



Généralisation du modèle de Skyrme dans une extension holographique de la chromodynamique quantique

Mémoire

Geneviève Boudreau

Maîtrise en physique - avec mémoire
Maître ès sciences (M. Sc.)

Québec, Canada

Généralisation du modèle de Skyrme dans une extension holographique de la chromodynamique quantique

Mémoire

Geneviève Boudreau

Sous la direction de:

Luc Marleau, directeur de recherche

Résumé

Développé dans les années 50, le modèle de Skyrme est un modèle efficace à basse énergie qui tente de représenter les noyaux atomiques. Bien qu'intéressant, le modèle original rencontre deux problèmes majeurs : il prédit des énergies de liaison trop élevées pour les noyaux et il leur prête une structure cristalline qui n'est pas observée expérimentalement. Afin de régler ces problèmes, Adam, Sánchez-Guillén et Wereszczynski, en 2010, ont développé le modèle de Skyrme BPS en modifiant le lagrangien du modèle original. Toutefois, leur version ne permet pas de représenter des particules physiques. C'est pour cette raison que le modèle de Skyrme quasi-BPS fut développé par Bonenfant et Marleau en 2010. Le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS comprend les termes du modèle de Skyrme original en plus de ceux du modèle de Skyrme BPS, soit des termes d'ordre zéro, deux, quatre, et six en dérivée.

En 2018, Bartolini, Bolognesi et Proto proposèrent une façon de générer le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS en se basant sur le modèle de Sakai-Sugimoto, qui est une extension holographique de la chromodynamique quantique. Nous tenterons, pour ce projet de recherche, d'utiliser leur méthode afin de générer des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien. Ainsi, nous souhaitons explorer le parallèle entre le modèle d'élasticité et le modèle de Skyrme proposé par Manton en 1987.

Abstract

Developed in the 50s, the Skyrme model is a low energy effective model that aims to represent atomic nuclei. Although interesting, the original model bumps into two major problems : it predicts binding energies that are too high compared to experimental results and gives the nuclei crystalline structures that are not observed experimentally. To solve these problems, Adam, Sánchez-Guillén and Wereszczynski, in 2010, developed the BPS Skyrme model by modifying the original lagrangian. However, their version cannot represent real particles. In order to remedy this problem, the q-BPS Skyrme model was developed by Bonenfant and Marleau in 2010. Its lagrangian includes both the terms from the lagrangian of the original Skyrme model and the ones from the lagrangian of the BPS Skyrme model, that is, terms of order 0, 2, 4 and 6 in derivative.

In 2018, Bartolini, Bolognesi and Proto proposed a way to generate the q-BPS Skyrme model lagrangian using the Sakai-Sugimoto model, which is a holographic extension of quantum chromodynamics. We will try, for this research project, to generalize their method in order to generate higher order terms in derivative in the q-BPS lagrangian. This way, we hope to explore the parallel between the elasticity theory and the Skyrme model described by Manton in 1987.

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Table des matières	iv
Liste des figures	v
Liste des tableaux	vi
Remerciements	vii
Introduction	1
1 Le modèle de Skyrme	4
1.1 Origines du modèle	4
1.2 L'équation de sine-Gordon	7
1.3 Généralisation en (3+1) dimensions	16
1.4 Quantification des skyrmions	19
1.5 Les modèles de Skyrme BPS et quasi-BPS	20
2 Introduction au modèle de Sakai-Sugimoto	22
2.1 La chromodynamique quantique (QCD)	23
2.2 La théorie des cordes	28
2.3 Correspondance entre la QCD et la théorie des cordes	32
2.4 Le modèle de Sakai-Sugimoto	35
3 Le modèle de Skyrme généralisé	37
3.1 De Sakai-Sugimoto à Skyrme	37
3.2 De Sakai-Sugimoto à un modèle de Skyrme généralisé	45
Conclusion	53
Bibliographie	55

Liste des figures

1.1	Représentations graphiques de l'équation (1.21), solution à l'équation de sine-Gordon. On a posé $g = \alpha = 1$ et $x_0 = 0$. On remarque que la valeur de $\varphi(x)$ passe de 0 à 2π pour le <i>kink</i> et de 2π à 0 pour l' <i>antikink</i>	11
1.2	Visualisations de différents nombres d'enroulements Q . $\alpha(x)$ correspond ici au $\varphi(x)$ que l'on a défini (figure tirée de [34], p.37).	13
1.3	Représentation graphique de la solution hérisson du modèle de Skyrme en (3+1) dimensions (figure tirée de [28]).	19
2.1	Diagrammes de Feynman des interactions les plus simples en QED (figure tirée de [38]).	24
2.2	Diagrammes de Feynman des interactions les plus simples en QCD (figure tirée de [38]). On remarque que les gluons peuvent interagir entre eux, contrairement aux photons en QED.	25
2.3	Diagramme des interactions les plus simples entre des gluons (figure tirée de [32]).	26
2.4	Second diagramme de la figure 2.3 illustré sur une surface de genre 1.	26
2.5	Vertex d'interaction de base entre deux cordes fermées.	29
2.6	Paramétrisation de la trajectoire d'une corde (figure reproduite à partir de [32]).	29
2.7	Ligne d'univers d'une particule se déplaçant dans l'espace (figure reproduite à partir de [32]).	30
2.8	Diagrammes du vide d'une corde fermée.	31
2.9	Diagrammes du vide d'une corde fermée et les interactions équivalentes.	32
2.10	Diagrammes du vide auxquels on a ajouté 2 cordes entrantes et deux cordes sortantes.	32
2.11	Représentation des D-branes et des quarks du modèle de Sakai-Sugimoto. La dimension x_4 est périodique et on n'y retrouve pas de D8-branes, ni de $\overline{D8}$ -branes (figure tirée de [43]).	36

Liste des tableaux

2.1 Charges faibles, charges électriques et masses des différents quarks [40]	24
---	----

Remerciements

Avant de passer aux choses sérieuses, j'aimerais remercier quelques personnes qui m'ont permis de passer à travers l'épreuve qu'a été ma maîtrise. Ma maîtrise aura été le plus grand défi que j'ai eu à surmonter à ce jour, mais aussi une occasion en or d'apprendre à me connaître et à me dépasser.

Tout d'abord, merci à Luc Marleau, mon directeur de recherche, de m'avoir donné l'occasion d'entreprendre ce projet et à mes examinateurs, Antoine Allard et Jean-François Fortin, d'avoir accepté de corriger mon mémoire.

Merci à mes collègues du groupe de physique théorique, Jérémy Boulay, Marianne Gratton, Mathieu Bélanger, Jasmine Pelletier-Dumont et Wen-Jie Ma et à toute la population du «bureau des grads» pour la camaraderie, la bonne humeur et les niaiseries de l'époque pré-pandémique. Un merci tout particulier à Jé pour les meilleurs biscuits aux pépites de chocolat du monde et toutes les autres aventures culinaires.

Merci à Béatrice Désy, Frédéric Dion, Anton Zhekov, Gabriel Savard et Jérôme Simon pour leur amitié et pour les nombreuses (très nombreuses) soirées passées au Fou Aéliés.

Merci à mes parents et à mes beaux-parents pour les encouragements et toutes les gâteries.

Finalement, merci à mon meilleur ami et mon amoureux, Vincent Painchaud, pour son support inconditionnel et son écoute. Je suis certaine que je n'aurais jamais réussi à terminer ce mémoire sans lui.

Introduction

Dans les années 50, la physique des noyaux atomiques était encore un domaine très peu développé. Travaillant à proximité de plusieurs physiciens expérimentaux, Tony H. R. Skyrme était très au courant des lacunes du modèle en couches alors utilisé [34]. C'est cela qui lui inspira son modèle théorique, le modèle de Skyrme, qui sera le sujet principal de ce mémoire. Ce modèle classique efficace a pour objectif de représenter les noyaux atomiques comme des fluctuations dans un fluide composé de mésons π .

Bien que présentant des résultats intéressants, le modèle de Skyrme original possède des problèmes majeurs. Il prédit aux noyaux des énergies de liaison trop élevées et des structures cristallines que l'on n'observe pas expérimentalement. Pour régler ces problèmes, le modèle de Skyrme BPS fut développé en 2010 par Adam, Sánchez-Guillén et Wereszczynski [2]. Ce modèle jouet ne donne aucune énergie de liaison aux noyaux. Dans le but de trouver un modèle pouvant représenter des particules réelles, le modèle de Skyrme quasi-BPS [11] fut ensuite développé. Son lagrangien possède les termes du lagrangien du modèle de Skyrme BPS ainsi que ceux du modèle de Skyrme original ; ces derniers étant multipliés par une constante afin de les garder petits. Ainsi, on peut considérer que les termes du modèle de Skyrme original se présentent comme des petites perturbations autour du modèle de Skyrme BPS. Cela donne un modèle avec de meilleures prédictions.

Nicholas S. Manton, en 1987, explicita un parallèle possible entre les termes du lagrangien de Skyrme quasi-BPS et les invariants du modèle d'élasticité [37], soit la théorie qui permet de décrire les transformations élastiques. En effet, il est possible de définir trois invariants dans le modèle d'élasticité : I_1 qui équivaut à la somme des carrés des étirements engendrés par la transformation, I_2 qui correspond à la somme des carrés des variations d'aires et I_3 qui correspond au carré de la variation de volume. Ces invariants peuvent être reliés aux termes du lagrangien de Skyrme quasi-BPS, $\mathcal{L}_{\text{q-BPS}} = S_0 + S_2 + S_4 + S_6$. Respectivement, on peut relier I_1 au terme du modèle σ non linéaire d'ordre deux en dérivée, soit S_2 , I_2 au terme de Skyrme d'ordre quatre en dérivée, soit S_4 et I_3 au terme de Jackson d'ordre six en dérivée, soit S_6 [23].

C'est ce parallèle entre le modèle de Skyrme quasi-BPS et le modèle d'élasticité qui nous intéresse particulièrement pour ce mémoire. Nous nous demandons s'il est possible de le pousser

encore plus loin. En fait, nous nous demandons s'il est possible, considérant qu'il n'existe que trois invariants indépendants dans le modèle d'élasticité, que seuls les termes actuels du modèle de Skyrme quasi-BPS soient indépendants. Autrement dit, est-il possible que tous les termes d'ordre supérieur en dérivée que l'on puisse ajouter au lagrangien du modèle quasi-BPS soient en fait des fonctions des termes que l'on possède déjà ? Pour vérifier notre hypothèse, nous aurons besoin d'une façon de générer ces termes d'ordre supérieur en dérivée.

Pour ce faire, nous nous baserons sur l'article [8] de Bartolini, Bolognesi et Proto. À partir du modèle de Sakai-Sugimoto, qui est une extension holographique de la chromodynamique quantique, ils arrivent à générer les termes du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Nous souhaitons utiliser une variation de leur méthode pour générer des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien.

Avant de se rendre là, nous prendrons le temps d'introduire le modèle de Sakai-Sugimoto [44; 45]. Comme il s'agit d'une théorie holographique, soit une théorie qui relie des modèles n'ayant pas le même nombre de dimensions, nous aurons besoin d'étudier les deux modèles qui le compose. Sans aller trop dans les détails, nous discuterons donc de la théorie des cordes et de la chromodynamique quantique afin de faire ressortir le parallèle entre les deux qui mène à la correspondance AdS/CFT de Maldacena de 1999 [35]. Le modèle de Sakai-Sugimoto est en fait une correspondance AdS/CFT développée par Witten [52], puis Sakai et Sugimoto [44; 45], qui existe entre une théorie anti-de-Sitter $AdS_7 \times S^4$ et une théorie de Yang-Mills standard, soit une théorie de champs conformes.

Dans le premier chapitre, nous nous concentrerons tout d'abord sur le modèle de Skyrme original. Nous discuterons des origines du modèle, puis de sa première version : le *mesic fluid*. Ensuite, nous passerons au développement mathématique du modèle de Skyrme en (1+1) dimensions, qui revient au modèle de sine-Gordon. Cela nous permettra de discuter des propriétés topologiques intéressantes du modèle de Skyrme dans un contexte plus simple. Nous passerons ensuite à la version du modèle en (3 + 1) dimensions puis, très brièvement, à sa quantification. Nous finirons le chapitre en discutant du modèle de Skyrme BPS et du modèle de Skyrme quasi-BPS, celui qui nous intéresse pour notre projet de recherche.

Dans le deuxième chapitre, nous prendrons le temps d'introduire le modèle de Sakai-Sugimoto sur lequel est basée la méthode de génération des termes du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS présentée dans l'article [8]. Pour ce faire, nous commencerons par discuter de la chromodynamique quantique pour expliciter son développement en série. Comme le modèle de Sakai-Sugimoto est une théorie holographique, nous aurons également besoin de comprendre l'autre côté de l'holographie, dans ce cas-ci, la théorie des cordes. Nous discuterons donc brièvement de la théorie des cordes dans le but de l'exprimer également sous la forme d'un développement en série. Nous comparerons ensuite les deux développements en série obtenus pour en remarquer les similitudes. Ces similarités nous mèneront à discuter de la correspon-

dance AdS/CFT, soit la correspondance entre une théorie anti-de-Sitter et une théorie des champs conformes développée par Juan M. Maldacena en 1999 [35]. C'est dans une correspondance du même type que l'on retrouve le modèle de Sakai-Sugimoto. En fait, alors que la correspondance de Maldacena relie une théorie de Yang-Mills supersymétrique à une théorie anti-de-Sitter $AdS_5 \times S^5$, le modèle de Sakai-Sugimoto relie une théorie de Yang-Mills standard à une théorie anti-de-Sitter $AdS_7 \times S^4$.

Dans le troisième chapitre, nous partirons du lagrangien du modèle de Sakai-Sugimoto puis, suivant la méthode présentée dans [8], nous arriverons à générer les quatre termes connus du modèle de Skyrme quasi-BPS. Nous repartirons ensuite du début, mais en modifiant légèrement la méthode de l'article de Bartolini et al. Ainsi, nous arriverons à générer les termes du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS, mais aussi à générer des termes d'ordre supérieur en dérivée. Nous obtiendrons ainsi une généralisation du modèle de Skyrme à partir de laquelle nous tenterons d'explorer le lien avec la modèle d'élasticité.

Chapitre 1

Le modèle de Skyrme

Dans les années 50, Tony H. R. Skyrme développa le modèle de Skyrme afin de représenter les noyaux atomiques comme des fluctuations dans un fluide composé de mésons π . Il souhaitait ainsi trouver un modèle unifiant les bosons et les fermions comme une seule et même particule tout en leur donnant une dimension non nulle, contrairement aux modèles qui considèrent les particules comme étant ponctuelles. Ce modèle efficace classique sera le sujet principal de ce mémoire. Nous prendrons donc le temps de bien l'introduire.

Pour ce faire, nous prendrons une approche historique permettant de bien suivre le développement de la pensée de Skyrme basée sur [34; 47]. Nous nous pencherons également brièvement sur les travaux d'autres physiciens ayant influencé sa recherche. Entre autres, nous nous intéresserons à l'impact de l'introduction de la symétrie chirale sur les travaux de Skyrme. Nous poursuivrons en décrivant les outils mathématiques et physiques nécessaires au modèle en 2 dimensions, puis en explicitant la forme du modèle en $(3 + 1)$ dimensions. Nous terminerons avec une brève discussion de la quantification du modèle et de ses versions BPS et quasi-BPS.

1.1 Origines du modèle

Dans une conférence à Abingdon en 1984 [47], Skyrme parle des trois principales raisons qui l'ont poussé à développer son modèle quelques décennies plus tôt. La première idée qu'il énonce est celle de l'unification. Cette idée guidait et guide toujours les physiciens dans la recherche d'une théorie du tout qui pourrait expliquer l'ensemble des forces physiques sous un seul et même cadre. La deuxième idée dont il fait part est son malaise avec la renormalisation. Il parle alors de celle engendrée par le fait que les particules élémentaires sont considérées comme étant ponctuelles dans la plupart des modèles en physique quantique. Bien qu'il la trouve ingénieuse et bien construite, il la décrit comme *«just a very good and useful way of enabling us to live with our ignorance of what really goes on at short distances»* [47]. La troisième et dernière raison qu'il partage lors de cette conférence est son appréhension par rapport aux fermions. À l'époque, il n'aimait pas le fait que les fermions soient des particules pûrement quantiques sans

équivalent classique. Ainsi, il cherchait à mettre en place une théorie amenant l'unification des fermions et des bosons sous une seule et même théorie de champs de bosons *self interacting*, où les particules ne sont pas considérées comme ponctuelles ni rigides. C'est là que s'inscrit la première version du modèle de Skyrme, soit son modèle du fluide mésonique (en anglais «*mesic fluid*»).

Si on s'intéresse à l'origine du modèle de Skyrme, il faut également prendre en compte le contexte scientifique de l'époque. Lors de sa carrière de chercheur, Skyrme s'intéresse particulièrement à la physique des noyaux atomiques. Au moment où commencent à émerger les premiers souffles de son modèle, la chromodynamique quantique n'est pas encore développée et l'étude des noyaux atomiques se fait principalement par le modèle en couches. Travaillant à proximité de plusieurs physiciens expérimentaux, Skyrme est très au courant des lacunes du modèle en couches quand arrive le moment de représenter de manière précise certaines observations faites en pratique. Entre autres, il existe alors une différence expérimentale entre le rayon nucléaire et le rayon de sa distribution de charges qui n'est pas expliquée par le modèle en couches [34]. En effet, comme la charge du noyau est contenue dans les protons et que la force nucléaire ne différencie pas les protons des neutrons, alors ces rayons devraient être identiques, mais l'expérience montre qu'ils ne le sont pas.

C'est l'étude de ce problème, en plus des raisons énumérées précédemment, qui pousse Skyrme à développer son modèle du fluide mésonique [48]. Il cherche alors à définir un cadre où les particules se présentent comme des fluctuations dans un fluide plutôt que comme des particules ponctuelles. Ainsi, le fluide pourrait s'étendre dans la plus grande région du rayon nucléaire tout en permettant aux nucléons de rester confinés dans un rayon inférieur. Dans cette idée, on peut reconnaître une inspiration tirée des travaux de Kelvin sur l'atome en vortex [33], eux-mêmes inspirés par des travaux de Helmholtz [26].

1.1.1 Modèle de l'atome de Lord Kelvin

L'idée de considérer la matière comme continue n'est pas nouvelle. Bien que la plupart des physiciens préfèrent intuitivement l'image d'une particule élémentaire indivisible à la base de toute matière, d'autres avant Skyrme ont proposé des alternatives à cette hypothèse. Nous nous intéresserons en particulier à Kelvin, qui a amené des idées qui ont grandement inspiré Skyrme lors du développement de son modèle.

Dans une conférence [51], Kelvin affirme que seuls les modèles mécaniques satisfont sa volonté de comprendre des phénomènes physiques. Par exemple, bien qu'il adhère à l'idée d'une théorie électromagnétique comme celle de Maxwell rassemblant la lumière, l'électricité et le magnétisme, il souhaiterait qu'elle émerge naturellement d'interactions mécaniques, plutôt que d'être expliquée par de nouveaux concepts. Il discute également de la nature de la matière en expliquant que, bien que l'idée d'une particule fondamentale ponctuelle et indivisible de

matière soit acceptée depuis longtemps, il ne l'adopte pas instinctivement. Il préfère l'idée que la matière soit continue, ou infiniment divisible. Ce sont ces réflexions, et la lecture des travaux d'Helmholtz [26], qui le poussent à développer un modèle d'atome représenté par des vortex dans un fluide [33].

Helmholtz définit des mouvements appelés *wirbelbewegung* dans un fluide parfait. Ces mouvements sont particulièrement stables et possèdent des propriétés intrinsèques inaltérables. Ils suivent des structures géométriques non triviales stables. Par exemple, un *wirbelbewegung* peut être représenté par un vortex présentant un noeud dans sa géométrie. Celui-ci sera fondamentalement différent d'un autre où il n'y a pas de noeud, car il est impossible de transformer le premier de manière continue de sorte que l'on obtienne le second. Ce sont ces propriétés qui portent Kelvin à les trouver particulièrement intéressants pour représenter les atomes. En effet, vu leur stabilité dans le temps, il voit dans leur création quelque chose de similaire à la création d'une particule. Il argumente alors que l'hypothèse des particules ponctuelles rigides qui vient intuitivement à plusieurs physiciens n'est en réalité pas plus probable que celle de particules sous forme de fluctuations de style *wirbelbewegung* dans un fluide.

Dans les différences géométriques entre les différents vortex définis par Kelvin, on remarque aujourd'hui des différences de nature topologique. Autrement dit, il s'agit de différences géométriques intrinsèques aux vortex qui sont inaltérables sous une transformation continue. Bien que le fluide considéré par Kelvin était l'éther, ce qui n'est plus exactement d'actualité à l'époque de Skyrme, il est intéressant de remarquer toutes les similarités conceptuelles entre leurs modèles surtout puisque la topologie n'était pas encore une discipline mathématique bien définie au moment de la publication de l'article de Kelvin.

1.1.2 Les travaux de Yukawa

Une autre inspiration des travaux de Skyrme est le travail fait dans les années 30 par Hideki Yukawa, soit sa prédiction théorique de l'existence des pions. Dans son article *On the Interactions of Elementary Particles* [53] paru en 1935, Yukawa propose que les interactions fortes, à l'instar des interactions électromagnétiques, possèdent un quantum d'énergie.

Contrairement au photon, cette particule posséderait une charge positive ou négative et obéirait à la statistique de Bose-Einstein. Il prévoit également que sa masse serait de l'ordre de 200 fois la masse de l'électron. Yukawa précise également que les interactions entre ce quantum des interactions fortes et les baryons doivent être beaucoup plus importantes que les interactions dues aux photons vu la force de l'interaction entre le proton et le neutron et la faible probabilité de la désintégration β . Cette particule hypothétique fut observée pour la première fois en 1947 sous la forme des pions π^+ et π^- , puis en 1950 sous la forme du pion π^0 . C'est d'ailleurs la raison pour laquelle le prix Nobel de 1950 fut remis à Yukawa.

Ce sont ces travaux de Yukawa qui ont inspiré Skyrme à travailler sur un modèle des interac-

tions fortes basé sur les pions.

1.1.3 Le *Mesic Fluid* : la première version du modèle de Skyrme

Dans son article de 1954 [48], reprenant l'idée globale du modèle d'atome de Kelvin, Skyrme développe son fluide mésonique où les nucléons sont représentés comme des fluctuations dans un fluide composé de mésons π . Il considère un fluide incompressible composé de particules classiques qui est globalement électriquement neutre. Les fluctuations, que l'on peut associer aux vortex de Kelvin et Helmholtz, sont définies par le spin et l'isospin des mésons π .

Les nucléons interagissent avec le fluide mésonique de deux façons. Tout d'abord, il y a un couplage entre le spin et l'isospin des nucléons et ceux du fluide, ce qui équivaut aux fluctuations. Ensuite, les nucléons émettent et absorbent des mésons virtuels, ce qui amène le volume du fluide à varier faiblement. Ces variations de volume modifient légèrement l'amplitude des interactions entre le fluide et le nucléon, ce que Skyrme propose d'interpréter comme une énergie potentielle faisant partie de la masse du nucléon. Dans un volume de fluide fini, soit dans un cas représentant la réalité physique d'un noyau atomique, ces variations d'amplitude pourraient avoir un impact sur la forme de la surface du fluide.

Skyrme termine en remarquant que les interactions obtenues entre deux nucléons dans son modèle s'apparentent grandement à celles que l'on retrouve dans les théories de champs de mésons pseudo-scalaires. Bien que son modèle soit loin d'être complet dans ce premier article, il amène une vision différente de la physique des noyaux qui inspirera plusieurs physiciens à se pencher sur la question.

1.2 L'équation de sine-Gordon

En 1957, Yang et Lee découvrent la violation de la parité dans les interactions faibles [31], ce qui leur méritera un prix Nobel. Cette découverte force la définition d'une nouvelle symétrie en physique des particules, soit la chiralité. Celle-ci aura un impact direct sur les travaux de Skyrme, qui devra adapter son modèle du fluide mésonique pour la prendre en compte. Il doit ainsi agrandir le groupe des symétries de son modèle afin de pouvoir l'inclure. Il décrit ce travail dans l'article *A nonlinear theory of strong interactions* paru en 1958 [49].

Il y définit un champ vectoriel à quatre composantes de grandeur constante, où trois des composantes sont les champs de mésons pseudo-scalaires déjà présents dans la théorie et le quatrième est un champ non physique ajouté pour générer la masse des nucléons [34]. On appellera plus tard l'équation donnant la norme de ce champ la contrainte topologique, car elle amène l'introduction des groupes d'homotopie dans le modèle. Cette équation est nécessaire pour conserver le même nombre de degrés de liberté malgré l'ajout de la quatrième composante de champs. Skyrme se retrouve alors avec une théorie non linéaire pour décrire le fluide de

mésons précédemment développé. Le traitement mathématique de ce genre de théorie en (3+1) dimensions est en général assez complexe, et il n'est pas direct de lui trouver des solutions analytiques.

Skyrme décide alors de commencer son étude mathématique par un modèle simplifié en (1+1) dimensions où il sera possible d'obtenir des solutions analytiques. Peut-être sans le savoir, il étudiait alors le modèle de sine-Gordon, déjà connu par les mathématiciens [34]. C'est par ce chemin simplifié qu'il commence à voir émerger les propriétés intéressantes de son approche. Entre autres, c'est à ce moment qu'il définira une nouvelle quantité physique conservée, la charge topologique [49]. Afin de s'initier tranquillement à son modèle, nous commencerons, à l'instar de Skyrme, par l'étude du modèle de sine-Gordon. Nous débiterons avec le développement mathématique du modèle, en prenant soin d'introduire les notions de topologie associées au modèle, puis nous discuterons de la nature solitonique des solutions.

1.2.1 L'isospin et la symétrie chirale

L'isospin est une symétrie approximative des interactions fortes. Elle adhère à la structure du groupe $SU(2)$ [38]. L'opérateur associé à l'isospin, \mathbf{I} , amène la conservation des nombres quantiques I et i_3 , qui sont respectivement la valeur propre et la troisième composante de l'opérateur d'isospin. Ils respectent les relations

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k \quad (1.1)$$

$$\mathbf{I}^2|I, i_3\rangle = I(I+1)|I, i_3\rangle \quad (1.2)$$

$$I_3|I, i_3\rangle = i_3|I, i_3\rangle, \quad (1.3)$$

qui sont définies par l'algèbre de l'isospin, qui est d'ailleurs la même que celle du spin.

Dans le cadre de cette symétrie, le proton et le neutron se présentent comme 2 états différents d'une seule et même particule. On dit qu'il s'agit d'une symétrie approximative, car les masses du proton et du neutron diffèrent très légèrement ($m_p = 938,27$ MeV et $m_n = 939,56$ MeV). On attribue surtout cette différence de masse à des effets coulombiens dus à la charge électrique du proton [38]. On peut ainsi dire que la symétrie d'isospin est brisée par les interactions électromagnétiques. On peut donc présenter le proton et le neutron comme le doublet d'isospin

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I = 1/2, i_3 = 1/2 \\ I = 1/2, i_3 = -1/2 \end{pmatrix},$$

ce qui implique que les états respectifs du proton et du neutron sont donnés par

$$|p\rangle = |1/2, 1/2\rangle \quad \text{et} \quad |n\rangle = |1/2, -1/2\rangle.$$

Pour ce qui est des pions, autres particules qui nous intéressent particulièrement dans le cadre de ce travail, ils peuvent être rassemblés sous un seul et même triplet d'isospin, tel que

$$\psi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Leurs états respectifs sont alors donnés par

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle \quad \text{et} \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle. \quad (1.5)$$

Afin d'inclure la symétrie chirale, il est possible d'ajouter aux trois générateurs d'isospin déjà présents, trois générateurs chiraux. Il s'agit d'une technique qui fut utilisée avant l'hypothèse des quarks [1]. Ces générateurs, A_i , représentent des *boosts* chiraux, à la manière des *boosts* de Lorentz en relativité restreinte.

Ainsi, on obtient les commutateurs

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k \quad (1.6)$$

$$[I_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}A_k \quad (1.7)$$

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k. \quad (1.8)$$

On peut alors définir les générateurs chiraux gauche et droit, soit

$$L_i = \frac{1}{2}(I_i - A_i) \quad \text{et} \quad R_i = \frac{1}{2}(I_i + A_i), \quad (1.9)$$

ce qui nous permet de découpler les commutateurs.

Les commutateurs deviennent alors

$$[L_i, R_j] = 0 \quad (1.10)$$

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \quad (1.11)$$

$$[R_i, R_j] = i\varepsilon_{ijk}R_k \quad (1.12)$$

et définissent ainsi deux sous-algèbres $\mathfrak{su}(2)$. Cela forme un groupe $SU(2)_L \times SU(2)_R$, qui est le groupe de symétrie de la symétrie chirale. Celui-ci est isomorphe au groupe de rotation $O(4)$, ce qui implique que l'on a besoin de quatre composantes de champs indépendantes pour un champ dans la représentation vectorielle. C'est pourquoi on ajoutera le champ ϕ_0 . Pour retirer le degré de liberté dû à ϕ_0 , qui n'est pas un champ physique, on introduira également une contrainte topologique dans le modèle. Tout ceci sera expliqué davantage plus loin dans ce travail.

1.2.2 Développement mathématique

Nous suivrons maintenant le développement de Skyrme du modèle de sine-Gordon qui lui permet de mettre en lumière des propriétés intéressantes qui le mèneront plus tard à développer le modèle de Skyrme. Pour ce faire, on choisit tout d'abord une densité lagrangienne générale en $(1 + 1)$ dimensions [24], soit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 [\partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - 2V(\phi_0, \phi_1)] , \quad (1.13)$$

où les ϕ_i sont les composantes du champ scalaire classique $\phi = (\phi_0, \phi_1)$ et où $V(\phi_0, \phi_1)$ est le potentiel des interactions entre les composantes du champ. À cette densité lagrangienne, on introduit la contrainte

$$\phi_0^2 + \phi_1^2 = f^2 , \quad (1.14)$$

où f est une constante. Il s'agit de la contrainte topologique abordée plus tôt. Il est nécessaire de l'introduire car, le champ ϕ_0 n'étant pas un champ physique, il faut retirer un degré de liberté.

Skyrme la choisit après avoir remarqué que le fait que cette expression soit identique à l'équation d'un cercle octroie plusieurs propriétés intéressantes au modèle. C'est pour cette raison qu'il choisit d'explicitier ϕ_0 et ϕ_1 comme

$$\phi_0 = f \cos(\theta/4) \quad \text{et} \quad \phi_1 = f \sin(\theta/4) , \quad (1.15)$$

où $\theta = \theta(x, t)$.

On introduit ensuite le couplage du modèle de sine-Gordon [22], soit

$$V(\phi_0, \phi_1) = 2\lambda\phi_0^2\phi_1^2 = \lambda(f^4 - \phi_0^4 - \phi_1^4) , \quad (1.16)$$

où λ est une constante, que l'on peut facilement réécrire comme

$$V(\theta) = \frac{f^4}{4} \lambda (1 - \cos \theta) .$$

On peut alors réexprimer le lagrangien comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{f}{4} \right)^2 (\partial_t \theta)^2 - \left(\frac{f}{4} \right)^2 (\partial_x \theta)^2 - \frac{\lambda f^4}{2} (1 - \cos \theta) \right] . \quad (1.17)$$

On veut finalement redéfinir certaines quantités afin d'obtenir exactement le modèle de sine-Gordon. On pose donc

$$\varphi \equiv \frac{f}{4} \theta , \quad g \equiv \frac{4}{f} \quad \text{et} \quad \alpha \equiv 4\lambda f^2 . \quad (1.18)$$

Sachant que l'action s'exprime, en fonction du lagrangien, comme

$$S = \int \mathcal{L} dt dx , \quad (1.19)$$

on obtient, par le principe de moindre action, l'équation d'Euler-Lagrange

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \frac{\alpha}{g} \sin(g\varphi) = 0 . \quad (1.20)$$

Cette dernière expression est l'équation de sine-Gordon. On peut y interpréter les constantes g et α comme une constante de couplage et un facteur d'échelle respectivement.

À l'équation différentielle (1.20), Skyrme trouve les solutions

$$\varphi(x) = \frac{4}{g} \arctan \left(e^{\pm \sqrt{\alpha}(x-x_0)} \right) , \quad (1.21)$$

qui s'appellent le *kink* (+) et l'*antikink* (-). Elles sont représentées à la figure 1.1. Nous verrons plus tard qu'elles peuvent être associée à des solitons topologiques.

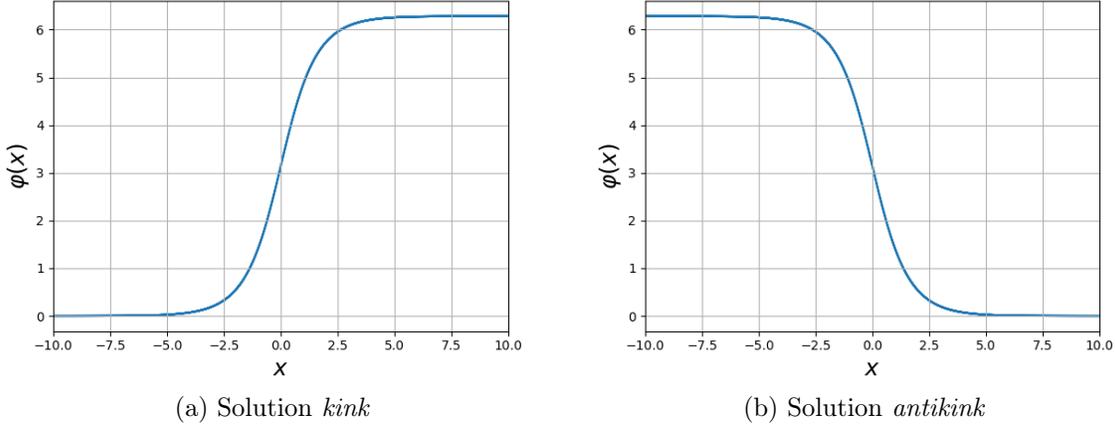


FIGURE 1.1 – Représentations graphiques de l'équation (1.21), solution à l'équation de sine-Gordon. On a posé $g = \alpha = 1$ et $x_0 = 0$. On remarque que la valeur de $\varphi(x)$ passe de 0 à 2π pour le *kink* et de 2π à 0 pour l'*antikink*.

À partir de cette solution, Skyrme définit le courant conservé [49],

$$J^\mu = \frac{g}{2\pi} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi(x) , \quad (1.22)$$

où $\varepsilon^{\mu\nu}$ est un symbole de Levi-Civita. Contrairement à la plupart des cas que l'on rencontre en physique, ce courant n'est pas conservé à cause du théorème de Noether, mais plutôt parce que $\varepsilon^{\mu\nu}$ est antisymétrique alors que $\partial_\mu \partial_\nu$ est symétrique. Ce courant respecte $\partial_\mu J^\mu = 0$ et la quantité conservée qui lui est associée est

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \frac{g}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{g}{2\pi} [\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)] = \Delta n , \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.23)$$

Q correspond au nombre d'enroulement (en anglais «*winding number*») du modèle de sine-Gordon [34]. Il s'agit d'un invariant topologique. Nous discuterons davantage de la nature de Q dans la prochaine section en définissant les outils mathématiques nécessaires.

1.2.3 Notions mathématiques associées au modèle de sine-Gordon

Comme Skyrme l'a remarqué, l'expression de la contrainte topologique (1.14), soit

$$\phi_0^2 + \phi_1^2 = f^2 ,$$

définit un cercle. C'est de là que découlent plusieurs propriétés mathématiques intéressantes du modèle.

Comme on peut le voir graphiquement à la figure 1.1, la solution obtenue par Skyrme agit comme une application

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \tag{1.24}$$

qui prend la droite réelle et l'envoie vers un cercle. Dans ce cas-ci, pour le *kink*, on a que quand x tend vers $-\infty$, $\varphi = 0$, alors que quand x tend vers ∞ , $\varphi = 2\pi$. On a également, pour le *kink*, dans notre exemple, que $Q = 1$. On peut interpréter cela en se disant que la fonction $\varphi(x)$ prend l'axe des réels et le courbe en un tour de cercle.

En combinant des *kinks*, nous aurions pu obtenir d'autres valeurs entières pour Q . Autrement dit, il aurait été possible d'obtenir une courbe de la même forme que celle de la figure 1.1, mais dont la différence entre les valeurs à l'infini est n'importe quel facteur entier de 2π . Ainsi, Q , le nombre d'enroulement, correspond au nombre de tours de cercle sur lesquels la droite réelle est compactifiée, ce qu'on peut voir à la figure 1.2. Q définit ainsi des classes de solutions équivalentes.

Notions de topologie

En 1959 et en 1966, parurent deux articles de D. Finkelstein et C. W. Misner [19; 18] qui changèrent la manière d'approcher le modèle de Skyrme. Ils y introduisent une manière d'aborder les quantités conservées de Skyrme à partir des groupes d'homotopie. Dans cette section, nous étudierons cette approche afin de mieux comprendre l'introduction de la topologie dans le modèle de Skyrme en se basant sur le développement fait dans le deuxième chapitre du livre *The Skyrme Model* de Makhankov, Rybakov et Sanyuk [34].

Pour procéder, on commence par expliciter la manière dont on définira un champ classique.

Définition 1. [34] Une application lisse $\phi(x)$ qui va de l'espace-temps $X = \{\vec{x}, t\}$ vers la variété de champs (en anglais «*field manifold*») Φ comme

$$\phi : X \rightarrow \Phi , \tag{1.25}$$

est un **champ classique**.

Dans le cas du modèle de Skyrme général, on aura que X est l'espace-temps de Minkowski habituel et que $\Phi = \mathbb{S}^3$.

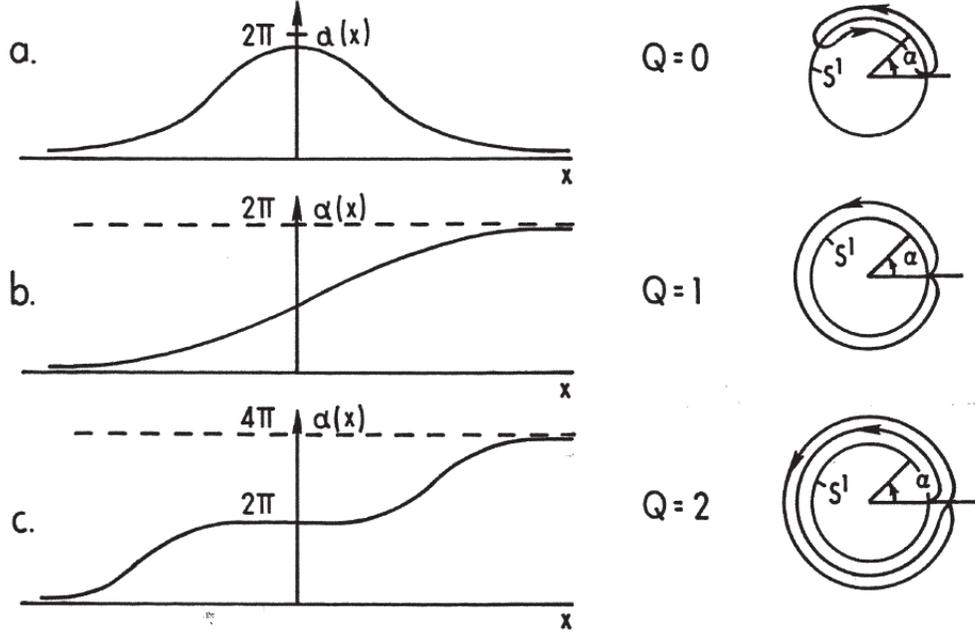


FIGURE 1.2 – Visualisations de différents nombres d’enroulements Q . $\alpha(x)$ correspond ici au $\varphi(x)$ que l’on a défini (figure tirée de [34], p.37).

On introduit ensuite les conditions limites

$$\phi(\vec{x}) \rightarrow \phi_0 \quad \text{lorsque} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

où ϕ_0 est un point donné de la variété de champs Φ , afin de s’assurer d’obtenir des solutions d’énergie finie. Cela a pour effet de restreindre l’espace des configurations à un sous-espace où toutes les solutions ont du sens physiquement. L’espace des configurations, que l’on peut comprendre comme l’ensemble des champs physiquement possibles, est défini de la façon suivante.

Définition 2. [34] L’espace des champs classiques (1.25) qui satisfont les conditions limites (1.26) est appelé **l’espace des configurations** de la théorie de champs. On le note $\text{Map}^0(X, \Phi)$.

Ainsi, pour des temps fixes t_1 et t_2 , on peut définir les champs

$$\phi_1(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}, t_1) \quad \text{et} \quad \phi_2(\vec{x}) \equiv \phi(\vec{x}, t_2). \quad (1.27)$$

Ils sont alors des applications $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \Phi$, puisque $\mathbb{R}^3 = X|_{t \text{ constant}}$. Il est possible de définir une homotopie entre ces deux champs. L’homotopie est définie de la façon suivante.

Définition 3. [34] Deux applications lisses $\phi_1(\vec{x})$ et $\phi_2(\vec{x})$ sont **homotopes**, ce que l’on note $\phi_1 \sim \phi_2$, s’il existe une fonction continue $\phi(\vec{x}, t)$, appelée **homotopie**, telle que

$$\phi(\vec{x}, t) = \begin{cases} \phi_1(\vec{x}), & \text{lorsque } t = t_1, \\ \phi_2(\vec{x}), & \text{lorsque } t = t_2. \end{cases} \quad (1.28)$$

On peut alors facilement montrer que cette homotopie est une relation d'équivalence, ce qui est défini de la façon suivante.

Définition 4. [39] Une **relation d'équivalence** \sim sur un ensemble X est une relation qui satisfait les conditions suivantes :

1. $a \sim a$ (réflexivité).
2. Si $a \sim b$, alors $b \sim a$ (symétrie).
3. Si $a \sim b$ et $b \sim c$, alors $a \sim c$ (transitivité).

pour tous a, b, c éléments de X .

La réflexivité découle naturellement de la définition 3. Pour ce qui est de la symétrie, si $\phi(\vec{x}, t)$ est une homotopie qui passe de $\phi(\vec{x}, t_1) = \phi_1(\vec{x})$ à $\phi(\vec{x}, t_2) = \phi_2(\vec{x})$, alors on peut définir $\phi(\vec{x}, t_1 + t_2 - t)$ qui effectue le chemin inverse, qui est également une homotopie. Finalement, pour la transitivité, il est nécessaire de définir un champ supplémentaire.

Soit, $\phi_1(\vec{x})$, $\phi_2(\vec{x})$ et $\phi_3(\vec{x})$ tels que $\phi_1 \sim \phi_2$ et $\phi_2 \sim \phi_3$. On peut alors définir des homotopies $\phi^{(1)}(\vec{x}, t)$ et $\phi^{(2)}(\vec{x}, t)$ telles que

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}(\vec{x}, 0) &= \phi_1(\vec{x}) \\ \phi^{(1)}(\vec{x}, 1) &= \phi_2(\vec{x}) = \phi^{(2)}(\vec{x}, 0) \\ \phi^{(2)}(\vec{x}, 1) &= \phi_3(\vec{x}) .\end{aligned}$$

Comme $\phi^{(1)}(\vec{x}, t)$ et $\phi^{(2)}(\vec{x}, t)$ sont des homotopies, et donc des fonctions continues, il est possible de les mettre bout à bout pour définir

$$\phi(\vec{x}, t) = \begin{cases} \phi^{(1)}(\vec{x}, 2t) , & \text{lorsque } 0 \leq t \leq 1/2 , \\ \phi^{(2)}(\vec{x}, 2t - 1) , & \text{lorsque } 1/2 \leq t \leq 1 , \end{cases}$$

où $\phi(\vec{x}, t)$ est également continue. Ainsi, on a défini une homotopie $\phi_1 \sim \phi_3$, ce qui démontre que l'homotopie est transitive et, par le fait même, que l'homotopie est bel et bien une relation d'équivalence.

Toute relation d'équivalence implique une partition de l'ensemble sur lequel elle est définie en classe d'équivalences disjointes [39]. Ces classes d'équivalence sont définies de la manière suivante.

Définition 5. [39] Soit un ensemble X sur lequel est défini la relation d'équivalence \sim . Pour $a \in X$, une **classe d'équivalence** $[a]$ est composée des éléments $x \in X$ tels que $x \sim a$,

$$[a] = \{x \in X \mid x \sim a\} . \tag{1.29}$$

$[a]$ n'est jamais vide, car on a nécessairement $a \sim a$. De plus, toutes les classes d'équivalence sont nécessairement disjointes à cause de la transitivité des relations d'équivalence.

Application des notions topologiques au modèle de sine-Gordon

Ayant fait le développement mathématique nécessaire, il est maintenant temps de l'appliquer au modèle de sine-Gordon. Ainsi, les champs classiques $\phi_0(x, t)$ et $\phi_1(x, t)$ du modèle sont définis, pour tout temps fixe, comme

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \text{tel que } \phi(x) = \exp[i\varphi(x)], \quad (1.30)$$

où $\varphi(x)$ est la solution (1.21), ce qui correspond à la représentation exponentielle du champ $\phi = \phi_0 + i\phi_1$.

Comme précédemment, pour avoir des solutions physiques, d'énergie finie, on doit imposer des conditions limites. Dans ce cas-ci, ce sera

$$\varphi(x) \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad \text{lorsque } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.31)$$

Par ces conditions, on permet une compactification de l'axe réel sur le cercle \mathbb{S}^1 . On peut expliciter cela par l'introduction des coordonnées stéréographiques (ξ_0, ξ) sur \mathbb{S}^1 , soit

$$\xi_0 = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{2x}{1 + r^2}, \quad \text{où } r = |x|. \quad (1.32)$$

En utilisant ces coordonnées, on a une équivalence entre l'axe réel et le cercle. On peut alors redéfinir les champs ϕ_0 et ϕ_1 pour qu'ils agissent plutôt comme

$$\phi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \quad \text{tel que } \phi[\xi(x)] = \exp\{i\varphi[\xi(x)]\}. \quad (1.33)$$

Les conditions limites sont alors

$$\varphi(2\pi) = \varphi(0) + 2\pi n, \quad (1.34)$$

où n est le degré de l'application φ , aussi degré d'homotopie, et donne le nombre de tours de cercle effectués par la solution, ce qui correspond au nombre d'enroulement Q obtenu à l'équation (1.23). Les applications qui ont le même degré d'homotopie sont homotopes entre elles. Ainsi, cette quantité définit des classes d'équivalence entre les solutions.

Maintenant que nous avons discuté des origines mathématiques des quantités conservées du modèle de sine-Gordon, et donc du modèle de Skyrme, il est temps de passer à une interprétation plus physique de ces résultats.

1.2.4 Solitons topologiques et non topologiques

Certaines équations différentielles, comme celle de sine-Gordon, donnent des solutions ayant la forme de solitons, ou d'ondes solitaires. Ce sont des solutions stables, non dissipatives et d'énergie finie qui satisfont une relation de dispersion et qui ne se soumettent pas au principe de superposition standard [16].

Les solitons peuvent être séparés en deux types, les solitons topologiques et non topologiques. On les différencie par leurs comportements aux frontières, soit [16]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0, \quad (1.35)$$

pour les solitons non topologiques et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.36)$$

pour les solitons topologiques. Dans le cas présent, on s'intéresse, bien sûr, particulièrement aux solitons topologiques.

Dans le cas du modèle de Skyrme, on souhaite associer le nombre d'enroulement Q défini précédemment avec le nombre baryonique, soit la somme du nombre de protons et de neutrons dans un noyau atomique. La stabilité de la représentation sous forme de solitons est donc particulièrement intéressante considérant que l'on veut représenter des particules qui sont également très stables. Nous discuterons davantage de la forme des solutions solitoniques à la fin de la prochaine section.

1.3 Généralisation en (3+1) dimensions

Maintenant que nous avons bien développé le modèle de sine-Gordon, par lequel nous avons introduit plusieurs outils importants, nous pouvons nous lancer dans l'étude du modèle de Skyrme en (3 + 1) dimensions. Cela n'est pas direct, car il existe un théorème par G. H. Derrick [17] qui spécifie qu'il est impossible d'obtenir des solutions indépendantes du temps, stables et d'énergie finie pour une équation différentielle de la forme de celle du modèle de Skyrme en (3 + 1) dimensions. C'est pour cette raison que Skyrme introduit alors dans son modèle un terme stabilisateur supplémentaire.

Dans cette section, nous ferons le développement du modèle de Skyrme général à partir du modèle σ non linéaire en lui ajoutant le terme stabilisateur de Skyrme. Ayant déjà étudié le modèle de sine-Gordon, nous devrions reconnaître plusieurs éléments rencontrés précédemment. Nous nous pencherons ensuite brièvement sur une solution analytique relativement simple du modèle de Skyrme, soit la solution hérisson.

1.3.1 Le modèle σ non linéaire

En (3 + 1) dimensions, il faut modifier légèrement la forme utilisée lors du développement du modèle de sine-Gordon. En fait, il ne peut contenir que des termes quadratiques en fonction du quadrivecteur $\phi_\nu = (\sigma, \vec{\pi})$ ou de sa dérivée [22]. Ce faisant, on part avec la densité lagrangienne

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_\nu)^2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma), \quad (1.37)$$

où $\vec{\pi} = (\pi_+, \pi_0, \pi_-)$ est le vecteur rassemblant le champ des trois types de pions et σ est un champ non physique comme celui introduit pour la contrainte topologique du modèle de sine-Gordon à l'équation (1.14). Comme précédemment, on doit inclure une contrainte topologique au modèle, qui sera, dans ce cas-ci,

$$\sigma^2 + \pi_i \pi^i = f^2, \quad (1.38)$$

où f est une constante.

Vu la forme de la contrainte (1.38), on peut la réexprimer comme un opérateur unitaire U qui s'écrit

$$U = \frac{1}{f}(\mathbb{1}_{2 \times 2} \sigma + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) = \exp(i\vec{\tau} \cdot \vec{\varphi}), \quad (1.39)$$

où $\mathbb{1}_{2 \times 2}$ est la matrice identité de dimension 2×2 , où $\vec{\tau}$ est un vecteur contenant les trois matrices de Pauli et où le nouveau champ $\vec{\varphi}$ est le seul champ indépendant. La dernière égalité existe dans le contexte de la limite de champ faible $|\vec{\varphi}| \rightarrow 0$, soit lorsque $\sigma \sim f$, $\pi_i \sim f\varphi_i$.

À partir de cet opérateur unitaire, il est possible de réécrire le lagrangien comme

$$\mathcal{L}_{\sigma \text{ non linéaire}} = \frac{f^2}{4} \text{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger). \quad (1.40)$$

Il s'agit du lagrangien du modèle σ non linéaire.

Afin d'obtenir des solutions stables et un lagrangien invariant sous transformation chirale, Skyrme lui ajoute un terme. Le lagrangien devient alors

$$\mathcal{L}_{\text{Skyrme}} = \frac{f^2}{4} \text{tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32g^2} \text{tr}([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2). \quad (1.41)$$

On introduit alors les courants chiraux gauche et droit, soit

$$L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U \quad \text{et} \quad R_\mu = U \partial_\mu U^\dagger, \quad (1.42)$$

en fonction desquels on peut réécrire le lagrangien comme

$$\mathcal{L}_{\text{Skyrme}} = \frac{f^2}{4} \text{tr}(L_\mu L^\mu) + \frac{1}{32g^2} \text{tr}([L_\mu, L_\nu]^2). \quad (1.43)$$

Nous choisissons ici d'exprimer le lagrangien en fonction de L_μ mais, comme il est invariant sous transformation chirale, ce choix est arbitraire. Nous aurions tout aussi bien pu choisir R_μ .

On peut remarquer que le lagrangien contient alors un terme d'ordre deux en dérivée et un terme d'ordre quatre en dérivée, soit en L_μ . Il est nécessaire que les termes présents soient tous d'ordre pair par rapport à L_μ , afin que le lagrangien reste un scalaire. Toutefois, il n'est pas nécessaire de se contenter de ces deux termes uniquement. Plusieurs modifications récentes

du modèle de Skyrme incluent d'ailleurs des termes d'ordre supérieur afin d'en améliorer la précision. Il ne s'agit là que du modèle original de Skyrme. Nous discuterons de ces modèles à la fin de ce chapitre.

Comme pour sine-Gordon, il est alors possible de définir un courant conservé, soit

$$\mathcal{B}^\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr}(L_\nu L_\rho L_\sigma) , \quad (1.44)$$

auquel on peut associer la quantité conservée

$$B = \int \mathcal{B}^0 d^3x = \frac{-1}{24\pi^2} \varepsilon^{ijk} \int \text{tr}(L_i L_j L_k) d^3x . \quad (1.45)$$

C'est cette charge conservée que Skyrme associe à la charge baryonique, la charge baryonique étant le nombre de protons et de neutrons dans le noyau d'un atome. Le courant associé devient alors le courant baryonique.

Cette hypothèse ainsi que, plus généralement, la découverte de la charge topologique comme une quantité physique conservée sont parmi les contributions les plus importantes de Skyrme. Une autre de ses contributions importantes est la découverte de la solution hérisson, détaillée dans l'article *A unified field theory of mesons and baryons* de 1962 [46], dont nous discuterons à la prochaine section.

1.3.2 La solution hérisson

À partir du lagrangien (1.43), il est possible de trouver une solution analytique relativement simple, soit la solution hérisson. Pour ce faire, on doit définir une paramétrisation pour le champ U telle que $\vec{\varphi} = F(r)\hat{r}$, soit

$$U(\vec{r}) = e^{iF(\vec{r})(\vec{\tau}\cdot\hat{r})} = \mathbb{1}_{2\times 2} \cos(F(r)) + i(\vec{\tau}\cdot\hat{r}) \sin(F(r)) , \quad (1.46)$$

où $F(r)$ est l'angle chiral, soit l'angle entre $\vec{\pi}$ et σ . Ici, \hat{r} est le vecteur unitaire radial

$$\hat{r} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) , \quad (1.47)$$

ce qui permet d'écrire $\vec{r} = r\hat{r}$ avec $r = |\vec{r}|$. Ainsi, on ne conserve qu'une direction radiale pour le champ φ . Les composantes du champ, $\vec{\pi}$ et σ , sont alors données par

$$\sigma = \cos(F(r)) \quad \text{et} \quad \vec{\pi} = \hat{r} \sin(F(r)) . \quad (1.48)$$

La représentation graphique de cette solution, dont on trouve une version artistique à la figure 1.3, montre bien d'où elle tire son nom.

Cette solution simple trouvée par Skyrme est intéressante, car elle permet de s'imaginer facilement à quoi pourrait ressembler un skyrmion. Il est également intéressant de noter qu'elle correspond à la solution d'énergie minimale pour le skyrmion représentant un baryon [1]. Toutefois, elle ne représente que le skyrmion avec $B = \pm 1$ [46], ce qui n'est pas très utile en pratique. Pour trouver des solutions plus générales au modèle de Skyrme, il faut se tourner vers des méthodes numériques.

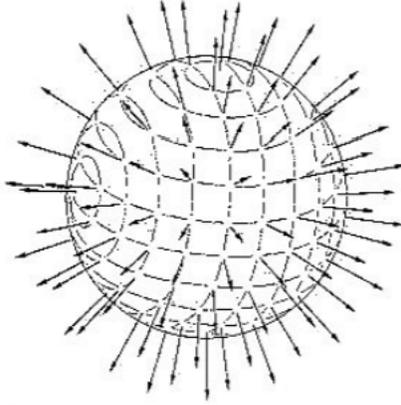


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de la solution hérisson du modèle de Skyrme en (3+1) dimensions (figure tirée de [28]).

1.4 Quantification des skyrmions

Dans l'espoir de faire le lien entre les skyrmions et les baryons théoriquement, il est nécessaire de leur trouver une réalisation quantique. Cela n'est pas simple compte tenu de leur nature. En effet, comme il s'agit d'objets étendus décrits par une théorie de champs classiques non renormalisable, il n'est pas possible d'utiliser les techniques habituelles de quantification [22].

Les premiers à tenter cette quantification des skyrmions sont Adkins, Nappi et Witten en 1983 [3]. Sachant que dans la limite de grand N_C la chromodynamique quantique (QCD) peut être ramenée à une théorie efficace de champs de mésons, ils cherchent à quantifier le modèle de Skyrme afin de faire le pont entre ces deux théories.

Leur méthode sera remplacée plus tard par la quantification des coordonnées collectives. Cette technique est plus générale, car elle permet de quantifier les skyrmions dans une configuration arbitraire. Elle est basée sur les travaux [12; 29; 36].

La méthode de la quantification des coordonnées collectives commence par donner une dépendance temporelle au champ statique $U(\vec{r})$ obtenu pour la solution hérisson à la section précédente. Ainsi,

$$U(\vec{r}) \rightarrow U(\vec{r}, t) = A(t)B(t)U(\vec{r})B^\dagger(t)A^\dagger(t), \quad (1.49)$$

où $A(t)$ et $B(t)$ sont, respectivement, les matrices de rotation de l'espace d'isospin et de spin. Elles appartiennent au groupe $SU(2)$. Ce sont ces matrices qui deviennent les coordonnées collectives en étant exprimées comme

$$A(t) = e^{-iI_k a_k t} \quad \text{et} \quad B(t) = e^{-iJ_k b_k t}, \quad (1.50)$$

où I_k et J_k sont, respectivement, les générateurs du groupe d'isospin et de spin et a_k et b_k sont, respectivement, les vitesses de rotation dans l'espace d'isospin et dans l'espace de spin.

Les générateurs I_k et J_k agissent sur le champ U comme

$$I_k U = \frac{1}{2} \tau_k U \quad \text{et} \quad J_k U = -i \varepsilon_{ijk} r_i \partial_j U . \quad (1.51)$$

En dehors du repère d'impulsion nulle, il est possible de choisir des considérations initiales différentes pour générer les modes de vibration et de translation du skyrmion.

Cette technique et celles qui en découlent permettent de calculer les énergies de rotation et les moments d'inertie des skyrmions. Or, elle est incapable de prédire les configurations d'énergie minimales observées expérimentalement pour les systèmes de plusieurs skyrmions.

1.5 Les modèles de Skyrme BPS et quasi-BPS

Le modèle de Skyrme à deux termes présenté plus tôt possède quelques lacunes majeures quand on compare ses prédictions aux données expérimentales. Il rencontre principalement deux problèmes, soit qu'il prédit des énergies de liaison trop élevées pour les noyaux et qu'il leur donne une structure cristalline qui n'est pas celle observée expérimentalement.

Pour remédier à cela, une version efficace du modèle de Skyrme fut développée. Il s'agit du modèle de Skyrme BPS développé par Adam, Sánchez-Guillén et Wereszczynski [2]. Le lagrangien du modèle de Skyrme BPS est

$$\mathcal{L}_{\text{BPS}} = -\mu^2 V(U) - \pi^4 \lambda^2 \mathcal{B}_\mu \mathcal{B}^\mu . \quad (1.52)$$

Il possède deux termes, soit le potentiel de Skyrme et un terme d'ordre six en dérivée correspondant à la charge baryonique au carré. Le second terme, appelé le terme de Jackson, fut développé pour la première fois dans [30] pour inclure la contribution du méson ω .

Le modèle de Skyrme BPS ne peut pas représenter des particules physiques car il lui manque le terme σ non linéaire du modèle de Skyrme original et il ne donne pas d'énergie de liaison aux skyrmions. Ainsi, Bonenfant et Marleau [11] ont développé le modèle de Skyrme quasi-BPS. Ce modèle comprend les termes du modèle de Skyrme original en plus de ceux du modèle de Skyrme BPS. Des constantes devant les termes du modèle original permettent de les garder suffisamment petits pour les considérer comme des petites perturbations autour du modèle BPS, ce qui permet d'obtenir des énergies de liaison plus réalistes. Le lagrangien de ce modèle est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quasi-BPS}} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 \\ &= -\mu^2 V(U) - \alpha \text{tr} \left(L_\mu L^\mu \right) + \beta \text{tr} \left([L_\mu, L_\nu]^2 \right) - \frac{3\lambda^2}{32} \text{tr} \left([L_\mu, L_\nu] [L^\nu, L^\rho] [L_\rho, L^\mu] \right) . \end{aligned} \quad (1.53)$$

Pour la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons au modèle de Skyrme quasi-BPS, mais en lui ajoutant davantage de mésons massifs. Ce faisant, nous retrouverons un lagrangien avec

des termes d'ordre supérieur en dérivée par rapport au lagrangien (1.53). Dans le troisième chapitre, nous nous intéresserons aux travaux de Bartolini et al. [8] où le terme d'ordre six en dérivée est généré à partir d'une version holographique du modèle de Skyrme. Nous utiliserons leur approche afin de générer des termes d'ordre supérieur à six en dérivée.

Afin de comprendre cette version holographique du modèle de Skyrme, nous nous pencherons, dans le prochain chapitre, sur le modèle de Sakai-Sugimoto, qui en est à l'origine. Pour ce faire, nous discuterons tout d'abord de la chromodynamique quantique (QCD) et de la théorie des cordes pour acquérir les outils nécessaires.

Chapitre 2

Introduction au modèle de Sakai-Sugimoto

Le modèle de Sakai-Sugimoto est une extension holographique de la chromodynamique quantique. Nous l'utiliserons au chapitre 3 pour générer des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Comme il s'agit d'une théorie holographique, nous aurons tout d'abord besoin de comprendre les deux parties qui la composent, soit la théorie des cordes d'un côté et la chromodynamique quantique de l'autre. Nous commencerons par cette dernière.

Après la découverte de la brisure de parité, il fut nécessaire que les nouveaux modèles en physique des particules prennent en compte la symétrie chirale. Ce faisant, on retrouve deux types de modèles, des modèles efficaces possédant un lagrangien invariant chiral, comme le modèle de Skyrme, et des modèles comme la chromodynamique quantique (QCD), qui se différencient par leurs groupes de symétrie [1]. Le succès de la QCD, incluant entre autres la mise en évidence expérimentale des quarks, en a fait le modèle le plus connu, et ce, même s'il s'agit d'un modèle très complexe.

Dans ce chapitre, nous discuterons de la QCD et de la théorie des cordes en dérivant pour chacune un développement en série. Les similitudes entre ces deux développements en série ont mené à des travaux qui seront d'intérêt pour le présent mémoire. En effet, elles menèrent à la correspondance AdS/CFT de Maldacena, qui fut un précurseur du modèle de Sakai-Sugimoto. Suivant l'approche de Maldacena, nous discuterons également, sans trop nous y attarder, des D-branes afin de nous faire une idée de la géométrie des modèles holographiques. Les D-branes sont les surfaces où peuvent se terminer les cordes ouvertes. Nous finirons avec une présentation du modèle de Sakai-Sugimoto.

2.1 La chromodynamique quantique (QCD)

Gell-Mann et Zweig, en 1964, proposèrent indépendamment l'hypothèse des quarks dans le but d'expliquer les symétries des interactions fortes. En effet, devant la quantité grandissante de particules élémentaires à l'époque, ils trouvèrent qu'il était naturel de considérer la possibilité que certaines d'entre elles soient en fait des objets composites [55].

Le premier à publier un article à cet égard fut Gell-Mann en 1961. Il réussit à regrouper les hadrons en deux groupes plutôt qu'en un tableau périodique avec sa théorie basée sur une symétrie $SU(3)$, appelée la *eightfold way* [21]. Cette théorie lui valut d'ailleurs le prix Nobel de 1969. Il en découle que les protons et les neutrons seraient composés de trois quarks chacun.

L'article de Zweig où il exprime sa version de la théorie des quarks, qu'il appelle alors plutôt des *aces*, est *An $SU(3)$ Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking* [54]. Il y exprime l'idée que les mésons et les baryons ne seraient pas des particules élémentaires, mais seraient plutôt constitués d'*aces*.

Tous deux ont ainsi décrit des particules élémentaires ayant une charge électrique équivalente à $1/3$ fois la charge de l'électron ou $2/3$ fois la charge du proton. C'est cette découverte qui permit aux physiciens expérimentaux de commencer à tenter d'observer concrètement les quarks. Les quarks furent mis en évidence expérimentalement pour la première fois grâce à des expériences de diffusion en 1968 [13; 10], ce qui marqua le début de l'énorme succès de la QCD [41].

2.1.1 Survol de la QCD

Comme nous l'avons dit plus tôt, en chromodynamique quantique, les particules élémentaires sont les quarks, qui se présentent sous un modèle respectant une symétrie $SU(3)$. Au moment de la création du modèle, on parlait davantage de la symétrie des saveurs des quarks, que l'on note $SU(3)_f$. Le modèle possédait alors 3 saveurs, soit les quarks *up*, *down* et *strange*. Aujourd'hui, le modèle comprend aussi les quarks *charm* (découvert en 1974) [5; 6], *bottom* (découvert en 1977) [27] et *top* (découvert en 1995) [14; 15].

Les quarks sont des fermions de spin $1/2$ qui possèdent une charge faible et une charge électrique. Ils forment des doublets de masse similaires et de charge faible contraire se différenciant par leur charge électrique. On peut voir cela dans le tableau 2.1.

Aujourd'hui, la théorie des quarks demande également qu'ils respectent la symétrie $SU(3)_c$ des couleurs. Historiquement, c'est après la première observation du baryon Ω^- [7] qu'il devint nécessaire d'inclure la nouvelle symétrie des couleurs afin que le principe d'exclusion de Pauli soit respecté.

Les quarks peuvent se présenter sous trois couleurs, soit rouge, vert et bleu, et changent de couleurs via l'échange de gluons. Il existe huit gluons qui peuvent être associés aux huit géné-

Quark	Masse (MeV)	Charge faible	Charge électrique
<i>up</i>	2.3	1/2	2/3
<i>down</i>	4.8	-1/2	-1/3
<i>strange</i>	95	-1/2	-1/3
<i>charm</i>	1275	1/2	2/3
<i>bottom</i>	4180	-1/2	-1/3
<i>top</i>	173 210	1/2	2/3

TABLE 2.1 – Charges faibles, charges électriques et masses des différents quarks [40]

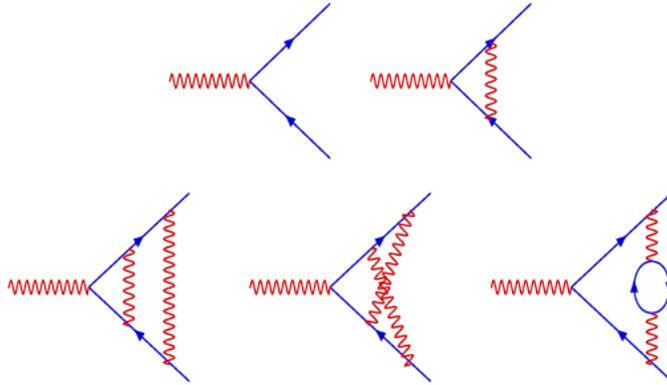


FIGURE 2.1 – Diagrammes de Feynman des interactions les plus simples en QED (figure tirée de [38]).

rateurs du groupe de symétrie. C'est la présence des gluons qui fait de la QCD une théorie non perturbative, et donc difficile à étudier analytiquement comparativement à l'électrodynamique quantique (QED).

Il est possible de faire plusieurs parallèles entre les interactions fortes de la QCD et les interactions électromagnétiques de la QED, mais il existe des différences majeures entre les deux. Les gluons, contrairement aux photons, peuvent interagir entre eux, car ils possèdent une charge colorée. Ce faisant, ils possèdent une symétrie non abélienne. De plus, la constante de couplage des quarks augmente alors que l'énergie diminue. Cela augmente grandement le nombre d'interactions possibles dans le modèle et cause des phénomènes particuliers comme le confinement et la liberté asymptotique des quarks.

Lorsque l'on développe les interactions possibles incluant des gluons à l'aide de diagrammes de Feynman (voir les figures 2.1 et 2.2), on n'obtient pas directement un développement en série comme pour les interactions électromagnétiques à cause de leur constante de couplage, soit à cause de l'effet anti-écran des interactions entre les gluons. Cet effet cause une augmentation de la force des interactions avec l'ajout de gluons. Alors, contrairement au cas de la QED, les diagrammes de Feynman ne seront pas de plus en plus négligeables avec l'ajout d'interactions. La QCD est donc une théorie en régime non perturbatif.

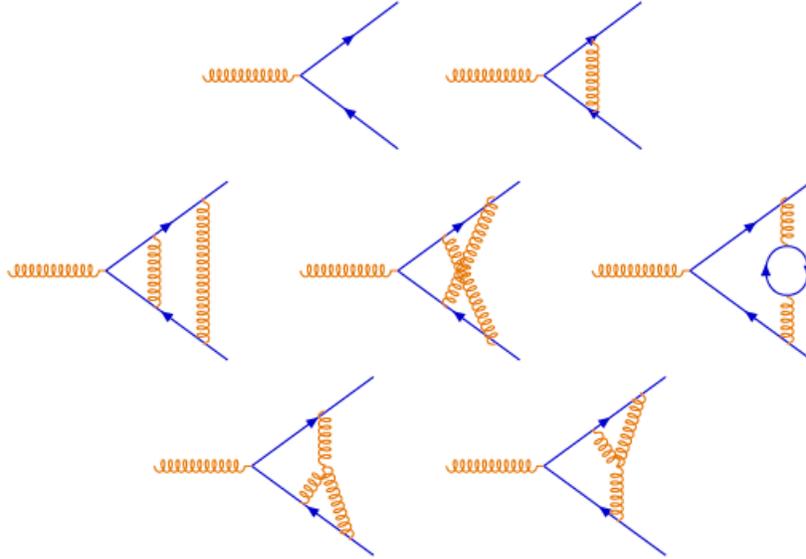


FIGURE 2.2 – Diagrammes de Feynman des interactions les plus simples en QCD (figure tirée de [38]). On remarque que les gluons peuvent interagir entre eux, contrairement aux photons en QED.

Le confinement est une caractéristique très importante du comportement des quarks. Il décrit le fait qu'il est impossible d'observer des quarks et des gluons seuls. De façon plus générale, aucun état possédant une charge colorée ne peut être observé dans la nature.

Bien qu'il n'existe pas de preuve formelle au confinement, il est possible de lui trouver une interprétation physique. Comme en QED, les quarks subissent des fluctuations quantiques, ce qui signifie qu'il y a création et annihilation de paires quark-antiquark. Cela contribue à un effet écran sur la charge du quark initial. Or, en QCD, les interactions gluon-gluon produisent un effet anti-écran qui est plus important que cet effet écran [38]. Globalement, l'attraction entre les quarks devient si grande que ceux-ci se retrouvent confinés dans des états liés, que l'on appelle les hadrons.

Une autre caractéristique intéressante des quarks est la liberté asymptotique. Celle-ci signifie qu'à très haute énergie, ou encore à très courte distance, les quarks sont pratiquement libres. On estime que cette distance serait de l'ordre de 0.1 fm, un proton étant de l'ordre d'un femtomètre. Dans cette limite, c'est le diagramme de Feynman le plus simple qui domine, soit celui où un seul gluon est échangé. Il est alors possible de déterminer un potentiel à l'interaction forte de façon similaire au cas de la QED.

2.1.2 Développement en $1/N_C$ de 't Hooft

Bien que cela sera plus difficile qu'en électrodynamique quantique, on veut trouver un développement en série pour la chromodynamique quantique. 't Hooft [50] a réussi cela en passant

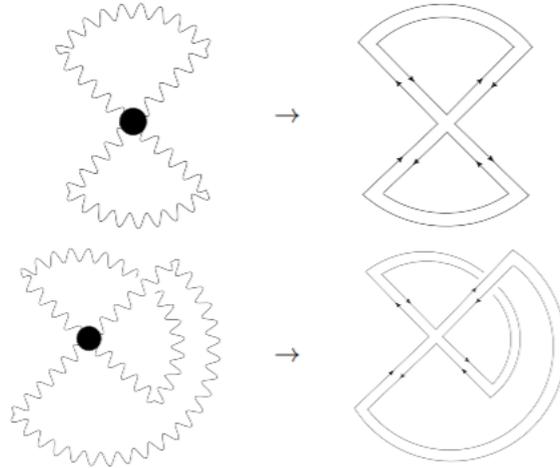


FIGURE 2.3 – Diagramme des interactions les plus simples entre des gluons (figure tirée de [32]).

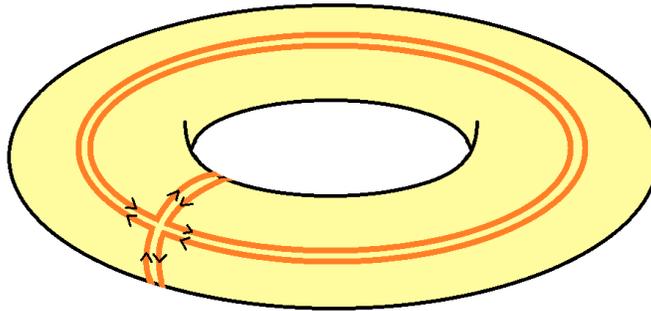


FIGURE 2.4 – Second diagramme de la figure 2.3 illustré sur une surface de genre 1.

par les propriétés topologiques des diagrammes de Feynman de la QCD. Pour comprendre le développement de 't Hooft, il faut tout d'abord se concentrer sur la géométrie des diagrammes du vide des gluons.

Les diagrammes les plus simples (en anglais «*of lower order*») que l'on peut dessiner sont ceux que l'on retrouve à la figure 2.3. On remarque que le diagramme du haut est planaire, mais pas celui du bas. Cela signifie que le diagramme du haut peut être dessiné sur une feuille de papier sans qu'il y ait de croisements entre les lignes, contrairement à celui du bas.

Il est possible de représenter le diagramme du bas sans croisement seulement si on le dessine sur une surface différente, soit une surface de genre (en anglais «*genus*») 1 ou plus, comme c'est fait à la figure 2.4. Le genre correspond au nombre de trous présents dans la surface. Ainsi, une sphère est de genre 0, alors qu'un tore est de genre 1.

Il est toujours possible de trouver une surface de genre h sur laquelle on peut dessiner un diagramme de Feynman sans croisement de façon à ce que h soit minimal [32].

À l'aide des règles de Feynman [42], il est possible de déterminer le degré des facteurs g et N_C dans les termes engendrés par les diagrammes de la figure 2.3, g étant la constante de couplage et N_C étant le nombre de couleurs. Ainsi, on obtient un facteur de $N_C^3 g^2$ pour le diagramme du haut et de $N_C g^2$ pour celui du bas. En étudiant davantage de diagrammes, il est possible d'émettre une règle générale pour ces facteurs. Cette règle est

$$A \sim (g^2)^E (g^2)^{-V} N_C^F, \quad (2.1)$$

où E est le nombre d'arêtes, V est le nombre de sommets et F est le nombre de faces du diagramme une fois dessiné sur une surface de genre minimal h .

C'est après avoir obtenu ce résultat que 't Hooft propose de prendre la limite $N_C \rightarrow \infty$ et $g^2 \rightarrow 0$ en gardant $g^2 N_C = \lambda$ fixe [50]. Cette limite permet de réécrire l'équation (2.1) comme

$$A \sim (g^2 N_C)^{E-V} N_C^{F+V-E} = \lambda^{L-1} N_C^\chi = \lambda^{L-1} N_C^{2-2h}, \quad (2.2)$$

où L est le nombre de boucles (en anglais «*loops*») dans le diagramme, χ est sa caractéristique d'Euler et h est le genre de la surface sur laquelle le diagramme est dessiné. Pour obtenir cette équation, on a utilisé le théorème géométrique qui donne $\chi = F + V - E = 2 - 2h$ [39].

Dans la limite de 't Hooft, les diagrammes planaires sont dominants. On peut exprimer la somme sur les diagrammes planaires comme

$$N_C^2 (c_0 + c_1 \lambda + c_2 \lambda^2 + \dots) = N_C^2 f_0(\lambda). \quad (2.3)$$

Il s'agit, tout simplement, d'une série de puissance en λ , qui est la constante de 't Hooft.

Lorsque l'on se concentre plutôt sur la somme totale de tous les diagrammes, on obtient la fonction de partition

$$\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(\lambda) = N_C^2 f_0(\lambda) + f_1(\lambda) + \frac{1}{N_C^2} f_2(\lambda) + \dots. \quad (2.4)$$

Les termes correspondent alors respectivement aux diagrammes planaires, aux diagrammes de genre 1, aux diagrammes de genre 2, etc. On peut donc dire que, dans la limite de 't Hooft, le développement en série de la QCD revient à un développement topologique des diagrammes de Feynman.

Si on considère la diffusion de n particules, on obtient [32]

$$\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N_C^{2-n-2h} f_n^{(h)}(\lambda) = N_C^{2-n} f_n^{(0)}(\lambda) + N_C^{-n} f_n^{(1)}(\lambda) + N_C^{-n-2} f_n^{(2)}(\lambda) + \dots. \quad (2.5)$$

Comme nous nous intéressons à tenter de comprendre la correspondance AdS/CFT et qu'il s'agit d'une théorie holographique, il est nécessaire de discuter des deux côtés de l'holographie.

Le premier côté part de la chromodynamique quantique, que nous venons tout juste d'aborder. Nous sommes maintenant prêt à nous lancer dans l'étude du deuxième côté de l'holographie, ce que nous ferons à partir de la théorie des cordes.

2.2 La théorie des cordes

La théorie des cordes s'est développée dans les années 60 dans le but de décrire les interactions fortes. Toutefois, elle ne réussit pas à accomplir cet objectif, étant remplacée par la chromodynamique quantique (QCD). Elle a tout de même été étudiée par plusieurs physiciens qui voyait un potentiel d'unification de toutes les forces physiques.

En effet, il y a plusieurs éléments qui en font une bonne candidate pour une théorie unificatrice des forces physiques. Un des obstacles rencontrés par plusieurs théories tentant l'unification est l'inclusion de la gravité. Les tentatives de relier la gravité au modèle standard ont toujours échouées. L'avantage de la théorie des cordes est que la gravité y est naturellement incluse. Autrement dit, on y retrouve une particule de spin 2 que l'on peut associer au graviton, ce qui est impossible dans les autres modèles.

Dans cette section, nous discuterons brièvement de la théorie des cordes dans le but de lui trouver un développement en série et de mettre en lumière les similitudes entre celui-ci et celui obtenu pour la chromodynamique quantique à la section précédente. Nous suivrons le développement présenté dans le cours *String Theory and Holographic Duality* du professeur Hong Liu du MIT [32].

2.2.1 Survol de la théorie des cordes

Les cordes sont des objets étendus dans l'espace, soit qui ne sont pas ponctuels. Elles peuvent être ouvertes ou fermées selon que leurs extrémités sont distinctes ou non. Les modes de vibration possibles sur les cordes définissent le spectre des particules possibles. Sur les cordes fermées, il est possible de définir des modes d'oscillation droit et gauche, selon le sens des vibrations sur la corde. Cela définira la chiralité de la particule résultante [38].

Comme pour les particules, on peut définir des interactions entre les cordes. Il est possible pour deux cordes de se combiner pour former une nouvelle corde ou encore pour une seule corde de se scinder en deux nouvelles cordes. Ainsi, toutes les interactions possibles entre deux cordes fermées sont formées des deux interactions de base représentées à la figure 2.5 [32].

Pour réussir à trouver un développement en série pour la théorie des cordes, comme on l'a fait pour la QCD, on aura besoin des mathématiques de base du modèle. Pour ce faire, on considère une corde se déplaçant dans l'espace-temps \mathcal{M} avec la métrique

$$ds^2 = G_{\mu\nu}(X) dX^\mu dX^\nu .$$

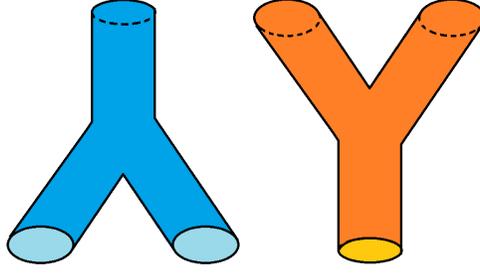


FIGURE 2.5 – Vertex d'interaction de base entre deux cordes fermées.

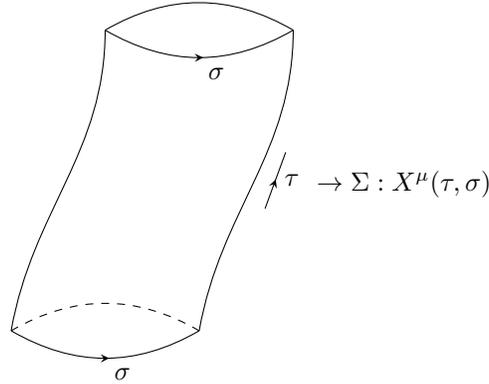


FIGURE 2.6 – Paramétrisation de la trajectoire d'une corde (figure reproduite à partir de [32]).

On choisit la paramétrisation $X^\mu(\sigma, \tau) = X^\mu(\sigma^a)$, où $a = (0, 1)$, représentée à la figure 2.6. Ainsi, on peut définir la métrique induite sur le feuillet d'univers, soit

$$ds_{\text{induit}}^2 = h_{ab}(\sigma, \tau) d\sigma^a d\sigma^b \quad \text{avec} \quad h_{ab} = G_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu ,$$

qui est la métrique exprimée dans le système de coordonnées correspondant à la paramétrisation choisie.

L'action de la corde est alors donnée par l'action de Nambu-Goto,

$$S_{NG}(X^\mu) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} dA = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-h} .$$

Malheureusement, le choix de cette action rend les calculs difficiles, car elle n'a pas une forme polynomiale. Pour cette raison, on préfère plutôt l'action de Polyakov,

$$S_P(\gamma^{ab}, X^\mu) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu} ,$$

où $\gamma^{ab} = B(\sigma, \tau) h^{ab}$ est la métrique intrinsèque du feuillet d'univers, $B(\sigma, \tau)$ étant arbitraire. Dans un régime classique, l'action de Polyakov revient à l'action de Nambu-Goto.

Pour quantifier les cordes, on passe par la quantification canonique. Pour ce faire, on doit d'abord écrire les équations de mouvements classiques. Vu la périodicité des cordes ouvertes

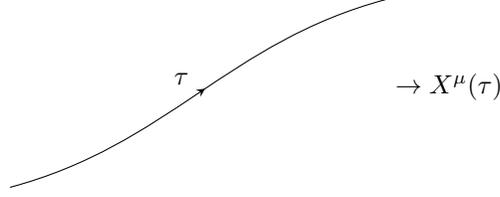


FIGURE 2.7 – Ligne d’univers d’une particule se déplaçant dans l’espace (figure reproduite à partir de [32]).

et fermées, il est possible d’imposer deux types de conditions frontières, soit les conditions de Dirichlet et celles de Neumann. On choisit, pour l’instant, les conditions de Neumann, ce qui nous donne l’équation du tenseur énergie-impulsion

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} \gamma_{ab} \gamma^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X^\nu = 0 \quad (2.6)$$

pour γ^{ab} et l’équation

$$\partial_a (\sqrt{-\gamma} \gamma^{ab} \partial_b X^\mu) = 0 \quad (2.7)$$

pour X^μ .

Il faut ensuite choisir une jauge. Il est possible, à cause des difféomorphismes, de choisir un espace où la métrique est plate de façon conforme (en anglais «*conformally flat*»). On a alors $\gamma_{ab} = e^{2\omega(\sigma, \tau)} \eta_{ab}$, qui peut être fixé à $\gamma_{ab} = \eta_{ab}$ par la symétrie de Weyl (en anglais «*Weyl rescaling*»), où η_{ab} est la métrique de Minkowski. Il ne reste alors que la jauge associée à la symétrie conforme.

2.2.2 Développement en série de la théorie des cordes

Lorsque l’on décrit le mouvement d’une particule, il est possible de paramétrer son parcours tel que sa position devienne une fonction $X^\mu(\tau)$ d’un paramètre τ choisi. On représente cela, graphiquement, par une ligne d’univers comme à la figure 2.7.

On a alors la fonction de partition

$$Z = \int DX^\mu(\tau) e^{iS_{\text{particule}}}, \quad (2.8)$$

où

$$S_{\text{particule}} = m \int d\ell = m \int d\tau \frac{d\ell}{d\tau} = m \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau}}. \quad (2.9)$$

En théorie des cordes, il est possible de paramétrer la trajectoire d’une corde d’une façon semblable. Puisque la corde a une dimension non nulle, son mouvement sera décrit sur un feuillet d’univers plutôt qu’une ligne. La paramétrisation aura donc la forme présentée à la figure 2.6.

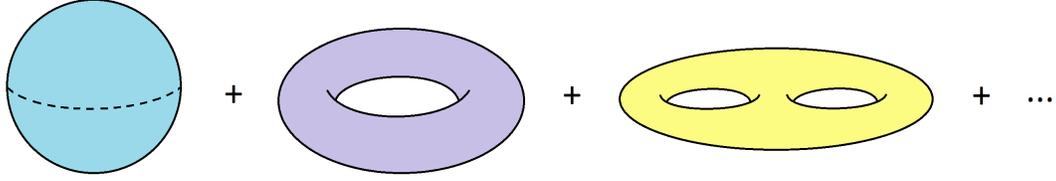


FIGURE 2.8 – Diagrammes du vide d'une corde fermée.

On a alors

$$Z = \int DX^\mu(\tau, \sigma) e^{iS_{\text{corde}}} , \quad (2.10)$$

avec

$$S_{\text{corde}} = S_{\text{Nambu-Goto}} = T \int_{\Sigma} dA . \quad (2.11)$$

Dans l'équation (2.11), $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ est la tension de la corde, $dA = \sqrt{-\det(h_{ab})}d\sigma d\tau$ est un élément infinitésimal de surface du feuillet d'univers de la corde et $h_{ab} = g_{\mu\nu}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu$ est la métrique induite sur le feuillet d'univers de la corde. Pour évaluer (2.10), il est plus simple de choisir la signature de Minkowski, soit $(-1, 1, 1, 1)$. Pour les diagrammes du vide (en anglais «*vacuum processes*»), on obtient

$$Z_{\text{corde}} = \sum_{\text{surfaces fermées}} e^{-S_{\text{NG}}} = \sum_{h=0}^{\infty} e^{-\lambda\chi} \sum_{\text{surfaces de genre } h} e^{-S_{\text{NG}}} , \quad (2.12)$$

où λ peut être interprété comme un potentiel chimique topologique et $\chi = 2 - 2h$ est la caractéristique d'Euler.

Si on définit la constante de couplage des cordes, g_s , comme $g_s \equiv e^\lambda$, alors les états du vide incluent les diagrammes de la figure 2.8, qui sont équivalents à la somme des diagrammes associés à $g_s^{-2} + g_s^0 + g_s^2 + \dots = e^{-2\lambda} + e^0 + e^{2\lambda} + \dots$. Cela se traduit directement comme une somme d'interactions entre des cordes lorsque l'on fait les associations présentées à la figure 2.9.

On peut interpréter la sphère comme étant une corde fermée qui émerge du vide, se propage, puis s'annihile dans l'espace, le tore comme étant une corde fermée qui se sépare en deux cordes fermées qui se propagent puis se recombinent, etc. Puisque l'on souhaite faire un parallèle entre cette série d'interactions des cordes et celle obtenue pour les particules en QCD à l'équation (2.4), on va maintenant ajouter quatre cordes extérieures à ces interactions, soit deux entrantes et deux sortantes. On a ainsi les interactions présentées à la figure 2.10.

La somme des interactions présentées à la figure 2.10 vaut

$$\sum_{h=0}^{\infty} e^{-\lambda\chi} \sum_{\text{surfaces de genre } h} F^{(h)} , \quad (2.13)$$

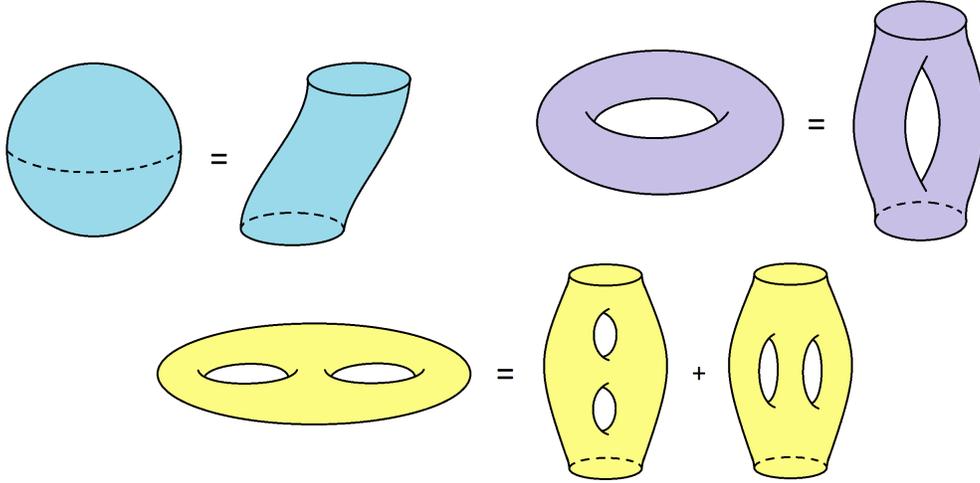


FIGURE 2.9 – Diagrammes du vide d’une corde fermée et les interactions équivalentes.

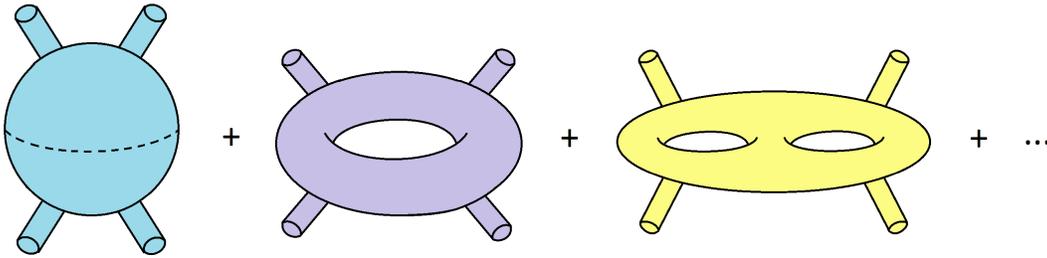


FIGURE 2.10 – Diagrammes du vide auxquels on a ajouté 2 cordes entrantes et deux cordes sortantes.

où $\chi = 2 - 2h - n$, n étant le nombre de cordes extérieures et $F^{(h)}$ représentant l’amplitude de probabilité de chaque diagramme de Feynman de genre h . Ainsi, pour les réactions de diffusion incluant n cordes extérieures, on a l’amplitude de probabilité

$$A_n = \sum_{h=0}^{\infty} g_s^{n-2+2h} F_n^{(h)} = g_s^{n-2} F_n^{(0)} + g_s^n F_n^{(1)} + g_s^{n+2} F_n^{(2)} + \dots, \quad (2.14)$$

où le premier terme de la somme correspond au diagramme incluant la sphère, le second terme à celui incluant le tore, etc.

2.3 Correspondance entre la QCD et la théorie des cordes

2.3.1 Association entre les développements en série obtenus

Dans les sections précédentes, on a montré qu’il est possible d’exprimer l’interaction entre n particules en chromodynamique quantique (QCD) ainsi qu’en théorie des cordes par un

développement en série. On obtient alors

$$\log Z = \sum_{h=0}^{\infty} N_C^{2-n-2h} f_n^{(h)}(\lambda) = N_C^{2-n} f_n^{(0)}(\lambda) + N_C^{-n} f_n^{(1)}(\lambda) + N_C^{-n-2} f_n^{(2)}(\lambda) + \dots \quad (2.15)$$

pour la QCD et

$$A_n = \sum_{h=0}^{\infty} g_s^{n-2+2h} F_n^{(h)} = g_s^{n-2} F_n^{(0)} + g_s^n F_n^{(1)} + g_s^{n+2} F_n^{(2)} + \dots, \quad (2.16)$$

pour la théorie des cordes. Il est intéressant de se pencher sur les similitudes entre ces deux développements en série. On cherche alors à savoir s'il existe une correspondance entre les deux.

Pour qu'elle existe, il faudrait qu'il soit possible d'associer la constante $e^\lambda = g_s$ de la théorie des cordes à la constante $1/N_C$ de la QCD. Il faudrait également pouvoir associer les cordes extérieures des diagrammes de la théorie des cordes à des particules extérieures en QCD et pouvoir associer la topologie du feuillet d'univers des cordes avec la topologie des diagrammes de Feynman en QCD. Malheureusement, ce n'est pas aussi facile. Bien que nous aurions aimé que le lien entre ces deux modèles soit donné directement par une correspondance terme à terme des deux séries trouvées, cela s'avère plus complexe.

Toutefois, les similitudes entre les deux développements en série démontrent qu'il y a du potentiel. Cela inspirera plusieurs physiciens à chercher une correspondance entre ces deux théories. Il faudra attendre Maldacena, près de vingt ans plus tard, pour que cela soit réussi.

Dans la prochaine section de ce travail, nous nous contenterons d'énoncer les grandes lignes du développement de Maldacena puisque qu'il s'avère très technique [35]. Nous présenterons également brièvement les D-branes.

2.3.2 Les D-branes et l'approche de Maldacena

Les équations du mouvement des cordes sont obtenues par la minimisation de l'action,

$$\delta S_P = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\tau \sqrt{-\gamma} \delta X^\mu \partial_\sigma X_\mu = 0.$$

Cela impose les conditions frontières de Dirichlet,

$$\delta X^\mu = 0,$$

ou les conditions frontières de Neumann,

$$\gamma^{\sigma a} \partial_a X^\mu = 0,$$

pour les extrémités des cordes. Les conditions frontières de Dirichlet définissent les surfaces où peuvent se terminer les cordes ouvertes. On appelle ces surfaces les D-branes.

Pour les prochains calculs, nous nous intéresserons à la métrique engendrée par N D3-branes collées ensemble et situées à l'origine. Celle-ci est donnée par [32]

$$ds^2 = H^{-1/2}(r) (-dt^2 + d\vec{x}^2) + H^{1/2}(r) (dr^2 + r^2 d\Omega^2) , \quad (2.17)$$

où $H(r) = 1 + \frac{R^4}{r^4}$ et $R^4 = \frac{4NG_N T_3}{\pi^2} = 4\pi N g_s \alpha'$. On souhaite étudier cette métrique dans différent régime de r .

Lorsque r tend vers l'infini, on remarque que la fonction $H(r)$ devient 1. On retrouve alors une métrique plate. L'espace-temps est donc asymptotiquement plat.

Dans la région où $r \gg R$, on obtient un potentiel de Coulomb de l'ordre r^4 en 10 dimensions qui est dû à la présence des D3-branes qui agissent comme une source.

Dans la région où $r \approx R$, les effets gravitationnels se font sentir. Les D3-branes ont alors un effet sur la courbure de l'espace, qui possède un rayon de l'ordre de R^2 . Dans ce régime, pour que la supergravité reste cohérente, on doit fixer $g_s N \gg 1$ et $g_s \ll 1$.

Dans la région $r \rightarrow 0$, on trouve des résultats intéressants. En effet, on a alors $H(r) \approx \frac{R^4}{r^4}$, ce qui permet de réécrire la métrique comme

$$ds^2 = \frac{r^2}{R^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) + \frac{R^2}{r^2} dr^2 + R^2 d\Omega_5^2 . \quad (2.18)$$

La métrique se retrouve ainsi découpée en une partie équivalente à l'espace Anti-de-Sitter en 5 dimensions (AdS_5) et en une partie équivalente à une sphère en 5 dimensions (S^5). Cette deuxième partie correspond à des dimensions qui sont enroulées sur elles-mêmes.

Maldacena, dans [35], étudie cette géométrie dans la limite de basse énergie. C'est cette limite qui le mena à la correspondance AdS/CFT.

2.3.3 La correspondance AdS/CFT et le principe holographique

Dans la limite de basse énergie, $E \rightarrow 0$, on peut interpréter la métrique plate comme étant celle de la frontière de l'espace où régit la métrique $AdS_5 \times S^5$. On obtient alors, à la frontière, une théorie de Yang-Mills supersymétrique avec $N = 4$ respectant une symétrie $U(N)$ et des gravitons libres. À l'intérieur, on obtient plutôt une théorie complète des supercordes de type IIB avec des D-branes. Il s'agit là d'une correspondance AdS/CFT, soit entre une théorie dans un espace Anti-de-Sitter et une théorie de champs conformes.

C'est le premier cas de dualité holographique. Cela signifie qu'il existe une correspondance entre des modèles n'ayant pas le même nombre de dimension. En effet, la théorie Anti-de-Sitter existe en plus de dimensions que la théorie de champs conformes située à sa frontière. Le mot «holographique» est choisi ici car, bien qu'un hologramme existe en deux dimensions, il encode de l'information venant de toutes les trois dimensions de l'objet qu'il représente. À l'instar de l'hologramme, la théorie de Yang-Mills supersymétrique de notre exemple existe

en quatre dimensions, alors qu'elle encode l'information de la théorie $AdS_5 \times S^5$ en cinq dimensions (avec cinq dimensions compactes contenues dans S^5).

Il existe cinq théories cohérentes pour les supercordes en dix dimensions [9]. Parmi celles-ci, on retrouve les théories de type I, de type IIA, de type IIB et deux théories hétérotiques. Aujourd'hui, toutes ces théories sont considérées comme différentes versions d'une même théorie, la théorie M , reliées par des dualités de type S et T . La théorie M inclut également une théorie supersymétrique en 11 dimensions. Les théories des supercordes de type IIA existent en dix dimensions et ne possèdent pas de symétrie chirale. Elles conservent donc la parité.

2.4 Le modèle de Sakai-Sugimoto

Le succès de la théorie de Maldacena mena d'autres physiciens à se pencher sur les correspondances AdS/CFT. Entre autres, Freund et Rubin [20] ont réussi à retrouver la correspondance avec les géométries $AdS_7 \times S^4$ et $AdS_4 \times S^7$. Cette première géométrie ($AdS_7 \times S^4$) inspirera certains travaux de Witten qui sont d'un intérêt particulier dans le cadre de ce mémoire.

Bâtissant sur les travaux précédents, Witten [52] effectue une réduction dimensionnelle en compactifiant la dimension additionnelle d'espace sur un cercle. Cela lui permet de retrouver, dans la partie CFT, le modèle de Yang-Mills standard déjà connu et étudié dans le cadre du modèle standard. Le dual de la théorie M sur $AdS_7 \times S^4$ est la théorie des M5-branes à basse énergie en six dimensions. En compactifiant cette théorie sur un cercle préservant la supersymétrie, on se retrouve avec des supercordes de type IIA en 10 dimensions où les M5-branes ont été transformées en D4-branes [43].

Quelques années plus tard, Sakai et Sugimoto, ont repris les travaux de Witten pour y inclure des quarks [44; 45]. C'est ce modèle de Sakai-Sugimoto qui nous intéresse, car il est possible de l'interpréter comme une extension holographique du modèle de Skyrme.

2.4.1 Principe général

Si on reprend les travaux de Witten, on est en présence d'une théorie des cordes de type IIA en 10 dimensions. La théorie possède alors déjà des D4-branes associées au nombre quantique des couleurs. Dans leur modèle, Sakai et Sugimoto ajoutèrent des D8-branes et des anti-D8-branes (que l'on écrit $\overline{D8}$ -branes) associées aux saveurs des quarks, ce qui est permis puisqu'il s'agit d'une théorie des cordes de type IIA [43]. En choisissant un nombre de saveurs, N_f , qui est beaucoup plus petit que le nombre de couleurs, N_C , ces D8-branes additionnelles ont un effet négligeable sur la géométrie de l'espace.

Les quarks sont alors formés lorsqu'une corde ouverte se retrouve avec une extrémité se terminant sur une D4-brane de couleur et l'autre sur une D8-brane de saveur. De la même façon, les antiquarks sont formés lorsqu'une corde ouverte a une extrémité qui se termine sur une

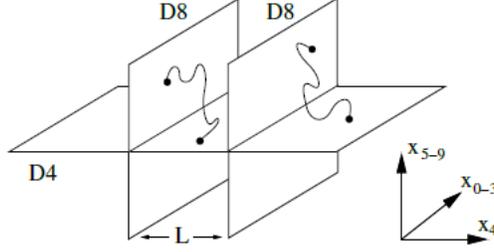


FIGURE 2.11 – Représentation des D-branes et des quarks du modèle de Sakai-Sugimoto. La dimension x_4 est périodique et on n’y retrouve pas de D8-branes, ni de $\overline{D8}$ -branes (figure tirée de [43]).

D4-brane de couleur et l’autre sur une $\overline{D8}$ -brane de saveur. La figure 2.11 présente une représentation graphique de ces phénomènes.

L’action du modèle de Sakai-Sugimoto inclut un terme de Yang-Mills et un terme de Chern-Simons, soit

$$S = S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{Chern-Simons}}$$

avec

$$S_{\text{Yang-Mills}} = -\kappa \text{tr} \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\mu z}^2 \right]$$

$$S_{\text{Chern-Simons}} = \frac{N_c}{384\pi^2} \epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5} \int d^4x dz \hat{A}_{\alpha_1} \left[6 \text{tr} (F_{\alpha_2\alpha_3}^a F_{\alpha_4\alpha_5}^a) + 2 \text{tr} (\hat{F}_{\alpha_2\alpha_3} \hat{F}_{\alpha_4\alpha_5}) \right],$$

qui seront définis dans le chapitre suivant.

Le terme de Yang-Mills vient de l’action de Dirac-Born-Infeld non abélienne des D8-branes alors que le terme de Chern-Simons vient directement de la 5-forme de Chern-Simons des D8-branes [45].

Cette action sera le point de départ de la prochaine section, où nous suivrons le développement de Bartolini et al. [8] pour obtenir l’action du modèle de Skyrme quasi-BPS à partir de l’action de Sakai-Sugimoto. Ensuite, nous tenterons notre propre version de leur méthode afin de générer des termes d’ordre supérieur en dérivée dans l’action du modèle de Skyrme quasi-BPS. Nous espérons ainsi explorer le lien entre ce dernier et la théorie de l’élasticité élaborée par Manton dans [37].

Chapitre 3

Le modèle de Skyrme généralisé

Maintenant que nous nous retrouvons avec tous les outils nécessaires, nous pouvons plonger dans l'article *From the Sakai-Sugimoto model to the generalized Skyrme model* de Lorenzo Bartolini, Stefano Bolognesi et Andrea Proto [8]. Dans cet article, le modèle de Skyrme généralisé est dérivé comme une version efficace à basse énergie du modèle de Sakai-Sugimoto. Par rapport aux travaux précédents, il se distingue par l'obtention du terme d'ordre six en dérivée, qui correspond à la charge topologique au carré.

À partir des techniques utilisées dans cet article, nous souhaitons réobtenir les conclusions principales de l'article à partir d'une généralisation de leur méthode. Ainsi, nous espérons proposer une solution légèrement plus générale nous permettant, entre autres, d'obtenir des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS [11].

Ce faisant, nous souhaitons explorer le parallèle entre le modèle d'élasticité et le modèle de Skyrme déjà proposé par Manton dans [37].

3.1 De Sakai-Sugimoto à Skyrme

Suivant le développement de Sakai-Sugimoto [45] présenté au chapitre précédent, il est possible d'exprimer le modèle efficace en 5 dimensions en fonction d'une action de Yang-Mills/Chern-Simons, soit

$$S = S_{\text{Yang-Mills}} + S_{\text{Chern-Simons}} \quad (3.1)$$

avec

$$S_{\text{Yang-Mills}} = -\kappa \operatorname{tr} \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\mu z}^2 \right] \quad (3.2)$$

$$S_{\text{Chern-Simons}} = \frac{N_c}{384\pi^2} \epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5} \int d^4x dz \hat{A}_{\alpha_1} \left[6 \operatorname{tr} (F_{\alpha_2\alpha_3}^a F_{\alpha_4\alpha_5}^a) + 2 \operatorname{tr} (\hat{F}_{\alpha_2\alpha_3} \hat{F}_{\alpha_4\alpha_5}) \right], \quad (3.3)$$

où $\kappa \equiv aN_C\lambda$ avec $a \equiv (216\pi^3)^{-1}$, $k(z) = 1 + z^2$ et $h(z) = k(z)^{-1/3}$. Ici, N_C est le nombre de couleurs, N_f est le nombre de saveurs, ici 2, λ est la constante de 't Hooft et z est la cinquième dimension du modèle holographique.

Il est possible de décomposer la connexion \mathcal{A} du champ de jauge $U(N_f)$ en une partie $SU(N_f)$ non abélienne, A , et une partie $U(1)$ abélienne, \hat{A} , comme

$$\mathcal{A} = A + \frac{1}{\sqrt{2N_f}}\hat{A} = A^a T^a + \frac{\mathbb{1}}{\sqrt{2N_f}}\hat{A}, \quad \text{où} \quad T^a = \frac{1}{2}\tau^a, \quad (3.4)$$

où τ^a sont les matrices de Pauli lorsque l'on s'intéresse au cas où $N_f = 2$ [25; 8]. On peut alors définir les champs

$$F_{M,N} \equiv \partial_M A_N - \partial_N A_M + i[A_M, A_N] \quad (3.5)$$

$$\hat{F}_{M,N} \equiv \partial_M \hat{A}_N - \partial_N \hat{A}_M \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F}_{MN} \equiv F_{M,N} + \frac{1}{2}\hat{F}_{M,N}. \quad (3.7)$$

Comme le choix de jauge est arbitraire, on choisit $\mathcal{A}_z = 0$, ce qui implique que $A_z = 0$ et que $\hat{A}_z = 0$. Il est alors possible de réécrire l'action de Chern-Simons comme

$$S_{\text{Chern-Simons}} = \frac{N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \int d^4 x dz \hat{A}_{\mu_1} \left[6 \text{tr}(F_{z\mu_3} F_{\mu_4 \mu_5}) + \hat{F}_{z\mu_3} \hat{F}_{\mu_4 \mu_5} \right]. \quad (3.8)$$

Sachant que l'on peut exprimer le lagrangien à partir de l'action, grâce à $S = \int d^4 x dz \mathcal{L}$, on obtient que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{CS} + \mathcal{L}_{YM}$, où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CS} &= \frac{N_c}{96\pi^2} \epsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \hat{A}_{\mu_1} \left[6 \text{tr}(F_{z\mu_3} F_{\mu_4 \mu_5}) + \hat{F}_{z\mu_3} \hat{F}_{\mu_4 \mu_5} \right] \\ \mathcal{L}_{YM} &= -\kappa \text{tr} \left[\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\mu z}^2 \right]. \end{aligned}$$

On souhaite alors obtenir l'équation d'Euler-Lagrange pour \hat{A}_μ , soit

$$0 = \partial_A \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_A \hat{A}_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{A}_\mu} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \right) + \partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{A}_\mu}.$$

On sépare ce calcul en plusieurs parties pour rendre la démarche plus simple. À première vue, on remarque que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial \hat{A}_\mu} = 0,$$

puisque \mathcal{L}_{YM} ne dépend pas de \hat{A}_μ .

On continue avec les autres calculs pour \mathcal{L}_{YM} . Ainsi, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ -\kappa \operatorname{tr} \left[\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\sigma\rho}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\sigma z}^2 \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ -\frac{\kappa h(z)}{2} \operatorname{tr} [\mathcal{F}_{\sigma\rho}^2] \right\} \quad (3.10)$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ -\frac{\kappa h(z)}{2} \operatorname{tr} \left[\left(\hat{F}_{\sigma\rho} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} + F_{\sigma\rho}^a T^a \right) \left(\hat{F}^{\sigma\rho} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} + F^{b\sigma\rho} T^b \right) \right] \right\} \quad (3.11)$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ -\frac{\kappa h(z)}{2} \operatorname{tr} \left[\hat{F}_{\sigma\rho} \hat{F}^{\sigma\rho} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} + F_{\sigma\rho}^a T^a F^{b\sigma\rho} T^b \right] \right\} \quad (3.12)$$

Entre les lignes (3.9) et (3.10), nous avons utilisé le fait que $\mathcal{F}_{\sigma z}^2$ ne dépend pas de $\partial_\nu \hat{A}_\mu$. De la ligne (3.10) à la ligne (3.11), nous avons explicité le terme $\mathcal{F}_{\sigma\rho}^2$ sous la forme d'une somme entre une partie abélienne, $\hat{F}_{\sigma\rho}$, et une partie non abélienne, $F_{\sigma\rho}^a$, comme à l'équation (3.7). Entre les lignes (3.11) et (3.12), nous avons utilisé la relation $T^a = \frac{1}{2} \tau^a$, où τ^a sont les matrices de Pauli, et le fait que les matrices de Pauli ont une trace nulle. Nous continuons ensuite avec

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ -\frac{\kappa h(z)}{2} \left[\hat{F}_{\sigma\rho} \hat{F}^{\sigma\rho} \operatorname{tr} \left(\frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f^2} \right) + F_{\sigma\rho}^a F^{b\sigma\rho} \operatorname{tr} (T^a T^b) \right] \right\} \quad (3.13)$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ -\frac{\kappa h(z)}{2} \left[\frac{1}{2} \hat{F}_{\sigma\rho} \hat{F}^{\sigma\rho} + \frac{1}{2} F_{\sigma\rho}^a F^{a\sigma\rho} \right] \right\} \quad (3.14)$$

$$= \frac{-\kappa h(z)}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ \eta^{\sigma\lambda} \eta^{\rho\tau} \hat{F}_{\sigma\rho} \hat{F}_{\lambda\tau} \right\} \quad (3.15)$$

$$= \frac{-\kappa h(z)}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ \eta^{\sigma\lambda} \eta^{\rho\tau} \left(\partial_\sigma \hat{A}_\rho - \partial_\rho \hat{A}_\sigma \right) \left(\partial_\lambda \hat{A}_\tau - \partial_\tau \hat{A}_\lambda \right) \right\} \quad (3.16)$$

$$= \frac{-\kappa h(z)}{4} \left\{ \left(\delta^{\nu\lambda} \delta^{\mu\tau} - \delta^{\nu\tau} \delta^{\mu\lambda} \right) \hat{F}_{\lambda\tau} + \left(\delta_\lambda^\nu \delta_\tau^\mu - \delta_\tau^\nu \delta_\lambda^\mu \right) \hat{F}^{\lambda\tau} \right\} \quad (3.17)$$

$$= \frac{-\kappa h(z)}{4} \left\{ \hat{F}^{\nu\mu} - \hat{F}^{\mu\nu} + \hat{F}^{\nu\mu} - \hat{F}^{\mu\nu} \right\} \quad (3.18)$$

$$= \kappa h(z) \hat{F}^{\mu\nu} . \quad (3.19)$$

Entre les lignes (3.12) et (3.13), nous avons explicité l'endroit où la trace est appliquée puis, de la ligne (3.13) à la ligne (3.14), nous avons calculé les traces. De la ligne (3.14) à la ligne (3.15), nous avons utilisé le fait que $F_{\sigma\rho}^a$ ne dépend pas de $\partial_\nu \hat{A}_\mu$ et avons descendu les indices du second \hat{F} à l'aide de la métrique plate de Minkowski, $\eta^{\sigma\lambda}$. Entre les lignes (3.15) et (3.16), nous avons explicité la forme des \hat{F} selon la relation (3.6). Entre les lignes (3.16) et (3.17), nous avons calculé la dérivée, réexprimé l'équation en fonction de \hat{F} et remonté les indices à l'aide de la métrique plate déjà présente. Finalement, entre les lignes (3.17) et (3.18), nous avons calculé les multiplications entre les champs \hat{F} et les symboles deltas de Kronecker puis, entre les lignes (3.18) et (3.19), nous avons recombinaé tous les champs \hat{F} ensemble en utilisant leur antisymétrie. Le résultat (3.19) implique que

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \right) = \kappa h(z) \partial_\nu \hat{F}^{\mu\nu} .$$

De façon similaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} \left\{ -\kappa \operatorname{tr} [k(z) \mathcal{F}_{\sigma z}^2] \right\} \\
&= \frac{-\kappa k(z)}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} \left\{ \hat{F}_{\sigma z} \hat{F}^{\sigma z} \right\} \\
&= \frac{-\kappa k(z)}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} \left\{ \eta^{\sigma\lambda} \left(\partial_\sigma \hat{A}_z - \partial_z \hat{A}_\sigma \right) \left(\partial_\lambda \hat{A}_z - \partial_z \hat{A}_\lambda \right) \right\} \\
&= \frac{-\kappa k(z)}{2} \eta^{\sigma\lambda} \left[-\delta_\sigma^\mu \hat{F}_{\lambda z} - \hat{F}_{\sigma z} \delta_\lambda^\mu \right] \\
&= \frac{-\kappa k(z)}{2} \left[-\hat{F}^{\mu z} - \hat{F}^{\mu z} \right] \\
&= \kappa k(z) \hat{F}^{\mu z} ,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{YM}}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} \right) = \kappa \partial_z \left[k(z) \hat{F}^{\mu z} \right] = \kappa \left[2z \hat{F}^{\mu z} + (1+z^2) \partial_z \hat{F}^{\mu z} \right]$$

considérant que $k(z) = 1 + z^2$.

On passe ensuite au calcul des termes associés au lagrangien de Chern-Simons, soit \mathcal{L}_{CS} . Tout d'abord, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial \hat{A}_\mu} &= \frac{\partial}{\partial \hat{A}_\mu} \left\{ \frac{N_C}{384\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \hat{A}_{\alpha_1} \left[6 \operatorname{tr} (F_{\alpha_2 \alpha_3} F_{\alpha_4 \alpha_5}) + 2 \operatorname{tr} (\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} \hat{F}_{\alpha_4 \alpha_5}) \right] \right\} \\
&= \frac{N_C}{384\pi^2} \varepsilon^{\mu \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \left[6 \operatorname{tr} (F_{\alpha_2 \alpha_3} F_{\alpha_4 \alpha_5}) + 2 \operatorname{tr} (\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} \hat{F}_{\alpha_4 \alpha_5}) \right] ,
\end{aligned}$$

où la dérivée est simple, car les champs F et \hat{F} ne dépendent pas directement de \hat{A}_μ . Ensuite, on calcule

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ \frac{N_C}{384\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \hat{A}_{\alpha_1} \left[6 \operatorname{tr} (F_{\alpha_2 \alpha_3} F_{\alpha_4 \alpha_5}) + 2 \operatorname{tr} (\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} \hat{F}_{\alpha_4 \alpha_5}) \right] \right\} \tag{3.20}$$

$$= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \left\{ \frac{N_C}{192\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \hat{A}_{\alpha_1} \operatorname{tr} \left[(\partial_{\alpha_2} \hat{A}_{\alpha_3} - \partial_{\alpha_3} \hat{A}_{\alpha_2}) (\partial_{\alpha_4} \hat{A}_{\alpha_5} - \partial_{\alpha_5} \hat{A}_{\alpha_4}) \right] \right\} \tag{3.21}$$

$$= \frac{N_C}{192\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5} \hat{A}_{\alpha_1} \operatorname{tr} \left[(\delta_{\alpha_2}^\nu \delta_{\alpha_3}^\mu - \delta_{\alpha_3}^\nu \delta_{\alpha_2}^\mu) \hat{F}_{\alpha_4 \alpha_5} + \hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} (\delta_{\alpha_4}^\nu \delta_{\alpha_5}^\mu - \delta_{\alpha_5}^\nu \delta_{\alpha_4}^\mu) \right] \tag{3.22}$$

$$= \frac{N_C}{48\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \nu \mu} \hat{A}_{\alpha_1} \operatorname{tr} (\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3}) . \tag{3.23}$$

Entre les lignes (3.20) et (3.21), nous remarquons que la dérivée du terme en F est nulle, car le champs F ne dépend pas de $\partial_\nu \hat{A}_\mu$. Nous explicitons également la forme des champs \hat{F} en fonction de \hat{A} avec la relation (3.6). De la ligne (3.21) à la ligne (3.22), nous calculons la

dérivée et réexprimons l'équation en fonction du champs \hat{F} . Finalement, entre les lignes (3.22) et (3.23), nous avons calculé la multiplication entre le symbole de Levi-Civita et les deltas de Kronecker et utilisé ses propriétés d'antisymétrie jusqu'à pouvoir recombinaer tous les termes ensemble. Le résultat obtenu à l'équation (3.23) implique que

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\nu \hat{A}_\mu)} \right) = \frac{N_C}{48\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \nu \mu} \partial_\nu \left[\hat{A}_{\alpha_1} \text{tr} \left(\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} \right) \right] .$$

De la même façon, nous obtenons

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} = \frac{N_C}{48\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 z \mu} \hat{A}_{\alpha_1} \text{tr} \left(\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} \right) ,$$

qui implique que

$$\partial_z \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_z \hat{A}_\mu)} \right) = \frac{N_C}{48\pi^2} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 z \mu} \partial_z \left[\hat{A}_{\alpha_1} \text{tr} \left(\hat{F}_{\alpha_2 \alpha_3} \right) \right] .$$

En rassemblant tous les termes, on obtient enfin l'équation différentielle

$$-\kappa \left((1+z^2)^{-1/3} \partial_\nu \hat{F}^{\mu\nu} + \partial_z \left((1+z^2) \hat{F}^{\mu z} \right) \right) + \frac{N_c}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} \text{tr} \left(\mathcal{F}_{\alpha_1\alpha_2} \mathcal{F}_{\alpha_3\alpha_4} \right) = 0 \quad (3.24)$$

qui est donné dans l'article [8].

On part ensuite de l'ansatz [8; 44]

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{cases} \hat{A}_\mu & = B_\mu(x) \chi(z) \\ A_\mu & = \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \psi_+(z) = R_\mu \psi_+(z) \end{cases} , \quad (3.25)$$

où $\psi_+ \equiv \frac{-i}{2} (1 + \frac{2}{\pi} \arctan z)$, pour réexprimer le tenseur électromagnétique. Ici, on considère que \hat{A}_μ est séparable en une partie ne dépendant que de x , $B_\mu(x)$, et une partie ne dépendant que de z , $\chi(z)$. On définit $f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

De cette façon, nous pouvons réexprimer $F_{\mu\nu}$ comme

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \\ &= \partial_\mu (\mathcal{U}^{-1} \partial_\nu \mathcal{U} \psi_+) - \partial_\nu (\mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \psi_+) + i [\mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \psi_+, \mathcal{U}^{-1} \partial_\nu \mathcal{U} \psi_+] \\ &= (-R_\mu R_\nu + R_\nu R_\mu) \psi_+ + i[R_\mu, R_\nu] \psi_+ \psi_+ \\ &= [R_\mu, R_\nu] \psi_+ (i\psi_+ - 1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

en distribuant la dérivée et en reconnaissant que $(\partial_\mu \mathcal{U}^{-1}) \mathcal{U} = -R_\mu$. Nous pouvons également réexprimer $F_{z\mu}$ comme

$$\begin{aligned} F_{z\mu} &= \partial_z A_\mu - \partial_\mu A_z + i[A_z, A_\mu] \\ &= \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U} \partial_z \psi_+ \\ &= R_\mu \psi'_+ , \end{aligned} \quad (3.27)$$

puisque $\partial_\mu A_z = 0$ et $[A_z, A_\mu] = 0$, $\hat{F}_{\mu\nu}$ comme

$$\begin{aligned}\hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu \\ &= (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) \chi \\ &= f_{\mu\nu} \chi\end{aligned}\tag{3.28}$$

et $\hat{F}_{z\mu}$ comme

$$\begin{aligned}\hat{F}_{z\mu} &= \partial_z \hat{A}_\mu - \partial_\mu \hat{A}_z \\ &= B_\mu \chi',\end{aligned}\tag{3.29}$$

car $B_z = 0$.

À l'aide de (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29), nous pouvons réécrire l'équation différentielle (3.24) comme

$$\begin{aligned}0 &= 2\kappa z B_\mu \chi' + \kappa(1+z^2) B_\mu \chi'' + \kappa(1+z^2)^{-1/3} \partial_\nu f^{\nu\mu} \chi \\ &\quad + \frac{N_c}{16\pi^2} \epsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \left\{ \text{tr} (R_{\mu_1} [R_{\mu_2}, R_{\mu_3}] \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1)) + \frac{1}{2} (B_{\mu_1} f_{\mu_2 \mu_3} \chi' \chi) \right\}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

En négligeant les termes en $f_{\mu\nu}$, qui sont d'ordre supérieur en dérivée, nous pouvons réécrire l'équation (3.30) comme

$$B_\mu [2z\chi' + (1+z^2)\chi''] = - \left[\frac{N_c}{16\pi^2 \kappa} \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1) \right] \epsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \text{tr} (R_{\mu_1} [R_{\mu_2}, R_{\mu_3}]).\tag{3.31}$$

L'équation (3.31) peut alors être séparée en une partie ne dépendant que de la coordonnée d'espace-temps x , soit

$$B_\mu = -\epsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \text{tr} (R_{\mu_1} [R_{\mu_2}, R_{\mu_3}]),\tag{3.32}$$

et une partie ne dépendant que de la composante additionnelle de la théorie holographique z , soit

$$2z\chi' + (1+z^2)\chi'' = \frac{N_c}{16\pi^2 \kappa} \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1).\tag{3.33}$$

Nous obtenons donc des équations découplées, ce qui est intéressant pour la résolution du système.

Il est possible de résoudre l'équation pour $\chi(z)$, ce qui donne la solution

$$\chi = \frac{-N_c}{64\pi^3 \kappa} \left(\frac{5\pi^2}{48} - \frac{1}{2} \arctan^2 z + \frac{1}{3\pi^2} \arctan^4 z \right).\tag{3.34}$$

3.1.1 Obtention des termes de l'action du modèle de Skyrme quasi-BPS

En réexprimant l'action du modèle comme une fonction de R_μ seulement à l'aide de l'ansatz (3.25) et de l'équation (3.32), nous sommes capables d'exprimer l'action de Sakai-Sugimoto, (3.1), sous la forme $S = S_0 + S_2 + S_4 + S_6$, soit une somme de termes d'ordres différents en dérivée. Dans cette section, nous allons prendre le temps d'explicitier ces calculs.

Nous commençons avec l'action de Chern-Simons (3.8) obtenue précédemment, soit

$$S_{\text{CS}} = \frac{N_C}{96\pi^2} \varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \int d^4 x dz \hat{A}_{\mu_1} \left[6 \operatorname{tr}(F_{z\mu_3} F_{\mu_4 \mu_5}) + \hat{F}_{z\mu_3} \hat{F}_{\mu_4 \mu_5} \right] \quad (3.35)$$

$$= \frac{N_C}{96\pi^2} \varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \int d^4 x dz B_{\mu_1} \chi \left[6 \operatorname{tr}(R_{\mu_3} [R_{\mu_4}, R_{\mu_5}]) \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1) + B_{\mu_3} \chi' f_{\mu_4 \mu_5} \chi \right], \quad (3.36)$$

que nous avons réécrit, à l'équation (3.36), en utilisant l'ansatz de solution (3.25) et les équations (3.26), (3.27), (3.28) et (3.29) qui en découlent. Pour alléger la notation, nous allons maintenant traiter les deux termes de (3.36) séparément.

Le premier terme nous donne directement, en substituant B_{μ_1} grâce à (3.32),

$$S_{\text{CS}}^{(1)} = \frac{N_C}{96\pi^2} \varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \int d^4 x \left(-\varepsilon^{\mu_1 z \alpha \beta \gamma} \operatorname{tr}(R_\alpha [R_\beta, R_\gamma]) \right) 6 \operatorname{tr}(R_{\mu_3} [R_{\mu_4}, R_{\mu_5}]) \\ \times \int dz \chi \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1) \quad (3.37)$$

$$= \frac{-N_C}{4\pi^2} \varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \varepsilon^{\mu_1 z \alpha \beta \gamma} \int d^4 x \operatorname{tr}(R_\alpha R_\beta R_\gamma) \operatorname{tr}(R_{\mu_3} R_{\mu_4} R_{\mu_5}) \int dz \chi \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1) \quad (3.38)$$

$$= \frac{-N_C}{4\pi^2} \int d^4 x \left(\varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \operatorname{tr}(R_{\mu_3} R_{\mu_4} R_{\mu_5}) \right)^2 \int dz \chi \psi_+ \psi'_+ (i\psi_+ - 1), \quad (3.39)$$

qui est un terme d'ordre six en R_μ et donc d'ordre six en dérivée. Il est même possible de remarquer que l'on y retrouve la charge baryonique au carré.

Le second terme de l'action de Chern-Simons, nous donne un terme de frontière (en anglais «*boundary term*»), soit

$$S_{\text{CS}}^{(2)} = \frac{N_C}{96\pi^2} \varepsilon^{\mu_1 z \mu_3 \mu_4 \mu_5} \int d^4 x B_{\mu_1} B_{\mu_3} f_{\mu_4 \mu_5} \int dz \chi^2 \chi'.$$

Sa contribution est donc nulle, car

$$S_{\text{CS}}^{(2)} \propto \int_{-\infty}^{+\infty} dz \chi^2 \chi' = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \partial_z (\chi^3) = \frac{1}{3} \left[\chi^3 \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

Nous poursuivons ensuite avec le terme de Yang-Mills de l'action de Sakai-Sugimoto présenté

à l'équation (3.2), soit

$$\begin{aligned}
S_{\text{YM}} &= -\kappa \operatorname{tr} \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} h(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + k(z) \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 \right] \\
&= -\kappa \int d^4x dz \left[\frac{1}{2} h(z) \operatorname{tr} \left\{ \left(\hat{F}_{\mu\nu} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} \right)^2 + (F_{\mu\nu}^a T^a)^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. + k(z) \operatorname{tr} \left\{ \left(\hat{F}_{\mu z} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} \right)^2 + (F_{\mu z}^a T^a)^2 \right\} \right], \quad (3.40)
\end{aligned}$$

que nous avons réécrit avec la définition du champs \mathcal{F} , soit les équations (3.5), (3.6) et (3.7). Nous avons également utilisé le fait que la trace des matrices de Pauli est nulle.

Encore une fois, nous allons diviser l'équation (3.40) pour alléger la notation. Nous commençons avec le premier terme abélien de l'action de Yang-Mills, soit (3.41), que nous modifions avec l'équation (3.28) pour $\hat{F}_{\mu\nu}$. Cela nous donne

$$S_{\text{YM}}^{\text{A}(1)} = -\kappa \int d^4x dz \frac{1}{2} h(z) \operatorname{tr} \left\{ \left(\hat{F}_{\mu\nu} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} \right)^2 \right\} \quad (3.41)$$

$$= \frac{-\kappa}{4} \int d^4x (f_{\mu\nu})^2 \int dz h(z) \chi^2, \quad (3.42)$$

qui ne contribue pas à notre action, car nous négligeons le terme $f_{\mu\nu}$ comme pour l'équation différentielle (3.31) obtenue précédemment.

Nous passons ensuite au calcul du second terme abélien de l'action de Yang-Mills, soit

$$\begin{aligned}
S_{\text{YM}}^{\text{A}(2)} &= -\kappa \int d^4x dz k(z) \operatorname{tr} \left\{ \left(\hat{F}_{\mu z} \frac{\mathbb{1}_{N_f}}{N_f} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{-\kappa}{2} \int d^4x dz k(z) (B_\mu \chi')^2 \\
&= -2\kappa \int d^4x \{ \varepsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \operatorname{tr}(R_{\mu_1} R_{\mu_2} R_{\mu_3}) \}^2 \int dz k(z) \chi'^2. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Nous avons alors utilisé l'équation (3.29) pour $\hat{F}_{\mu z}$ obtenue de l'ansatz, puis l'équation (3.32) pour B_μ , obtenue de l'équation différentielle séparable (3.31). Nous nous retrouvons alors à nouveau avec un terme d'ordre six en dérivée, où nous reconnaissons la charge baryonique au carré.

Pour le premier terme non abélien de l'action de Yang-Mills, nous employons la même démarche. Nous calculons la trace, puis nous utilisons l'expression (3.26) obtenue de l'ansatz pour $F_{\mu\nu}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned}
S_{\text{YM}}^{\text{NA}(1)} &= -\kappa \int d^4x dz \frac{1}{2} h(z) \operatorname{tr} \left\{ (F_{\mu\nu}^a T^a)^2 \right\} \\
&= \frac{-\kappa}{4} \int d^4x [R_\mu, R_\nu]^2 \int dz h(z) \psi_+^2 (i\psi_+ - 1)^2, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

qui est d'ordre quatre en dérivée.

Finalement, pour le deuxième terme non abélien de l'action de Yang-Mills, nous calculons la trace, puis nous utilisons l'équation (3.27) obtenue de l'ansatz pour $F_{\mu z}$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}}^{\text{NA} (2)} &= -\kappa \int d^4x dz k(z) \text{tr} \left\{ (F_{\mu z}^a T^a)^2 \right\} \\ &= \frac{-\kappa}{2} \int d^4x (R_\mu)^2 \int dz k(z) \psi_+^{\prime 2}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

qui est d'ordre deux en dérivée.

Alors, en évaluant les intégrales en z des équations (3.42), (3.43), (3.44) et (3.45) grâce à l'équation (3.33) pour $\chi(z)$ obtenue plus tôt, Bartolini et al. [8] réussit à obtenir les termes suivants :

$$S_0 = 4mc \int d^4x (\sigma - 1) \quad (3.46)$$

$$S_2 = \frac{\lambda N_C}{216\pi^4} \int d^4x \text{tr}(R_\mu R^\mu) \quad (3.47)$$

$$S_4 = a\lambda N_C \int d^4x \text{tr}([R_\mu, R_\nu]^2) \quad (3.48)$$

$$S_6 = \frac{51N_C}{8960\lambda} \int d^4x [\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \text{tr}(R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3})]^2, \quad (3.49)$$

où $a \equiv 1,17 \times 10^{-5}$ et $4mc = f_\pi^2 m_\pi^2$, soit la relation de Gell-Mann-Oakes-Renner. Cela correspond à l'action de Skyrme avec le terme S_0 habituel donnant la masse des pions, qui a été générée du modèle de Sakai-Sugimoto à l'aide de l'action de Aharony-Kutasov [4].

Nous passerons maintenant à notre projet de recherche. Ainsi, nous allons reprendre les mêmes étapes que l'article de Bartolini et al. [8], mais avec un ansatz de départ différent, afin d'explorer le parallèle entre le modèle de Skyrme quasi-BPS et le modèle d'élasticité.

3.2 De Sakai-Sugimoto à un modèle de Skyrme généralisé

3.2.1 Motivation : lien entre le modèle de Skyrme quasi-BPS et la théorie de l'élasticité

Dans cette section, nous étudierons la théorie de l'élasticité ainsi que les liens possibles avec le modèle de Skyrme tel que présenté dans [37; 23].

La théorie de l'élasticité étudie la déformation des solides sous des transformations continues. Soit une transformation ζ définie sur un solide telle que

$$dx^\mu = \frac{d\zeta^\mu}{dX^m} dX^m, \quad (3.50)$$

où x et X donnent les positions initiale et finale du solide respectivement. Il est possible de définir le gradient de la déformation comme

$$A^\mu{}_m = \frac{d\zeta^\mu}{dX^m} . \quad (3.51)$$

On peut alors définir le tenseur de déformation droit de Cauchy-Green (en anglais «*right Cauchy-Green deformation tensor*»),

$$D = AA^T . \quad (3.52)$$

Comme A représente une transformation élastique, elle est nécessairement inversible. Cela nous permet de définir sa décomposition polaire

$$A = RU = VR , \quad (3.53)$$

où R est une matrice orthogonale et U et V sont des matrices réelles, symétriques et inversibles. Soit \mathbf{u}_i et λ_i , les vecteurs propres et les valeurs propres de U . On peut déduire que

$$A\mathbf{u}_i = RU\mathbf{u}_i = \lambda_i(R\mathbf{u}_i) = V(R\mathbf{u}_i) . \quad (3.54)$$

Ainsi, $R\mathbf{u}_i$ est un vecteur propre de V avec pour valeur propre λ_i .

Les valeurs propres, λ_i permettent de définir trois invariants, soit

$$I_1 = \text{tr}D = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (3.55)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr}D)^2 - \text{tr}(D^2)] = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 \quad (3.56)$$

$$I_3 = \det D = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 . \quad (3.57)$$

I_1 correspond à la somme des carrés des étirements engendrés par la transformation dans les directions des trois vecteurs propres \mathbf{u}_i , I_2 correspond à la somme des carrés des variations d'aires engendrées par la transformation par rapport à la triade $\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\hat{u}_j \times \hat{u}_k$ et I_3 correspond au carré de la variation de volume due à la transformation.

Il est possible de relier chacun de ces invariants à un terme du lagrangien de Skyrme [37; 23]. I_1 équivaut alors au terme d'ordre deux en dérivée, soit le terme cinétique, I_2 correspond au terme d'ordre quatre en dérivée, soit le terme de Skyrme et I_3 correspond au terme d'ordre six en dérivée, soit le terme de Jackson.

C'est pour cette raison que nous nous intéressons à la génération des termes d'ordre supérieur en dérivée du lagrangien de Skyrme quasi-BPS. Plus précisément, comme il est possible de relier chaque invariant à un terme du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS [11] et comme il s'agit des seuls trois invariants indépendants du modèle d'élasticité, nous nous demandons si les termes actuels du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS sont les seuls

termes indépendants possibles. Nous espérons donc générer des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien qui pourraient tous être exprimés comme des fonctions des termes préexistants.

Dans la prochaine section, nous tenterons d'accomplir cela en reprenant les travaux de Bartolini et al. [8] avec un ansatz de départ différent.

3.2.2 Nouvel ansatz

De par sa façon de produire le terme d'ordre six en dérivée, l'article [8] amène une nouvelle façon de générer les termes du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Cette technique a du potentiel pour nous puisque nous nous intéressons à générer les termes d'ordre supérieur en dérivée afin de faire un parallèle avec le modèle d'élasticité.

Nous souhaitons vérifier s'il est possible, en générant des termes d'ordre supérieur à six en dérivée à l'aide de la démarche de [8], de montrer qu'ils sont en fait des fonctions des quatre premiers termes, soit les termes d'ordre zéro, deux, quatre et six en dérivée déjà obtenus. Autrement dit, nous nous demandons s'il est possible que, comme pour le modèle d'élasticité, ces quatre premiers termes correspondent aux seuls degrés de liberté du modèle.

Nous commencerons, tout d'abord, par générer des termes d'ordre supérieur à six en dérivée. Pour ce faire, nous reprenons le développement de l'article [8] présenté à la section 3.1, mais avec un ansatz de solution différent. Nous choisissons

$$\mathcal{A}_\mu = \begin{cases} \hat{A}_\mu = B_{3\mu}(x)\chi_3(z) + B_{5\mu}(x)\chi_5(z) + \dots = B_{i\mu}(x)\chi_i(z) \\ A_\mu = R_\mu\psi_+(z) . \end{cases} \quad (3.58)$$

Nous voulons ainsi inclure les mésons plus massifs, pas seulement les pions en ajoutant des termes d'ordre supérieur en dérivées. L'indice i des termes de l'ansatz (3.58) représente leur ordre en dérivée. Ainsi, le terme $B_{5\mu}(x)$ comprend cinq dérivées.

Cet ansatz n'est pas le plus général possible. Par exemple, c'est facile de penser à une forme de \hat{A}_μ qu'il serait impossible de factoriser de cette façon. Nous le choisissons, car il reste d'une forme assez générale et parce que nous y voyons du potentiel pour les calculs que nous souhaitons faire.

Avec ce nouveau choix d'ansatz, de la même façon que précédemment, nous pouvons réexprimer $F_{\mu\nu}$ comme

$$F_{\mu\nu} = [R_\mu, R_\nu]\psi_+(i\psi_+ - 1) ,$$

$F_{z\mu}$ comme

$$F_{z\mu} = R_\mu\psi'_+ ,$$

$\hat{F}_{\mu\nu}$ comme

$$\hat{F}_{\mu\nu} = f_{i+1,\mu\nu}(x)\chi_i(z)$$

et $\hat{F}_{z\mu}$ comme

$$\hat{F}_{z\mu} = B_{i\mu}\chi'_i,$$

où $\chi_3(z)$ est équivalent au $\chi(z)$ et $B_{3\mu}$ est équivalent au $B_\mu(x)$ de l'article de Bartolini et al. [8]. Ici, $f_{i+1,\mu\nu} = \partial_\mu B_{i\nu} - \partial_\nu B_{i\mu}$.

L'équation différentielle (3.31) obtenue précédemment devient alors

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in 2\mathbb{N}+1} [h(z)\partial_\nu (f_{i+1}{}^{\mu\nu}\chi_i) + \partial_z (k(z)B_i{}^\mu\chi'_i)] \\ &= \frac{-N_C}{64\pi^2\kappa} 4\varepsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[\text{tr} (F_{z\mu_1} F_{\mu_2 \mu_3}) + \frac{1}{2} \hat{F}_{z\mu_1} \hat{F}_{\mu_2 \mu_3} \right], \end{aligned}$$

qui peut être réécrite, en y insérant notre nouvel ansatz et les champs F et \hat{F} qui en découlent, comme

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in 2\mathbb{N}+1} [h(z)\chi_i\partial_\nu (f_{i+1}{}^{\mu\nu}) + B_i{}^\mu (2z\chi'_i + (1+z^2)\chi''_i)] = \\ & \frac{-N_C}{16\pi^2\kappa} \varepsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \left[\text{tr} (R_{\mu_1} [R_{\mu_2}, R_{\mu_3}]) \psi'_+ \psi_+ (i\psi_+ - 1) + \frac{1}{2} \sum_{j,k \in 2\mathbb{N}+1} \chi'_j \chi_k (B_{j\mu_1} f_{k+1\mu_2 \mu_3}) \right]. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Pour étudier notre équation différentielle, nous considérons chaque ordre en dérivée comme étant linéairement indépendant. Cela correspond à un développement en fonction de l'impulsion (en anglais «*momentum expansion*»). Ainsi, il nous est possible de séparer l'équation (3.59) en une partie d'ordre trois en dérivée, soit

$$B_3{}^\mu (2z\chi'_3 + (1+z^2)\chi''_3) = \frac{-N_C}{16\pi^2\kappa} \varepsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \text{tr} (R_{\mu_1} [R_{\mu_2}, R_{\mu_3}]) \psi'_+ \psi_+ (i\psi_+ - 1), \quad (3.60)$$

une partie d'ordre cinq en dérivée, soit

$$h(z)\chi_3\partial_\nu f_4{}^{\mu\nu} + B_5{}^\mu (2z\chi'_5 + (1+z^2)\chi''_5) = 0, \quad (3.61)$$

une partie d'ordre sept en dérivée, soit

$$h(z)\chi_5\partial_\nu f_6{}^{\mu\nu} + B_7{}^\mu (2z\chi'_7 + (1+z^2)\chi''_7) = \frac{-N_C}{32\pi^2\kappa} \varepsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \chi'_3 \chi_3 B_{3\mu_1} f_{4\mu_2 \mu_3}, \quad (3.62)$$

etc.

À l'ordre trois en dérivée, nous retrouvons la même équation que celle présentée dans l'article de Bartolini et al. [8]. Cette équation est séparable par rapport à x et z , ce qui donne

$$B_3^\mu = -\varepsilon^{\mu z \mu_1 \mu_2 \mu_3} \operatorname{tr}(R_{\mu_1}[R_{\mu_2}, R_{\mu_3}])$$

$$2z\chi_3' + (1+z^2)\chi_3'' = \frac{N_C}{16\pi^2\kappa} \psi_+' \psi_+ (i\psi_+ - 1).$$

Nous obtenons alors la même solution pour $\chi_3(z)$ que précédemment, soit

$$\chi_3 = \frac{-N_C}{64\pi^3\kappa} \left(\frac{5\pi^2}{48} - \frac{1}{2} \arctan^2 z + \frac{1}{3\pi^2} \arctan^4 z \right), \quad (3.63)$$

où nous avons obtenu la dernière ligne à l'aide de *Mathematica*. Alors, χ_3 est une fonction paire. C'est possible d'approximer la solution (3.63) par

$$\chi_3 \approx \frac{-N_C}{64\pi^3\kappa} \left[\frac{5\pi^2}{48} (1+z^2)^{-1/2} \right].$$

Nous passons maintenant à l'analyse du terme d'ordre cinq en dérivée, soit

$$h(z)\chi_3\partial_\nu f_4^{\mu\nu} + B_5^\mu(2z\chi_5' + (1+z^2)\chi_5'') = 0. \quad (3.64)$$

L'équation (3.64) est également séparable. Ainsi, nous obtenons une équation en z ,

$$\partial_z[(1+z^2)\chi_5'] = c_3 h(z)\chi_3, \quad (3.65)$$

et une équation en x ,

$$B_5^\mu = \frac{1}{c_3} \partial_\nu f_4^{\mu\nu}, \quad (3.66)$$

où c_3 est une constante. C'est possible de résoudre l'équation en z pour obtenir une expression pour χ_5' . Cela donne l'expression

$$\partial_z[(1+z^2)\chi_5'] = c_3 h(z)\chi_3$$

$$\chi_5' = \frac{c_1}{1+z^2} + \frac{c_3}{1+z^2} \int dz h(z)\chi_3,$$

que l'on peut résoudre en prenant l'approximation de χ_3 donnée plus tôt.

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \chi_5' &= \frac{c_1}{1+z^2} + \frac{c_3}{1+z^2} \int dz \left((1+z^2)^{-1/3} \right) \frac{N_C}{64\pi^3\kappa} \left(\frac{5\pi^2}{48} (1+z^2)^{-1/2} \right) \\ &= \frac{c_1}{1+z^2} + \frac{c_3}{1+z^2} \int dz \frac{N_C}{64\pi^3\kappa} \left(\frac{5\pi^2}{48} \right) (1+z^2)^{-5/6} \\ &= \frac{c_1}{1+z^2} + \frac{c_3}{1+z^2} \left(\frac{N_C}{64\pi^3\kappa} \right) \left(\frac{5\pi^2}{48} \right) z {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; -z^2 \right), \end{aligned}$$

où nous avons calculé l'intégrale à l'aide de *Mathematica* et où la fonction ${}_2F_1$ est une fonction hypergéométrique. Nous ne trouvons pas de solution analytique pour χ_5 , mais la forme de χ'_5 nous laisse croire qu'il pourrait exister une solution numérique. Toutefois, nous remarquons également que, pour chaque ordre plus élevé en dérivée, les solutions deviennent de plus en plus complexe pour la partie en z . C'est pourquoi nous ne nous lancerons pas dans une résolution numérique. Avec plus de temps, nous aurions également pu considérer des approximations ou des formes alternatives à la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$. Cela n'a pas été fait dans ce travail, mais il s'agit d'une avenue qui pourrait être étudiée.

Nous travaillons ensuite la partie en x de l'équation d'ordre cinq en dérivée, soit

$$\begin{aligned} B_5^\mu &= \frac{1}{c_3} \partial_\nu f_4^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{c_3} \partial_\nu [\partial^\mu B_3^\nu - \partial^\nu B_3^\mu] \\ &= \frac{1}{c_3} \partial_\nu \left[\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\nu \operatorname{tr}(R_{\nu_1} [R_{\nu_2}, R_{\nu_3}]) - \varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr}(R_{\nu_1} [R_{\nu_2}, R_{\nu_3}]) \right], \end{aligned}$$

que nous avons réécrit en utilisant l'équation pour B_3^μ obtenue précédemment.

Nous commençons par développer le premier terme de B_5^μ , soit

$$\begin{aligned} B_5^{(1)\mu} &= \partial_\nu \varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\nu \operatorname{tr}(R_{\nu_1} [R_{\nu_2}, R_{\nu_3}]) \\ &= 2\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial_\nu \partial^\nu \operatorname{tr}(R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3}) \\ &= 6\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2(\partial^\nu R_{\nu_1})(\partial_\nu R_{\nu_2}) R_{\nu_3} \right], \end{aligned}$$

où nous avons simplement rassemblé les termes du commutateur grâce à son antisymétrie et à celle du symbole Levi-Civita, distribué les dérivées et rassemblé les termes à l'aide des propriétés du symbole de Levi-Civita.

Nous nous concentrons maintenant sur le deuxième terme de $B_5^{(1)\mu}$.

$$\begin{aligned} B_5^{(1)\mu} &= 6\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2(\partial^\nu R_{\nu_1})(\partial_\nu R_{\nu_2}) R_{\nu_3} \right] \\ &= 6\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2 \left(\partial^\nu (\mathcal{U}^{-1} \partial_{\nu_1} \mathcal{U}) \right) \left(\partial_\nu (\mathcal{U}^{-1} \partial_{\nu_2} \mathcal{U}) \right) R_{\nu_3} \right] \\ &= 6\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2 \left((\partial^\nu \mathcal{U}^{-1}) \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1} \partial_{\nu_1} \mathcal{U} + \mathcal{U}^{-1} \partial_{\nu_1} \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1} \partial^\nu \mathcal{U} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left((\partial_\nu \mathcal{U}^{-1}) \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1} \partial_{\nu_2} \mathcal{U} + \mathcal{U}^{-1} \partial_{\nu_2} \mathcal{U} \mathcal{U}^{-1} \partial_\nu \mathcal{U} \right) R_{\nu_3} \right] \\ &= 6\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2(-R^\nu R_{\nu_1} + R_{\nu_1} R^\nu)(-R_\nu R_{\nu_2} + R_{\nu_2} R_\nu) R_{\nu_3} \right] \\ &= 6\varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2[R_{\nu_1}, R^\nu][R_{\nu_2}, R_\nu] R_{\nu_3} \right] \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $R_\mu = \mathcal{U}^{-1} \partial_\mu \mathcal{U}$ et $-R_\mu = (\partial_\mu \mathcal{U}^{-1}) \mathcal{U}$.

Nous regardons ensuite le second terme de B_5^μ , soit

$$\begin{aligned}
B_5^{(2)\mu} &= \varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial_\nu \partial^\mu \operatorname{tr}(R_{\nu_1} [R_{\nu_2}, R_{\nu_3}]) \\
&= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \partial_\nu \operatorname{tr}(R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3}) \\
&= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} (\partial_\nu R_{\nu_2}) R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} (\partial_\nu R_{\nu_3}) \right], \quad (3.67)
\end{aligned}$$

sur lequel nous avons effectué les mêmes manipulations que pour le premier terme. Avec $\partial_\mu R_\nu = [R_\mu, R_\nu] + \partial_\nu R_\mu$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
B_5^{(2)\mu} &= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[[R_\nu, R_{\nu_1}] R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} [R_\nu, R_{\nu_2}] R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} [R_\nu, R_{\nu_3}] \right. \\
&\quad \left. + (\partial_{\nu_1} R_\nu) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} R_\nu) R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} R_\nu) \right]. \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Par l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita, nous avons

$$\begin{aligned}
B_5^{(2)\mu} &= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[[R_\nu, R_{\nu_1}] R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} [R_\nu, R_{\nu_2}] R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} [R_\nu, R_{\nu_3}] \right. \\
&\quad \left. - (\partial_{\nu_1} R_\nu) R_{\nu_2} R_{\nu_3} - R_{\nu_1} (\partial_{\nu_2} R_\nu) R_{\nu_3} - R_{\nu_1} R_{\nu_2} (\partial_{\nu_3} R_\nu) \right]. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

En rassemblant les lignes (3.67) et (3.69), nous obtenons la relation

$$\begin{aligned}
&4\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} (\partial_\nu R_{\nu_2}) R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} (\partial_\nu R_{\nu_3}) \right] \\
&= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[[R_\nu, R_{\nu_1}] R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} [R_\nu, R_{\nu_2}] R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} [R_\nu, R_{\nu_3}] \right]. \quad (3.70)
\end{aligned}$$

La relation (3.70) et l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned}
B_5^{(2)\mu} &= \varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[[R_\nu, R_{\nu_1}] R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} [R_\nu, R_{\nu_2}] R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} [R_\nu, R_{\nu_3}] \right] \\
&= \varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[R_\nu R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} - R_{\nu_1} R_\nu R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_\nu R_{\nu_2} R_{\nu_3} \right. \\
&\quad \left. - R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_\nu R_{\nu_3} + R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_\nu R_{\nu_3} - R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} R_\nu \right] \\
&= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \partial^\mu \operatorname{tr} \left[R_\nu R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} \right]. \quad (3.71)
\end{aligned}$$

En distribuant la dérivée et en utilisant l'antisymétrie du symbole de Levi-Civita, nous avons

$$\begin{aligned}
B_5^{(2)\mu} &= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial^\mu R_\nu) R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} + R_\nu (\partial^\mu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} \right. \\
&\quad \left. + R_\nu R_{\nu_1} (\partial^\mu R_{\nu_2}) R_{\nu_3} + R_\nu R_{\nu_1} R_{\nu_2} (\partial^\mu R_{\nu_3}) \right] \\
&= 2\varepsilon^{\nu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial^\mu R_\nu) R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} - (\partial^\mu R_\nu) R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} \right. \\
&\quad \left. + (\partial^\mu R_\nu) R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} - (\partial^\mu R_\nu) R_{\nu_1} R_{\nu_2} R_{\nu_3} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons finalement que

$$B_5^\mu(x) = \frac{6}{c_3} \varepsilon^{\mu z \nu_1 \nu_2 \nu_3} \operatorname{tr} \left[(\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}) R_{\nu_2} R_{\nu_3} + 2[R_{\nu_1}, R^\nu][R_{\nu_2}, R_\nu] R_{\nu_3} \right]. \quad (3.72)$$

La forme finale de B_5^μ nous pose problème. Nous souhaitons exprimer l'action résultante comme une fonction des termes déjà existants dans l'action du modèle de Skyrme quasi-BPS. Or, la présence de la double dérivée, $\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}$, dans (3.72) nous empêche d'atteindre cet objectif, puisqu'il n'existe pas de termes de cette forme dans l'action du modèle de Skyrme quasi-BPS.

Pour les ordres plus élevés, les équations différentielles que nous obtenons ne sont pas séparables. Nous n'arrivons donc pas à trouver des solutions analytiques.

3.2.3 Discussion des résultats obtenus

Dans cette section, nous discuterons des résultats obtenus précédemment. Nous avons réussi à générer des termes d'ordre supérieur en dérivée, mais il n'est pas possible de résoudre analytiquement pour les ordres supérieur à trois. Toutefois, nous croyons qu'il pourrait exister une solution numérique à l'ordre cinq en dérivée. Pour les ordres supérieurs à cinq, cela pose problème, car il est nécessaire d'obtenir une solution pour $B_{i\mu}(x)$ et $\chi_i(z)$ pour réussir à générer les termes de l'action.

Notre choix d'ansatz a beaucoup d'impact sur notre capacité à résoudre. La forme de l'ansatz (3.58) est très restrictive. En effet, il est facile d'imaginer une forme de \hat{A}_μ qui ne puisse pas être factorisée de sorte qu'elle respecte la forme de l'ansatz que nous avons choisi. Nous avons choisi la forme qui nous semblait la plus susceptible de nous donner une solution analytique, mais n'avons pas réussi à obtenir une telle solution. Ainsi, nous nous demandons si un choix d'ansatz différent pourrait nous permettre d'atteindre notre objectif. Est-ce qu'un ansatz ayant une forme légèrement plus complexe pourrait nous permettre de prévenir l'existence des éléments qui nous empêche de trouver une résolution comme la double dérivée dans $B_5^\mu(x)$? Est-ce qu'on pourrait trouver une forme d'ansatz qui nous garantit d'avoir une équation différentielle séparable pour tous les ordres en dérivée?

Notre ansatz a toutefois plusieurs points positifs. Déjà, à l'ordre trois en dérivée, nous retrouvons la solution obtenue par Bartolini et al. [8]. Aussi, bien que nous ne sommes pas capables de trouver une solution analytique pour les ordres supérieurs à trois en dérivées ou de faire le lien avec la théorie de l'élasticité, nous sommes capables de générer des termes d'ordre supérieur en dérivée de façon systématique. De plus, il ne faut pas négliger les résultats obtenus pour l'ordre cinq en dérivée. À cet ordre, bien que nous n'avons pas exploré cette avenue, nous avons une équation séparable pour laquelle nous croyons qu'il pourrait exister une solution numérique pour la partie $\chi_5(z)$. Pour la partie $B_5^\mu(x)$, nous n'arrivons pas à une forme qui soit une fonction des termes préexistants du modèle de Skyrme quasi-BPS, mais presque! Il ne reste plus qu'un terme qui soit problématique.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier le lien entre les invariants de la théorie de l'élasticité et les termes du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Sachant qu'il est possible de relier chacun des termes du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS à un des invariants de la théorie de l'élasticité [37] et sachant qu'il n'existe que trois invariants indépendants dans la théorie de l'élasticité, nous nous demandions si les termes actuels du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS étaient les seuls termes indépendants possibles. Autrement dit, en générant des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS, est-ce que nous nous retrouvons avec seulement des fonctions des termes préexistants ?

Pour étudier cette hypothèse, nous avons suivi l'approche de Lorenzo Bartolini, Stefano Bolognesi et Andrea Proto [8] pour générer des termes d'ordre supérieur en dérivée dans le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Leur approche part du lagrangien du modèle de Sakai-Sugimoto, qui est une extension holographique de la chromodynamique quantique, pour obtenir le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS avec quelques manipulations simples. Par leur choix d'ansatz et leur décision de négliger les termes en $f_{\mu\nu}$, d'ordre supérieur en dérivée, ils arrivent à générer les termes d'ordre zéro, deux, quatre et six du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Or, il est évident qu'il est possible de générer des termes d'ordre supérieur en dérivée à partir de leur méthode.

Nous avons donc repris leurs calculs, mais en choisissant un ansatz de solution différent et sans négliger les termes en $f_{\mu\nu}$. Nous avons choisi un nouvel ansatz avec une forme assez restrictive, mais qui nous semblait avoir un bon potentiel de résolution. Ainsi, il a la forme d'une somme de termes d'ordre différent en dérivée. Chaque terme comprend une partie dépendant de la coordonnée d'espace-temps, x , d'ordre i en dérivée multipliée à une partie dépendant de la composante additionnelle d'espace de la théorie holographique, z , également d'ordre i en dérivée. En réécrivant l'équation différentielle de Bartolini et al. [8] à l'aide de notre ansatz, nous avons obtenu une équation différentielle que nous pouvons séparer en considérant chaque ordre en dérivée comme étant linéairement indépendant, soit en faisant un développement en fonction de l'impulsion (en anglais «*momentum expansion*»). Nous avons donc obtenu des équations différentielles séparées, incluant une équation d'ordre trois en dérivée, une équation d'ordre cinq en dérivée, une équation d'ordre sept en dérivée, etc.

À l'ordre trois en dérivée, nous retrouvons le résultat obtenu par Bartolini et al. [8]. Nous avons donc une équation séparable où il est possible de résoudre pour la partie dépendant de z et où l'on retrouve la charge baryonique pour la partie en x .

À l'ordre cinq en dérivée, nous obtenons également une équation séparable mais, cette fois-ci, nous nous butons à quelques petits problèmes. Pour la partie en z , nous sommes capables d'obtenir une expression analytique pour χ'_5 , mais pas pour χ_5 . Toutefois, la forme obtenue suggère qu'une solution numérique pourrait être possible. Pour la partie en x , nous obtenons une expression avec un terme d'ordre cinq en dérivée qui est de la forme souhaitée, soit le second terme de l'équation (3.72), mais aussi un terme comprenant une double dérivée de R_μ , soit $\partial_\nu \partial^\nu R_{\nu_1}$. Il s'agit du premier terme de l'équation (3.72). Ce terme nous pose problème, car il est d'une forme qui ne se retrouve pas dans les termes déjà existants dans le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS.

Finalement, pour les équations différentielles d'ordre supérieur à cinq en dérivée, nous n'obtenons même pas des équations séparables et nous n'arrivons pas à résoudre. Nous n'arrivons donc pas à étudier le lien avec la théorie de l'élasticité, car il nous manque trop d'éléments.

Le choix de notre ansatz joue un rôle très important dans nos calculs. Il a quelques points positifs. Tout d'abord, il nous permet de retrouver la solution de Bartolini et al. à l'ordre trois en dérivée. Ensuite, il nous permet de générer systématiquement des termes d'ordre supérieur en dérivée. Aussi, il nous donne presque une solution à l'ordre cinq en dérivée.

Par contre, il nous pose aussi quelques problèmes. Déjà, sa forme est assez restrictive. En effet, il est facile de s'imaginer une fonction qu'il serait impossible d'exprimer de cette façon. De plus, notre ansatz amène l'apparition de dérivées doubles dans le terme d'ordre cinq en dérivée, ce qui nous empêche de l'exprimer en fonction des termes préexistants du lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS. Également, il ne nous donne pas d'équation différentielle séparable pour les ordres supérieurs à cinq en dérivée.

Nous nous demandons alors si une forme d'ansatz différente pourrait nous donner les mêmes avantages, mais aussi prévenir l'apparition des dérivées doubles dans le terme d'ordre cinq en dérivée et nous assurer des équations différentielles séparables pour les ordres supérieurs à cinq en dérivée. Si cette forme existe, il serait alors possible d'explorer le lien avec la théorie de l'élasticité comme nous le souhaitions au départ.

Après avoir exploré cet ansatz, nous nous butons à des problèmes que nous n'arrivons pas à surmonter. Alors, la question devient : est-il possible qu'un ansatz différent nous montre qu'il n'existe que trois termes indépendants dans le lagrangien du modèle de Skyrme quasi-BPS par analogie avec les invariants de la théorie de l'élasticité ?

Bibliographie

- [1] H. A. ABDALLA : *Stabilization of the Skyrmion by the Quantisation of Collective Vibrations and Rotations*. Thèse de doctorat, McMaster University, 1994. URL <https://macsphere.mcmaster.ca/handle/11375/7953>.
- [2] C. ADAM, J. SÁNCHEZ-GUILLÉN et A. WERESZCZYŃSKI : A Skyrme-type proposal for baryonic matter. *Physics Letters B*, 691(2):105–110, 2010. ISSN 0370-2693. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310007707>.
- [3] G. S. ADKINS, C. R. NAPPI et E. WITTEN : Static properties of nucleons in the Skyrme model. *Nuclear Physics B*, 228(3):552–566, 1983.
- [4] O. AHARONY et D. KUTASOV : Holographic duals of long open strings. *Physical Review D*, 78(2):026005, 2008. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.026005>. Publisher : American Physical Society.
- [5] J. J. AUBERT, U. BECKER, P. J. BIGGS, J. BURGER et AL. : Experimental Observation of a Heavy Particle J. *Physical Review Letters*, 33(23):1404–1406, 1974. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1404>. Publisher : American Physical Society.
- [6] J. E. AUGUSTIN, A. M. BOYARSKI, M. BREIDENBACH, F. BULOS et AL. : Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation. *Physical Review Letters*, 33(23):1406–1408, 1974. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.1406>. Publisher : American Physical Society.
- [7] V. E. BARNES, P. L. CONNOLLY, D. J. CRENNELL, B. B. CULWICK et AL. : Observation of a Hyperon with Strangeness Minus Three. *Physical Review Letters*, 12(8):204–206, 1964. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.12.204>. Publisher : American Physical Society.
- [8] L. BARTOLINI, S. BOLOGNESI et A. PROTO : From the Sakai-Sugimoto model to the generalized Skyrme model. *Physical Review D*, 97(1):014024, 2018. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.014024>.

- [9] K. BECKER, M. BECKER et J. H. SCHWARZ : *String Theory and M-Theory : A Modern Introduction*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. ISBN 978-0-521-86069-7. URL <https://www.cambridge.org/core/books/string-theory-and-mtheory/0D112662D065F738422C8A6E507545AB>.
- [10] E. D. BLOOM, D. H. COWARD, H. DE STAEBLER, J. DREES et AL. : High-Energy Inelastic e-p Scattering at 6° and 10°. *Physical Review Letters*, 23(16):930–934, 1969. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.930>. Publisher : American Physical Society.
- [11] E. BONENFANT et L. MARLEAU : Nuclei as near BPS Skyrmions. *Physical Review D*, 82(5):054023, 2010. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.82.054023>. Publisher : American Physical Society.
- [12] E. BRAATEN et L. CARSON : Deuteron as a toroidal Skyrmion. *Physical Review D*, 38(11):3525–3539, 1988. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.38.3525>. Publisher : American Physical Society.
- [13] M. BREIDENBACH, J. I. FRIEDMAN, H. W. KENDALL, E. D. BLOOM et AL. : Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering. *Physical Review Letters*, 23(16):935–939, 1969. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.935>. Publisher : American Physical Society.
- [14] CDF COLLABORATION : Observation of Top Quark Production in $\bar{p}p$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab. *Physical Review Letters*, 74(14):2626–2631, 1995. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2626>. Publisher : American Physical Society.
- [15] D0 COLLABORATION : Observation of the Top Quark. *Physical Review Letters*, 74(14):2632–2637, 1995. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.2632>. Publisher : American Physical Society.
- [16] T. DAUXOIS et M. PEYRARD : *Physics of Solitons*. Cambridge University Press, 2006. ISBN 978-0-521-85421-4.
- [17] G. H. DERRICK : Comments on Nonlinear Wave Equations as Models for Elementary Particles. *Journal of Mathematical Physics*, 5(9):1252–1254, 1964. ISSN 0022-2488. URL <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.1704233>.
- [18] D. FINKELSTEIN : Kinks. *Journal of Mathematical Physics*, 7(7):1218–1225, 1966. ISSN 0022-2488. URL <https://aip-scitation-org.acces.bibl.ulaval.ca/doi/abs/10.1063/1.1705025>.

- [19] D. FINKELSTEIN et C. W. MISNER : Some new conservation laws. *Annals of Physics*, 6(3):230–243, 1959. ISSN 0003-4916. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491659900806>.
- [20] P. G. O. FREUND et M. A. RUBIN : Dynamics of dimensional reduction. *Physics Letters B*, 97(2):233–235, 1980. ISSN 0370-2693.
- [21] M. GELL-MANN : The Eightfold Way : A Theory of Strong Interaction Symmetry. *CTSL-20*, 1961.
- [22] N. GIASSON : *Paramétrisation du champ de pion dans une extension quasi-BPS du modèle de Skyrme*. Mémoire de maîtrise, Université Laval, 2015. URL <https://corpus.ulaval.ca/jspui/handle/20.500.11794/25789>.
- [23] T. GISIGER et M. B. PARANJAPE : Recent mathematical developments in the Skyrme model. *Physics Reports*, 306(3):109–211, 1998. ISSN 0370-1573. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157398000374>.
- [24] H. GOLDSTEIN, C. POOLE et J. SAFKO : Classical Mechanics, 3rd ed. *American Journal of Physics*, 70(7):782–783, 2002. ISSN 0002-9505.
- [25] H. HATA, T. SAKAI, S. SUGIMOTO et S. YAMATO : Baryons from Instantons in Holographic QCD. *Progress of Theoretical Physics*, 117(6):1157–1180, 2007. ISSN 0033-068X. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.117.1157>.
- [26] H. HELMHOLTZ : LXIII. On Integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex-motion. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 33(226):485–512, 1867. ISSN 1941-5982. URL <https://doi.org/10.1080/14786446708639824>.
- [27] S. W. HERB, D. C. HOM, L. M. LEDERMAN, J. C. SENS et AL. : Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions. *Physical Review Letters*, 39(5):252–255, 1977. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.252>. Publisher : American Physical Society.
- [28] G. HOLZWARTH et B. SCHWESINGER : Baryons in the Skyrme model. *Reports on Progress in Physics*, 49(8):825–871, 1986. ISSN 0034-4885. URL <https://doi.org/10.1088/0034-4885/49/8/001>.
- [29] C. HOUGHTON et S. MAGEE : A zero-mode quantization of the skyrmion. *Physics Letters B*, 632(4):593–596, 2006. ISSN 0370-2693. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269305016138>.

- [30] A. JACKSON, A. D. JACKSON, A. S. GOLDBABER, G. E. BROWN et L. C. CASTILLEJO : A modified skyrmion. *Physics Letters B*, 154(2):101–106, 1985. ISSN 0370-2693. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269385905660>.
- [31] T. D. LEE et C. N. YANG : Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino. *Physical Review*, 105(5):1671–1675, 1957.
- [32] H. LIU : String Theory and Holographic Duality (notes de cours, MIT OpenCourseWare), 2014. URL <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-821-string-theory-and-holographic-duality-fall-2014/>.
- [33] LORD KELVIN : On Vortex Atoms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, VI:94–105, 1867.
- [34] V. G. MAKHANKOV, Y. P. RYBAKOV et V. I. SANYUK : *The Skyrme Model : Fundamentals Methods Applications*. Springer Science & Business Media, 2012. ISBN 978-3-642-84670-0.
- [35] J. M. MALDACENA : The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999. ISSN 00207748. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9711200>.
- [36] O. V. MANKO, N. S. MANTON et S. W. WOOD : Light nuclei as quantized Skyrmions. *Physical Review C*, 76(5):055203, 2007. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.76.055203>. Publisher : American Physical Society.
- [37] N. S. MANTON : Geometry of Skyrmions. *Communications in Mathematical Physics*, 111(3):469–478, 1987. ISSN 1432-0916. URL <https://doi.org/10.1007/BF01238909>.
- [38] L MARLEAU : Introduction à la physique des particules (notes de cours), 2013.
- [39] M. NAKAHARA : *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. CRC Press, 2003. ISBN 978-0-7503-0606-5.
- [40] K. A. OLIVE : Review of Particle Physics. *Chinese Physics C*, 38(9):090001, 2014. ISSN 1674-1137. URL <https://doi.org/10.1088/1674-1137/38/9/090001>. Publisher : IOP Publishing.
- [41] C. O’LUANAIGH : Fifty years of quarks (site web du CERN), 2014. URL <http://home.cern/news/news/physics/fifty-years-quarks>.
- [42] M. E. PESKIN et D. V. SCHROEDER : *An Introduction To Quantum Field Theory*. Avalon Publishing, 1995. ISBN 978-0-8133-4543-7.
- [43] A. REBHAN : The Witten-Sakai-Sugimoto model : A brief review and some recent results. *EPJ Web of Conferences*, 95:02005, 2015. ISSN 2100-014X.

URL https://www.epj-conferences.org/articles/epjconf/abs/2015/14/epjconf_icnfp2014_02005/epjconf_icnfp2014_02005.html.

- [44] T. SAKAI et S. SUGIMOTO : Low Energy Hadron Physics in Holographic QCD. *Progress of Theoretical Physics*, 113(4):843–882, 2005. ISSN 0033-068X. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.113.843>.
- [45] T. SAKAI et S. SUGIMOTO : More on a Holographic Dual of QCD. *Progress of Theoretical Physics*, 114(5):1083–1118, 2005. ISSN 0033-068X. URL <https://doi.org/10.1143/PTP.114.1083>.
- [46] T. H. R. SKYRME : A unified field theory of mesons and baryons. *Nuclear Physics*, 31:556–569, 1962. ISSN 0029-5582.
- [47] T. H. R. SKYRME : The origins of skyrmions. *In Selected Papers, with Commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme*, volume 3 de *World Scientific Series in 20th Century Physics*, pages 115–125. World Scientific, 1994. ISBN 978-981-02-1646-7. URL https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812795922_0009.
- [48] T. H. R. SKYRME et M. H. L. PRYCE : A new model for nuclear matter. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 226(1167):521–530, 1954. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1954.0272>.
- [49] T. H. R. SKYRME et B. F. J. SCHONLAND : A non-linear theory of strong interactions. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 247(1249):260–278, 1958. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1958.0183>.
- [50] G. 't HOOFT : A planar diagram theory for strong interactions. *In The Large N Expansion in Quantum Field Theory and Statistical Physics*, pages 80–92. World Scientific, 1993. ISBN 978-981-02-0455-6. URL https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814365802_0007.
- [51] S. P. THOMPSON : *The Life of Lord Kelvin*. American Mathematical Soc., 2005. ISBN 978-0-8218-3744-3.
- [52] E. WITTEN : Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, And Confinement In Gauge Theories. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2(505), 1998. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9803131>.
- [53] H. YUKAWA : On the Interaction of Elementary Particles. I. *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series*, 17:48–57, 1935. ISSN 0370-1239, 2185-2707.

- [54] G. ZWEIG : An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking. Rapport technique, CM-P00042884, 1964. URL <http://cds.cern.ch/record/352337/files/CERN-TH-401.pdf?version=1>.
- [55] G. ZWEIG : Origins of the Quark Model. *In Baryon 1980 Conference*, California Institute of Technology, 1980. URL <https://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:20100709-123124828>.