \in f_{\omega_1,\lambda} f_{\omega_2,\lambda} \dots f_{\omega_{n_0},\lambda}(\overline{U(\lambda)}) \ , \\ f_{\omega|'_n,\lambda}(z_0) &= f_{\omega'_1,\lambda} f_{\omega'_2,\lambda} \dots f_{\omega'_{n_0},\lambda} f_{\omega'_{n_0+1},\lambda} \dots f_{\omega'_n,\lambda}(z_0) \in f_{\omega'_1,\lambda} f_{\omega'_2,\lambda} \dots f_{\omega'_{n_0},\lambda}(\overline{U(\lambda)}) \ . \end{aligned}$$

Puisque $\omega_{n_0} \neq \omega'_{n_0}$, les ensembles $f_{\omega_1,\lambda} f_{\omega_2,\lambda} \dots f_{\omega_{n_0},\lambda}(\overline{U(\lambda)})$ et $f_{\omega'_1,\lambda} f_{\omega'_2,\lambda} \dots f_{\omega'_{n_0},\lambda}(\overline{U(\lambda)})$ sont des ensembles fermés disjoints. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n}(z_0) \neq \lim_{n\to\infty} f_{\omega'|_n}(z_0)$, d'où l'injectivité de π_λ.

Il nous faut maintenant montrer que la fonction $\lambda \mapsto \pi_\lambda(\omega)$ est holomorphe pour tout $\omega \in I^\infty$. Choisissons $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit $\mathcal{F}_\omega := \{\lambda \mapsto f_{\omega|_n,\lambda}(z_0) : n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, la fonction $\lambda \mapsto f_{\omega|_n,\lambda}(z_0)$ est holomorphe pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, d'après la définition 2.3, ces fonctions sont uniformément bornées. Selon le théorème de Montel, $\mathcal{F}_\omega$ est une famille normale. De plus, puisque $\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n,\lambda}(z_0)$ existe, la convergence est uniforme sur tous les sous-ensembles compacts de Λ. Par conséquent, $\lambda \mapsto \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n,\lambda}(z_0)$ est holomorphe quel que soit $\omega \in I^\infty$.

Pour montrer que ce mouvement est compatible avec S_Λ, il suffit d'observer que

$$\Phi_\lambda(f_{i,\lambda_0}(\pi_{\lambda_0}(\omega))) = \Phi_\lambda(\pi_{\lambda_0}(i\omega)) = \pi_\lambda(i\omega) = f_{i,\lambda}(\pi_\lambda(\omega)) = f_{i,\lambda}(\Phi_\lambda(\pi_{\lambda_0}(\omega))).$$

Ainsi, Φ constitue un mouvement holomorphe de $J(\lambda_0)$ compatible avec S_Λ. D'après le théorème 4.3, on peut prolonger Φ sur $\Lambda \times \overline{J(\lambda_0)}$, de telle sorte que ce prolongement est un mouvement holomorphe de $A(\lambda_0)$ compatible avec S_Λ. ■

Corollaire 5.1. *Soit S_Λ une famille holomorphe finie d'IFS, et soit $\lambda_0 \in \Lambda$. Supposons que S_{λ_0} satisfait la condition COSC. Alors il existe un voisinage Λ_0 de λ_0 tel que $J(\lambda_0)$, qui coïncide avec $A(\lambda_0)$, décrit un mouvement holomorphe compatible avec S_{Λ_0}.*

Preuve. Tout d'abord, puisque $|I| < \infty$, S_{λ_0} satisfait la condition COSC si et seulement si

$$f_{i,\lambda_0}(A(\lambda_0)) \cap f_{j,\lambda_0}(A(\lambda_0)) = \emptyset$$

pour tout $i, j \in I, i \neq j$. En effet, le lemme 5.1 montre que si la condition COSC est satisfaite, alors $f_{i,\lambda_0}(A(\lambda_0)) \cap f_{j,\lambda_0}(A(\lambda_0)) = \emptyset$ pour tout $i, j \in I, i \neq j$. Pour montrer la réciproque, posons

$$\epsilon := \frac{1}{3} \min \operatorname{dist}\left(f_{i,\lambda_0}(A(\lambda_0)), f_{j,\lambda_0}(A(\lambda_0))\right),$$

où le minimum est pris sur tous les $i, j \in I$, $i \neq j$. Puisque les f_{i,λ_0} sont des contractions, cela entraîne que $A_\epsilon(\lambda_0) := \{z \in \mathbb{C} : d(z, A(\lambda_0)) < \epsilon\}$ est un ouvert qui réalise la condition COSC pour S_{λ_0}.

En second lieu, comme $|I| < \infty$, le fait que $f_{i,\lambda_0}(A(\lambda_0)) \cap f_{j,\lambda_0}(A(\lambda_0)) = \emptyset$ si $i \neq j$ nous assure de l'existence d'un $\delta > 0$ vérifiant

$$\overline{B}(f_{i,\lambda_0}(A(\lambda_0)), \delta) \cap \overline{B}(f_{j,\lambda_0}(A(\lambda_0)), \delta) = \emptyset \tag{5.3}$$

pour tout $i, j \in I$, $i \neq j$. Considérons maintenant U_0, un voisinage de λ_0 tel que

$$\sup_{z \in A(\lambda_0)} |f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda_0}(z)| < (1 - C(\lambda_0))\delta \tag{5.4}$$

pour tout $i \in I$ et tout $\lambda \in U_0$. Montrons que $f_{i,\lambda}(B(A(\lambda_0), \delta)) \subset B(A(\lambda_0), \delta)$ si $\lambda \in U_0$. Soit $z \in B(A(\lambda_0), \delta)$. Alors il existe $z' \in A(\lambda_0)$ tel que $|z - z'| < \delta$. Pour chaque $\lambda \in U_0$, on doit montrer que $f_{i,\lambda}(z) \in B(A(\lambda_0), \delta)$, ce qui sera fait si on parvient à montrer que $|f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda_0}(z')| < \delta$ pour tout $\lambda \in U_0$. Soit $\lambda \in U_0$. En vertu de 5.4 et de l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$\begin{aligned} |f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda_0}(z')| &\leq |f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda}(z')| + |f_{i,\lambda}(z') - f_{i,\lambda_0}(z')| \\ &< c_i(\lambda)|z - z'| + (1 - C(\lambda_0))\delta \\ &\leq C(\lambda_0)|z - z'| + (1 - C(\lambda_0))\delta \\ &< C(\lambda_0)\delta + (1 - C(\lambda_0))\delta \\ &= \delta. \end{aligned}$$

On doit maintenant trouver un voisinage V_0 de λ_0, tel que pour tout $\lambda \in V_0$,

$$f_{i,\lambda}\left(\overline{B}(A(\lambda_0), \delta)\right) \cap f_{j,\lambda}\left(\overline{B}(A(\lambda_0), \delta)\right) = \emptyset \tag{5.5}$$

pour tout $i, j \in I, i \neq j$. Posons

$$\epsilon := \frac{1}{5} \min \operatorname{dist}\left(f_{i,\lambda_0}\left(\overline{B}\left(A(\lambda_0), \delta\right)\right), f_{j,\lambda_0}\left(\overline{B}\left(A(\lambda_0), \delta\right)\right)\right),$$

où le minimum est pris sur tous les $i, j \in I, i \neq j$. Puisque $\overline{B}\left(A(\lambda_0), \delta\right)$ est un ensemble compact, il est possible de trouver un ensemble fini $E_\epsilon = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, tel que pour chaque $z \in \overline{B}\left(A(\lambda_0), \delta\right)$, il existe $z_k \in E_\epsilon$ vérifiant $|z - z_k| < \epsilon$.

Soit $z_k \in E_\epsilon$ et soit $i \in I$. On définit un voisinage de λ_0 de la façon suivante :

$$V_{i,k} := \{\lambda \in \Lambda : |f_{i,\lambda}(z_k) - f_{i,\lambda_0}(z_k)| < \epsilon\}.$$

Puisque $|E_\epsilon| < \infty$ et que $|I| < \infty$, l'ouvert

$$V_0 := \bigcap_{\substack{i \in I \\ k \leq |E_\epsilon|}} V_{i,k}$$

constitue aussi un voisinage de λ_0. Pour toute valeur de $\lambda \in V_0$, l'équation 5.5 est vérifiée. En effet, quel que soit $z \in \overline{B}\,(A(\lambda_0), \delta)$, on peut toujours trouver un $z_k \in E_\epsilon$ qui vérifie $|z - z_k| < \epsilon$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} |f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda_0}(z_k)| &\leq |f_{i,\lambda}(z) - f_{i,\lambda}(z_k)| + |f_{i,\lambda}(z_k) - f_{i,\lambda_0}(z_k)| \\ &< |z - z_k| + \epsilon \\ &< 2\epsilon. \end{aligned}$$

Comme ces estimés sont indépendants du choix de i, il suit que

$$\operatorname{dist}\left(f_{i,\lambda}\left(\overline{B}(A(\lambda_0), \delta)\right), f_{j,\lambda}\left(\overline{B}(A(\lambda_0), \delta)\right)\right) > \epsilon.$$

Cela démontre ainsi que l'équation 5.5 est satisfaite.

En posant $\Lambda_0 = U_0 \cap V_0$, on s'assure que pour tout $\lambda \in \Lambda_0$, l'ouvert $B(A(\lambda_0), \delta)$ réalise la condition COSC pour l'IFS S_λ. Le théorème 5.1 nous permet alors de conclure de l'existence d'un mouvement holomorphe compatible avec la famille d'IFS S_{Λ_0}. ■

Comme on peut le voir, le corollaire 5.1 s'applique seulement dans une situation où la famille d'IFS est finie. Il y a une raison pour cela ; dans le cas où $|I| = \infty$, la condition COSC n'est pas toujours préservée, même pour une petite variation de λ. Voici un exemple qui illustre ce phénomène.

Exemple 5.2. On définit $S_\lambda = \{f_{n,\lambda} : n \in \mathbb{N}\}$, où

$$f_{n,\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{2n(n+1)}z + \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{2n(n+1)}z + \frac{\lambda}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En posant $\Lambda = \mathbb{C}$, cela fait de S_Λ une famille holomorphe d'IFS. D'autre part, si on fixe $\lambda_0 = 1$, on vérifie que $U = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \Re(z) < 1 \text{ et } -1 < \Im(z) < 1\}$ est un ouvert réalisant la condition COSC pour S_{λ_0} (voir la figure 5.2). Cependant, nous allons voir qu'il n'existe pas de voisinage Λ_0 de λ_0 pour lequel la condition COSC est satisfaite pour chaque S_λ avec $\lambda \in \Lambda_0$. Pour ce faire, nous allons construire une suite (λ_n) qui tend vers 1 et pour laquelle on peut trouver une sous-suite (λ_{n_k}) telle que $S_{\lambda_{n_k}}$ ne satisfait jamais la condition COSC.

Définissons d'abord la suite (λ_n) en posant

$$\lambda_n = \frac{n+1}{n+2}.$$

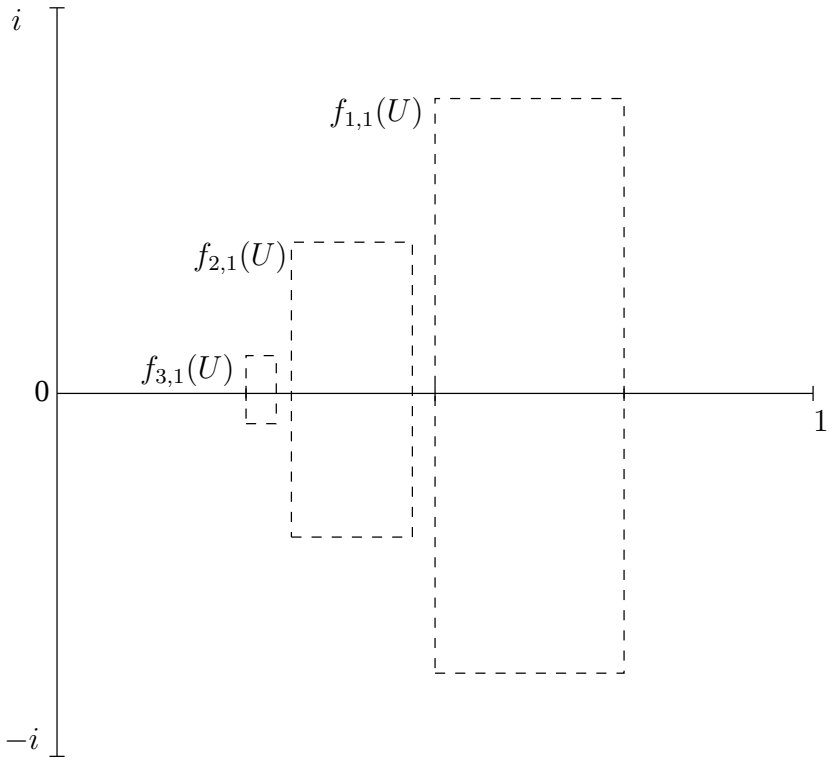


FIG. 5.2 – Trois images de l'ouvert U réalisant la condition COSC

Si n est impair, on constate que

$$f_{n,\lambda_n}(0) = \frac{\lambda_n}{n+1} = \frac{1}{n+2}.$$

Si n est impair, $n+1$ sera pair, et par conséquent,

$$f_{n+1,\lambda_n}(0) = \frac{1}{n+2}.$$

D'autre part, nous avons que $0 \in A(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En effet, en posant $\omega = 222\ldots$, on constate que $\pi_\lambda(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n,\lambda}(1) = 0$. En particulier, 0 appartient à $A(\lambda_n)$ pour chaque n impair. Puisque nous avons que $f_{n+1,\lambda_n}(0) = f_{n,\lambda_n}(0)$ lorsque n est impair, cela entraîne que

$$f_{n,\lambda_n}(A(\lambda_n)) \cap f_{n+1,\lambda_n}(A(\lambda_n)) \neq \emptyset$$

si n est impair. Or, d'après le lemme 5.1, si S_{λ_n} satisfait la condition COSC, on doit nécessairement avoir que

$$f_{i,\lambda_n}(A(\lambda_n)) \cap f_{j,\lambda_n}(A(\lambda_n)) = \emptyset$$

pour tout $i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$. Ainsi, la condition COSC ne peut être vérifiée pour aucun λ_n avec n impair. Cela illustre donc bien la sensibilité de la condition COSC.

5.3 Mouvement holomorphe et condition OSC

Dans cette section, nous allons considérer une situation plus générale que dans la précédente. En effet, on s'intéressera ici aux IFS qui vérifient la condition OSC. Rappelons que si un IFS satisfait la condition COSC, il en sera de même pour la condition OSC. Présentons d'abord deux définitions qui seront utiles dans le présent chapitre.

Définition 5.2. Soit S_λ un IFS d'alphabet I. *L'ensemble des points périodiques* de S_λ, noté $\mathrm{Per}(\lambda)$, est défini par

$$\mathrm{Per}(\lambda) = \{z \in \mathbb{C} : \exists\ \omega \in I^* \text{ tel que } f_{\omega,\lambda}(z) = z\}.$$

Définition 5.3. Soit I un alphabet et $s = s_1 s_2 \ldots s_{|s|}, t = t_1 t_2 \ldots t_{|t|}$ avec $|s| \geq |t|$, deux éléments de I^*. On dira que s et t sont *comparables*, si $s_i = t_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, |t|\}$.

Lorsque deux mots ne sont pas comparables, on dira simplement qu'ils sont *incomparables*. Comme le traduit la définition 5.3, deux mots sont comparables si l'un des mots constitue le début de l'autre mot.

Théorème 5.2. *Soit S_Λ une famille holomorphe d'IFS d'alphabet I paramétrisée par Λ et λ_0, et qui satisfait les hypothèses suivantes :*

1. *S_λ est formé de contractions injectives pour tout $\lambda \in \Lambda$;*
2. *Les fonctions $\{(\lambda, z) \mapsto f_{i,\lambda}(z)\}_{i\in I}$ sont holomorphes en deux variables ;*
3. *Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe un ouvert $U(\lambda)$ réalisant la condition OSC pour S_λ ;*
4. *Il existe une fonction holomorphe $g : \Lambda \to \mathbb{C}$ telle que $g(\lambda) \in U(\lambda) \setminus Per(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

Alors $J(\lambda_0)$ et $A(\lambda_0)$ décrivent un mouvement holomorphe compatible avec S_Λ.

Preuve. Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ on définit l'ensemble

$$E(\lambda) := \{f_{\omega,\lambda}(g(\lambda)) : \omega \in I^*\}.$$

Définissons aussi la fonction

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \Lambda \times E(\lambda_0) & \to & \mathbb{C} \\ \big(\lambda, f_{\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0))\big) & \mapsto & f_{\omega,\lambda}(g(\lambda)). \end{array}$$

Nous allons montrer que Φ est un mouvement holomorphe de l'ensemble $E(\lambda_0)$. Montrons en premier lieu que Φ est bien défini. On doit vérifier que $f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) = f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0))$ si et seulement si $s = t$. Remarquons d'abord que $f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) = f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0))$ si $s = t$. Montrons maintenant que si $s \neq t$, alors $f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \neq f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0))$.

1^{er} cas : s et t sont incomparables.
Supposons que $s = s_1 s_2 \dots s_{|s|}$ et que $t = t_1 t_2 \dots t_{|t|}$. Comme s et t sont incomparables, il existe un plus petit n tel que $s_n \neq t_n$. Puisque $U(\lambda_0)$ réalise la condition OSC pour S_{λ_0}, il suit que $f_{i,\lambda_0}(U(\lambda_0)) \subset U(\lambda_0)\ \forall\ i \in I$. Ainsi, comme $g(\lambda_0) \in U(\lambda_0)$ par hypothèse, nous avons que

$$f_{s_n s_{n+1}\dots s_{|s|},\lambda_0}(g(\lambda_0)) \in U(\lambda_0) \qquad \text{et} \qquad f_{t_n t_{n+1}\dots t_{|t|},\lambda_0}(g(\lambda_0)) \in U(\lambda_0).$$

Comme l'ouvert $U(\lambda_0)$ réalise la condition OSC pour S_{λ_0}, cela entraîne aussi que $f_{i,\lambda_0}(U(\lambda_0)) \cap f_{j,\lambda_0}(U(\lambda_0)) = \emptyset$ pour tout $i, j \in I, i \neq j$. Ainsi, comme $s_n \neq t_n$, cela implique que $f_{s_n s_{n+1}\dots s_{|s|},\lambda_0}(g(\lambda_0)) \neq f_{t_n t_{n+1}\dots t_{|t|},\lambda_0}(g(\lambda_0))$. Finalement, puisque la fonction $f_{s|_{n-1},\lambda_0} = f_{t|_{n-1},\lambda_0}$ est injective, on conclut que $f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \neq f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0))$.

2^e cas : s et t sont comparables.
Sans perte de généralité, supposons que c'est t qui est le début du mot s. Ainsi, il existe $s' \in I^* \setminus \{\emptyset\}$ tel que $s = ts'$. Par hypothèse, $g(\lambda_0) \notin \mathrm{Per}(\lambda_0)$. Nous avons donc que $f_{s',\lambda_0}(g(\lambda_0)) \neq g(\lambda_0)$. L'injectivité de f_{t,λ_0} entraîne finalement que

$$f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) = f_{ts',\lambda_0}(g(\lambda_0)) = f_{t,\lambda_0}(f_{s',\lambda_0}(g(\lambda_0))) \neq f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0)).$$

Nous venons de montrer que $f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) = f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \iff s = t$. Cependant, le choix de $\lambda_0 \in \Lambda$ n'a aucune importance dans la preuve. Pour cette raison, quel que soit $\lambda \in \Lambda$ nous avons que $f_{s,\lambda}(g(\lambda)) = f_{t,\lambda}(g(\lambda)) \iff s = t$. Cette remarque nous permet de montrer l'injectivité des fonctions $\Phi_\lambda : E(\lambda_0) \to \mathbb{C}$. En effet, Φ_λ sera injective si et seulement si $f_{s,\lambda}(g(\lambda)) \neq f_{t,\lambda}(g(\lambda))$ lorsque $f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \neq f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0))$. Or, nous avons que

$$f_{s,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \neq f_{t,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \iff s \neq t \iff f_{s,\lambda}(g(\lambda)) \neq f_{t,\lambda}(g(\lambda)).$$

Cela démontre l'injectivité de Φ_λ.

D'autre part, le fait que la fonction $g : \Lambda \to \mathbb{C}$ soit holomorphe par hypothèse et le fait que les contractions $f_{i,\lambda}(z)$ soient holomorphes en z, entraînent que la fonction $\lambda \mapsto \Phi_\lambda(f_{\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0)))$ est holomorphe sur Λ pour tout $\omega \in I^*$. Finalement, on observe que $\Phi_{\lambda_0} = \mathrm{id}$.

D'après le théorème 4.3, on peut prolonger le mouvement holomorphe Φ à $\overline{E(\lambda_0)}$. Montrons maintenant que $A(\lambda_0) \subseteq \overline{E(\lambda_0)}$. En effet, soit $z = f_{\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \in E(\lambda_0)$. Nous avons que $f_{i,\lambda_0}(z) = f_{i,\lambda_0}(f_{\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0))) = f_{i\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0)) \in E(\lambda_0)\ \forall\ i \in I$. Par conséquent,

$$\cup_{i\in I} f_{i,\lambda_0}(E(\lambda_0)) \subseteq E(\lambda_0),$$

et donc

$$F_{\lambda_0}(\overline{E(\lambda_0)}) = \overline{\cup_{i\in I} f_i(\overline{E(\lambda_0)})} \subseteq \overline{E(\lambda_0)}.$$

Par définition de l'attracteur, cela entraîne que $A(\lambda_0) \subseteq \overline{E(\lambda_0)}$. Montrons maintenant que Φ est un mouvement compatible avec S_Λ. Soit $\lambda \in \Lambda$. Pour tout $i \in I$ et pour tout $\omega \in I^*$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda\Big(f_{i,\lambda_0}\big(f_{\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0))\big)\Big) &= \Phi_\lambda\big(f_{i\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0))\big) \\
&= f_{i\omega,\lambda}(g(\lambda)) \\
&= f_{i,\lambda}\big(f_{\omega,\lambda}(g(\lambda))\big) \\
&= f_{i,\lambda}\Big(\Phi_\lambda\big(f_{\omega,\lambda_0}(g(\lambda_0))\big)\Big),
\end{aligned}$$

et donc le mouvement est compatible avec S_λ sur $E(\lambda_0)$. Comme nous l'avons mentionné à la remarque 5.1, le prolongé de Φ demeure compatible avec S_λ sur $\overline{E(\lambda_0)}$.

Vérifions maintenant que Φ est un mouvement holomorphe de $A(\lambda_0)$. Il nous reste à montrer que $\Phi_\lambda(A(\lambda_0)) = A(\lambda)$. Soit $\omega \in I^\infty$. On observe que

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(\pi_{\lambda_0}(\omega)) &= \Phi_\lambda\Big(\lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n,\lambda_0}(g(\lambda_0))\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_\lambda\big(f_{\omega|_n,\lambda_0}(g(\lambda_0))\big) \\
&= \lim_{n\to\infty} f_{\omega|_n,\lambda}(g(\lambda)) \\
&= \pi_\lambda(\omega).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi_\lambda(J(\lambda_0)) = J(\lambda)$, et par conséquent, $\Phi_\lambda(A(\lambda_0)) = A(\lambda)$. Cela termine la démonstration du théorème 5.2. ■

Corollaire 5.2. *Soit S_Λ une famille holomorphe d'IFS d'alphabet I paramétrisée par Λ et λ_0, et qui satisfait les hypothèses suivantes :*

1. *S_λ est formé de contractions injectives pour tout $\lambda \in \Lambda$;*
2. *Les fonctions $\{(\lambda, z) \mapsto f_{i,\lambda}(z)\}_{i\in I}$ sont holomorphes en deux variables ;*
3. *Pour chaque $\lambda \in \Lambda$, il existe un ouvert $U(\lambda)$ réalisant la condition OSC pour S_λ ;*
4. *Il existe une fonction holomorphe $g : \Lambda \to \mathbb{C}$ telle que $g(\lambda_0) \in U(\lambda_0) \setminus A(\lambda_0)$, et $g(\lambda) \in U(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

Alors il existe un voisinage Λ_0 de λ_0 tel que $J(\lambda_0)$ et $A(\lambda_0)$ décrivent un mouvement holomorphe compatible avec S_{Λ_0}.

Preuve. Puisque $g(\lambda_0) \notin A(\lambda_0)$, on peut trouver un voisinage Λ_0 de λ_0 tel que pour tout $\lambda \in \Lambda_0$, $g(\lambda) \notin A(\lambda)$. En effet, cela découle de la continuité de g et de l'application $\lambda \mapsto A(\lambda)$. Montrons maintenant que $\mathrm{Per}(\lambda) \subseteq A(\lambda)$. Soit $z \in \mathrm{Per}(\lambda)$. Il existe donc $\omega \in I^*$ tel que $f_{\omega,\lambda}(z) = z$. Posons $\overline{\omega} = \omega\omega\omega\ldots$ et $k = |\omega|$. Ainsi, $f_{\overline{\omega}|_{kj},\lambda}(z) = z$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'après un résultat du chapitre 2, $\pi_\lambda(\overline{\omega}) := \lim_{n\to\infty} f_{\overline{\omega}|_n,\lambda}(z)$ existe. Puisque la suite $\left(f_{\overline{\omega}|_{kj}}(z)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $\left(f_{\overline{\omega}|_n}(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers z, il suit que $\pi_\lambda(\overline{\omega}) = z$. Par conséquent, $z \in J(\lambda) \subseteq A(\lambda)$, d'où $\mathrm{Per}(\lambda) \subseteq A(\lambda)$. Cette observation et la quatrième hypothèse entraînent que quelle que soit la valeur $\lambda \in \Lambda_0$, $g(\lambda) \in U(\lambda) \setminus A(\lambda) \subseteq U(\lambda) \setminus \mathrm{Per}(\lambda)$. Le théorème 5.2 nous permet maintenant de conclure. ■

À l'exemple 5.1, nous avons étudié le mouvement holomorphe de l'attracteur d'une famille holomorphe d'IFS S_Λ. Rappelons que cette famille était formée des contractions

$$f_{1,\lambda}(z) = kz, \qquad f_{2,\lambda}(z) = kz + m\lambda \qquad \text{et} \qquad f_{3,\lambda}(z) = (1-k)z + k,$$

où $0 < k \leq 1/2$ et $k \leq m \leq 1-k$. Nous avons vu qu'en choisissant $\Lambda = \mathbb{H}$ et $\lambda_0 = i$, l'attracteur de cette famille décrivait un mouvement holomorphe compatible avec S_Λ. Cependant, si on choisissait $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, on a vu qu'il était impossible de trouver un ouvert Λ, contenant λ_0, pour lequel l'attracteur de S_{λ_0} décrivait un mouvement holomorphe paramétrisé par l'ensemble Λ.

Pour cet exemple, l'existence d'un mouvement holomorphe de l'attracteur $A(\lambda_0)$ va de pair avec la satisfaction de la condition OSC pour l'IFS S_{λ_0}. En effet, si $\lambda_0 \in \mathbb{H}$, un calcul direct montre que l'intérieur du triangle dont les sommets sont 0,1 et $m\lambda_0/(1-k)$

est un ouvert qui réalise la condition OSC pour S_{λ_0}. Cependant, si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, la condition OSC n'est pas satisfaite.

Afin de montrer que S_{λ_0} ne satisfait pas la condition OSC dans le cas où $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, remarquons en premier lieu que les éléments qui composent S_{λ_0} sont des similitudes. Le théorème 2.3 nous permet donc d'affirmer que si la condition OSC est vérifiée, alors $\dim_H A(\lambda_0) = s$, où s satisfait

$$\sum_{i=1}^{3} |c_i(\lambda_0)|^s = 1.$$

Si S_{λ_0} satisfaisait la condition OSC, s vérifierait

$$2k^s + (1-k)^s = 1,$$

où $s = \dim_H A(\lambda_0)$. Puisque $2k^1 + (1-k)^1 = 1 + k > 1$, il suit que $s > 1$. Cependant, en remarquant que $m\lambda_0/(1-k)$ est le point fixe de f_{2,λ_0} et que

$$f_{1,\lambda_0}([0,1]) \cup f_{3,\lambda_0}([0,1]) = [0,1],$$

on peut vérifier facilement que

$$A(\lambda_0) = \left[\min\left\{0, \frac{m\lambda_0}{1-k}\right\}, \max\left\{1, \frac{m\lambda_0}{1-k}\right\}\right].$$

Or, si E est un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a < b$, on a que $0 < H^1(E) < \infty$. Par conséquent, $\dim_H A(\lambda_0) = 1$. Cela entraîne donc que S_{λ_0} ne peut satisfaire la condition OSC si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$.

Exemple 5.3. Nous nous proposons ici de donner un exemple d'une famille holomorphe d'IFS paramétrisée par $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ dont l'attracteur $A(\lambda)$ et l'ensemble limite $J(\lambda)$ décrivent un mouvement holomorphe qui respecte la dynamique, mais où la condition OSC n'est pas vérifiée quel que soit $\lambda \in \Lambda$.

Soient $S_\lambda := \{f_{1,\lambda}, f_{2,\lambda}\}$ et $\Lambda = \mathbb{D}(1, \frac{1}{2})$. On définit les $f_{i,\lambda}$ de la façon suivante :

$$f_{1,\lambda}(z) = \frac{\lambda z}{2} + \lambda - \frac{\lambda^2}{2} \qquad \text{et} \qquad f_{2,\lambda}(z) = \frac{z}{3} + \frac{2\lambda}{3}.$$

Ainsi, si $c_i(\lambda)$ est le rapport de contraction pour $f_{i,\lambda}$, nous avons que

$$c_1(\lambda) = \frac{|\lambda|}{2} \qquad \text{et} \qquad c_2(\lambda) = \frac{1}{3}.$$

On considère la famille d'IFS $S_\Lambda := \{S_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. Puisque Λ est le disque ouvert de rayon $\frac{1}{2}$ centré en $z = 1$, il suit que $\frac{1}{2} < |\lambda| < \frac{3}{2}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Par conséquent, les

éléments de S_λ sont des contractions dont le rapport est inférieur à $\frac{3}{4}$. Cela fait de S_Λ une famille finie de contractions injectives. De plus, les fonctions $\{(\lambda, z) \mapsto f_{i,\lambda}(z)\}_{i\in I}$ sont holomorphes en deux variables. Nous avons donc bien une famille holomorphe d'IFS.

Choisissons $\lambda_0 = 1 \in \Lambda$ et montrons que $A(\lambda_0)$ et $J(\lambda_0)$ décrivent un mouvement holomorphe paramétrisé par Λ qui respecte la dynamique. Remarquons que puisque les éléments de S_{λ_0} sont des contractions fixant λ_0, on a que $A(\lambda_0) = J(\lambda_0) = \{\lambda_0\}$.

Montrons maintenant que la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \Lambda \times A(\lambda_0) &\to \mathbb{C} \\ (\lambda, z) &\mapsto \lambda z \end{aligned}$$

est un mouvement holomorphe qui est compatible avec S_Λ. D'abord, on constate que pour chaque $\lambda \in \Lambda$, la fonction $\Phi(\lambda, \cdot) : A(\lambda_0) \to \mathbb{C}$ est injective. Cela découle du fait que $|A(\lambda_0)| = 1$. D'autre part, $\Phi(\lambda_0, \cdot) = \Phi(1, \cdot) \equiv z$.

On doit aussi montrer que pour tout $z_0 \in A(\lambda_0)$, la fonction $\Phi(\cdot, z_0) : \Lambda \to \mathbb{C}$ est holomorphe. Comme λ_0 est le seul élément de $A(\lambda_0)$, il nous faut montrer que $\Phi(\cdot, \lambda_0)$ est holomorphe. Mais puisque $\Phi(\cdot, \lambda_0) \equiv \lambda_0\lambda = \lambda$ est holomorphe, la condition est donc vérifiée. Ainsi, Φ est bien un mouvement holomorphe de $A(\lambda_0)$.

Il faut finalement s'assurer que ce mouvement holomorphe est compatible avec S_Λ. Ainsi, nous devons montrer que

$$\Phi(\lambda, f_{i,\lambda_0}(z)) = f_{i,\lambda}(\Phi(\lambda, z))$$

pour tout $z \in A(\lambda_0)$, $i \in I$ et $\lambda \in \Lambda$. Mais comme $A(\lambda_0) = \{1\}$, cela revient à montrer que

$$\Phi(\lambda, f_{i,\lambda_0}(1)) = f_{i,\lambda}(\Phi(\lambda, 1))$$

pour tout $i \in I$ et $\lambda \in \Lambda$. Cependant, nous avons que $f_{i,\lambda}(\lambda) = \lambda$ pour tout $i \in I$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$. De même, $\Phi(\lambda, 1) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Cela nous permet de conclure que Φ respecte la dynamique de S_Λ.

Terminons cet exemple en démontrant que S_λ ne satisfait pas la condition OSC pour tout $\lambda \in \Lambda$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'ouvert $U(\lambda) \subseteq \mathbb{C}$ tel que

1. $f_{i,\lambda}(U(\lambda)) \cap f_{j,\lambda}(U(\lambda)) = \emptyset$ si $i \neq j, \lambda \in \Lambda$;

2. $f_{i,\lambda}(U(\lambda)) \subseteq U(\lambda)$ si $i \in I, \lambda \in \Lambda$.

Le théorème 2.3 nous affirme que la dimension de Hausdorff et la dimension de similarité de l'attracteur d'un IFS doivent être les mêmes dans le cas où l'IFS satisfait la condition OSC et est formé d'un nombre fini de similitudes. Or, pour chaque $\lambda \in \Lambda$, l'attracteur de S_λ est l'ensemble $\{\lambda\}$, dont la dimension de Hausdorff est zéro. Cependant, la dimension de similarité de l'IFS S_λ est différente de zéro. En fait, celle-ci correspond à la valeur de s dans l'équation

$$\left(\frac{|\lambda|}{2}\right)^s + \frac{1}{3^s} = 1.$$

Ainsi, S_λ ne peut satisfaire la condition OSC, peu importe la valeur de $\lambda \in \Lambda$.

Remarquons que si on avait posé $\Psi(\lambda, z) = \frac{3\lambda}{2}z$ et choisi $\lambda_0 = \frac{2}{3}$ comme point de base, alors Ψ aurait aussi fait l'affaire comme mouvement holomorphe compatible avec la dynamique. Ainsi, un tel mouvement holomorphe n'est pas toujours unique.

Dans ce chapitre, certains exemples nous ont permis de constater que ce n'est pas dans tous les cas que l'attracteur d'une famille holomorphe d'IFS admet un mouvement holomorphe. Or, il se trouve qu'un mouvement holomorphe est un cas particulier de multifonction analytique. Ces dernières s'avèrent plus appropriées pour caractériser le comportement de l'attracteur d'une famille holomorphe d'IFS. En effet, dans leur article (voir [4]), L. Baribeau et M. Roy montrent que l'attracteur d'une famille holomorphe d'IFS est toujours une multifonction analytique.

CHAPITRE 6

Conclusion

Bien que la notion de mouvement holomorphe soit assez récente, elle s'intègre bien à plusieurs branches de l'analyse complexe. Que ce soit pour faire l'étude des groupes de Klein ou bien des fonctions rationnelles, les mouvements holomorphes permettent d'obtenir une interprétation plus géométrique de certains ensembles, lorsqu'on fait varier les paramètres qui définissent ceux-ci.

En ce qui nous concerne, les ensembles dont on voulait examiner le comportement étaient des attracteurs de systèmes de fonctions itérées. Nous avons vu que ceux-ci ne décrivaient pas toujours un mouvement holomorphe. Cela nous a amené à déterminer certaines conditions que doivent satisfaire les systèmes de fonctions itérées, pour être assurés de l'existence d'un mouvement holomorphe de leur attracteur. Dans leur article (voir [4]), L. Baribeau et M. Roy montrent que les multifonctions analytiques décrivent mieux le comportement de l'attracteur d'un IFS.

Au cours de ma dernière année de maîtrise, j'ai essayé d'obtenir une réciproque au théorème 5.2. Je voulais adapter la démonstration d'un résultat analogue, qui concerne l'existence d'un mouvement holomorphe d'un ensemble important qui intervient dans l'étude des familles de fonctions rationnelles (voir [24]). Le résultat en question est basé sur le λ-lemme harmonique, énoncé à la fin du chapitre 4. Il s'avère que les démonstrations de ces théorèmes reposent sur des résultats avancés concernant les sur-

faces de Riemann. On réfère entre autre à la notion d'espace de Teichmüller (voir [14]), qui est en quelque sorte un espace topologique dont les éléments sont des surfaces de Riemann quasi-conformément équivalentes. Une étude approfondie de ce sujet aurait certainement été d'une trop grande ampleur pour ce mémoire.

En terminant, mentionnons que des résultats concernant les mouvements holomorphes ont été utilisés pour obtenir de nouvelles preuves de certains théorèmes importants en dynamique complexe. C'est ainsi que Y. Jiang a récemment donné une nouvelle preuve des théorèmes de König et Bötthcher en se servant du théorème de Słodkowski (voir [17]). Ces derniers avaient été obtenus en 1904 et en 1884 respectivement. Il ne serait donc pas surprenant qu'en se servant des résultats concernant les mouvements holomorphes, on puisse obtenir d'autres preuves des théorèmes de l'analyse complexe. Peut-être même que de nouveaux résultats seront obtenus par ces méthodes.

Bibliographie

[1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, Second Edition, International Student Edition, McGraw-Hill & Kōgakusha, 1966.

[2] L. V. Ahlfors, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, D. Van Nostrand Company Inc., 1966.

[3] K. Astala et G. J. Martin, *Holomorphic Motions*, Papers on Analysis, Rep. Univ. Jyväsklä Dep. Math. Stat., No 83 (2001) p. 27 — 40.

[4] L. Baribeau et M. Roy, *Analytic Multifunctions, Holomorphic Motions and Hausdorff Dimension in IFSs*, Monatshefte für Mathematik, Vol. 147, No. 3 (2006), p. 199 — 217.

[5] L. Bers et H. L. Royden, *Holomorphic Families of Injections*, Acta Math., No. 157 (1986), p. 259 — 286.

[6] B. Bollobás, *Linear Analysis, an Introductory Course*, Second Edition, Cambridge Mathematical Textbooks, Cambridge University Press, 1999.

[7] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Second Edition, Academic Press, 1993.

[8] A. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1983.

[9] A. Douady, *Prolongement de Mouvements Holomorphes*, Séminaires Bourbaki, 46^{e} année, 1993-1994, p. 7 — 20.

[10] C. J. Earle et I. Kra, *On Holomorphic Mappings Between Teichmüller Spaces*, Contributions to Analysis, Academic Press, New York (1974), p. 107 — 124.

[11] K. Falconer, *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.

[12] F. Forstnerič, Polynomial Hulls of Sets Fibered Over the Circle, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 37, 1988, p. 869 — 889.

[13] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[14] F. P. Gardiner et N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol.76, 2000.

[15] R. E. Greene et S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Vol. 40, 2002.

[16] J. E. Hutchinson, *Fractals and Self Similarity*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 30, No. 5 (1981), p. 713 — 747.

[17] Y. Jiang, *Holomorphic Motions and Normal Forms in Complex Analysis*, eprint http://arxiv.org/pdf/math.DS/0508288, page consultée le 26 octobre 2006.

[18] S. G. Krantz, *Complex Analysis : The Geometric Viewpoint*, Second Edition, The Carus Mathematical Monographs, The Mathematical Association of America, 2004.

[19] J. G. Krzyź, *Lectures on Quasiconformal Mappings*, Notes provenant d'un cours donné à l'Université de Montréal à l'automne 1984.

[20] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1987.

[21] O. Lehto et K. I. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag, 1973.

[22] Vlad Markovic, *Quasiconformal Maps*, Notes provenant d'un cours donné à l'Université de Warwick au printemps 2003, http://www.maths.warwick.ac.uk/~fletcher/qcmaps.pdf, page consultée le 26 octobre 2006.

[23] R. Mañé, P. Sad et D. Sullivan, *On the Dynamics of Rational Maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. Vol. 16, No. 2 (1983), p. 193 — 217.

[24] C. T. McMullen et Denis P. Sullivan, *Quasiconformal Homeomorphisms and Dynamics III : The Dynamics of Rational Maps*, Advances in Math., Vol. 135, No. 2 (1998), p. 351 — 395.

[25] P. A. P. Moran, *Additive Functions of Intervals and Hausdorff Measure*, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 42 (1946), p. 15 — 23.

[26] A. Mori, *On Quasiconformality and Pseudo-Analyticity*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 84 (1957), p. 56 — 77.

[27] A. Schief, *Separation Properties for Self-Similar Sets*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol 122, No. 1 (1994), p. 111 — 115.

[28] R. A. Silverman, *Complex Analysis with Applications*, Dover Publications Inc, 1974.

[29] Z. Słodkowski, *Holomorphic Motions and Polynomial Hulls*, Proc. Amer. Math. Soc, Vol. 111, No. 11 (1991), p. 347 — 355.

[30] A. I. Šnirel'man, The Degree of a Quasiruled Mapping and the Nonlinear Hibert Problem, Mat. Sb. (N.S.), Vol. 89, No. 131 (1972), p. 366 — 389.

[31] K. Strebel, *On the Maximal Dilatation of Quasiconformal Mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 6 (1955), p. 903 — 909.

[32] D. Sullivan et W. P. Thurston, *Extending Holomorphic Motions*, Acta Math., Vol. 157 (1986), p. 243 — 257.

[33] T. Szarek et S. Wedrychowicz, *The OSC does not imply the SOSC for Infinite Iterated Function Systems*, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 133, No. 2 (2005), p. 437 — 440.

[34] E. W. Weisstein, *Cantor Function*, From MathWorld - A Wolfram Web Resource, http://mathworld.wolfram.com/CantorFunction.html, page consultée le 26 octobre 2006.

Notation

$\mathbb{H}$	Le demi-plan supérieur.
$\mathbb{D}$	Le disque unité ouvert.
$\overline{\mathbb{D}}$	Le disque unité fermé.
$\mathbb{D}(a, r)$	Le disque ouvert de rayon r centré en a.
$\pi(\omega)$	La fonction de codage évaluée en ω.
c_ω	Le rapport de contraction de f_ω.
I^n	Les mots de longueur n formés de l'alphabet I.
I^*	Les mots finis formés à de l'alphabet I.
I^∞	Les mots infinis formés de l'alphabet I.
d_H	La métrique de Hausdorff.
$\kappa(X)$	L'ensemble des compacts non-vides de X.
$H^s(E)$	La s-mesure de Hausdorff.
$\dim_H E$	La dimension de Hausdorff de l'ensemble E.
J_f	Le jacobien de la transformation f.
D_f	Le quotient de dilatation de f.
$M(Q(z_1, z_2, z_3, z_4))$	Le module du quadrilatère $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$
K_f	La dilatation maximale de f.
H_f	La distortion circulaire de f.
$\chi(z_1, z_2, z_3, z_4)$	Le produit croisé de z_1, z_2, z_3 et z_4.
$\mathrm{dist}_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus\{0,1,\infty\}}$	La métrique hyperbolique sur $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$
μ_f	La dilatation complexe de f.
$\mathrm{Per}(\lambda)$	L'ensemble des points périodiques de S_λ.
$B(a, r)$	La boule ouverte de rayon r centré en a.